量子アルゴリズム
（量子アルゴリズムにおける量子優位性の理論的基盤）

ルガル フランソワ
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ムーンショット目標6 ミニシンポジウム2024
2024年10月1日

名古屋大学
NAGOYA UNIVERSITY

Quantum Advantage　量子優位性

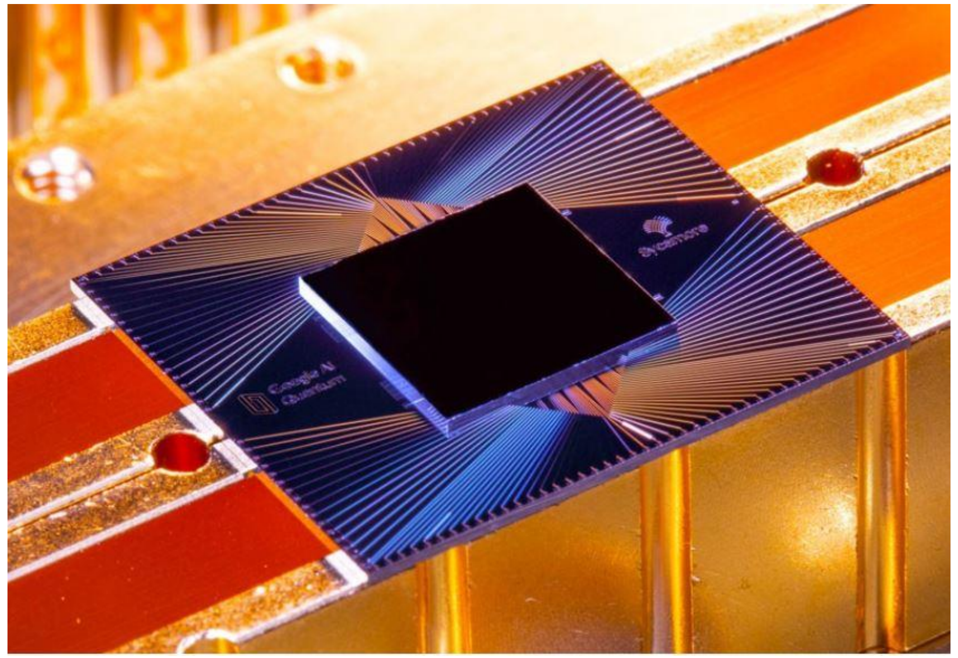
We now know that small-scale quantum computers can perform computation faster than classical computers

小規模量子コンピュータは古典コンピュータより高速に計算できることが確認された

NEWS · 23 OCTOBER 2019

Hello quantum world! Google publishes landmark quantum supremacy claim

The company says that its quantum computer is the first to perform a calculation that would be practically impossible for a classical machine.



https://www.nature.com/articles/d41586-019-03213-z
Nature **574**, 461-462 (2019)

Can quantum computers perform useful computations faster than classical computers?

量子コンピュータは古典コンピュータより高速に役立つ計算ができるのか？

Task: compute the output of a random quantum circuit acting on 53 qubits

タスク：53 qubitsに作用するランダム量子回路の出力を求める

Quantum Advantage for Useful Tasks
役立つ計算における量子優位性

Provable advantage
理論的保証付き優位性

- ✓ Integer Factoring 素因数分解
- ✓ Quantum search　量子探索
- ✓ Quantum simulation 量子系のシミュレーション
- ✓ Quantum distributed computing　量子分散計算

…

merit: theoretical guarantees of the quantum advantage

demerit: generally requires quantum error-correction

メリット：量子優位性が理論的に保証される
デメリット: 基本的に量子誤り訂正は必要

Heuristic　ヒューリスティック

- ✓ Quantum annealing　量子アニーリング
- ✓ Adiabatic algorithms　断熱量子計算
- ✓ QAOA
- ✓ VQA　変分量子アルゴリズム
- ✓ Quantum machine learning 量子機械学習

…

merit: can be implemented on NISQ devices

demerit: generally few theoretical guarantees
(performance needs to be analyzed on real data)

メリット：NISQデバイスで実現可能
デメリット：理論的な保証はあまりない
（実データで性能を確認する必要がある）

My Research

Quantum algorithms with provable advantage

- Generalization of Shor algorithm
- Quantum algorithms for algebraic problems
  - ⇨ Matrix multiplication
  - ⇨ Systems of linear equations (HHL algorithm)
  - ⇨ Quantum simulation (e.g., chemistry)
  - ⇨ Quantum optimization
- Quantum distributed algorithms
- Quantum algorithms for string problems

私の研究

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

- ショアのアルゴリズムの一般化
- 代数的問題に対する量子アルゴリズム
  - ⇨ 行列積
  - ⇨ 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
  - ⇨ 量子系のシミュレーション (例：化学)
  - ⇨ 量子最適化
- 量子分散アルゴリズム
- 文字列問題に対する量子アルゴリズム

Outline of the Talk

Quantum algorithms with provable advantage

Quantum algorithms for algebraic problems

- Matrix multiplication
- Systems of linear equations (HHL algorithm)
- Quantum simulation (e.g., chemistry)
- Quantum optimization

Quantum algorithms for string problems

本日の流れ

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- 行列積
- 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- 量子系のシミュレーション (例：化学)
- 量子最適化

文字列問題に対する量子アルゴリズム

Outline of the Talk　本日の流れ

Quantum algorithms with provable advantage

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

Quantum algorithms for algebraic problems

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- Matrix multiplication / 行列積
- Systems of linear equations (HHL algorithm) / 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- Quantum simulation (e.g., chemistry) / 量子系のシミュレーション (例：化学)
- Quantum optimization / 量子最適化

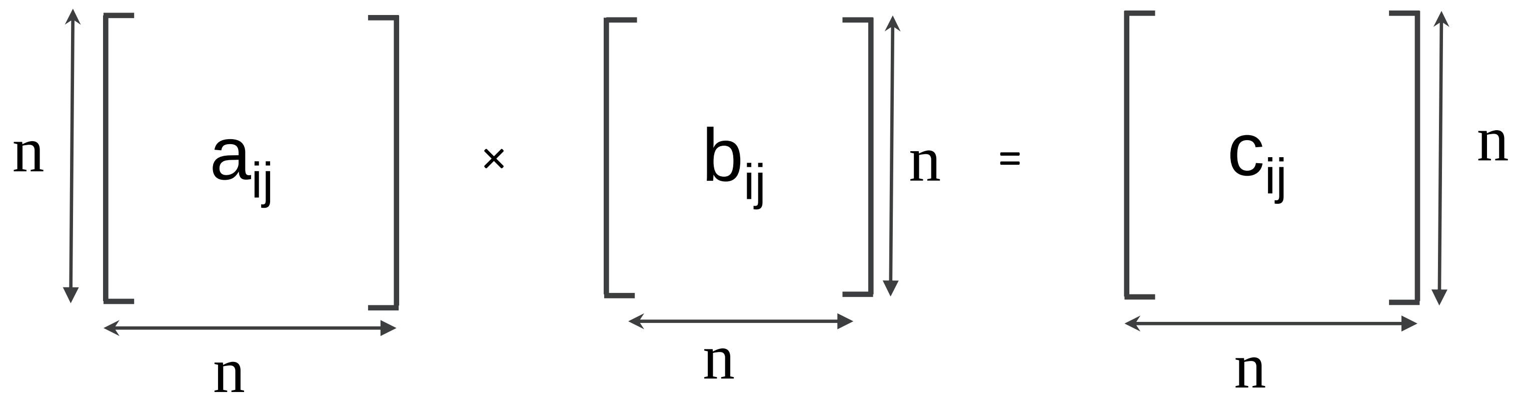
Quantum algorithms for string problems

文字列問題に対する量子アルゴリズム

Matrix Multiplication　行列積

Compute the product of two n x n matrices A and B

与えられた二つの n x n 行列 A と B の積を求める



One of the most fundamental computational tasks in science and engineering

理工学において、最も重要な計算問題の一つ

Trivial classical algorithm: $O(n^3)$ time

自明な古典アルゴリズム： $O(n^3)$ 時間

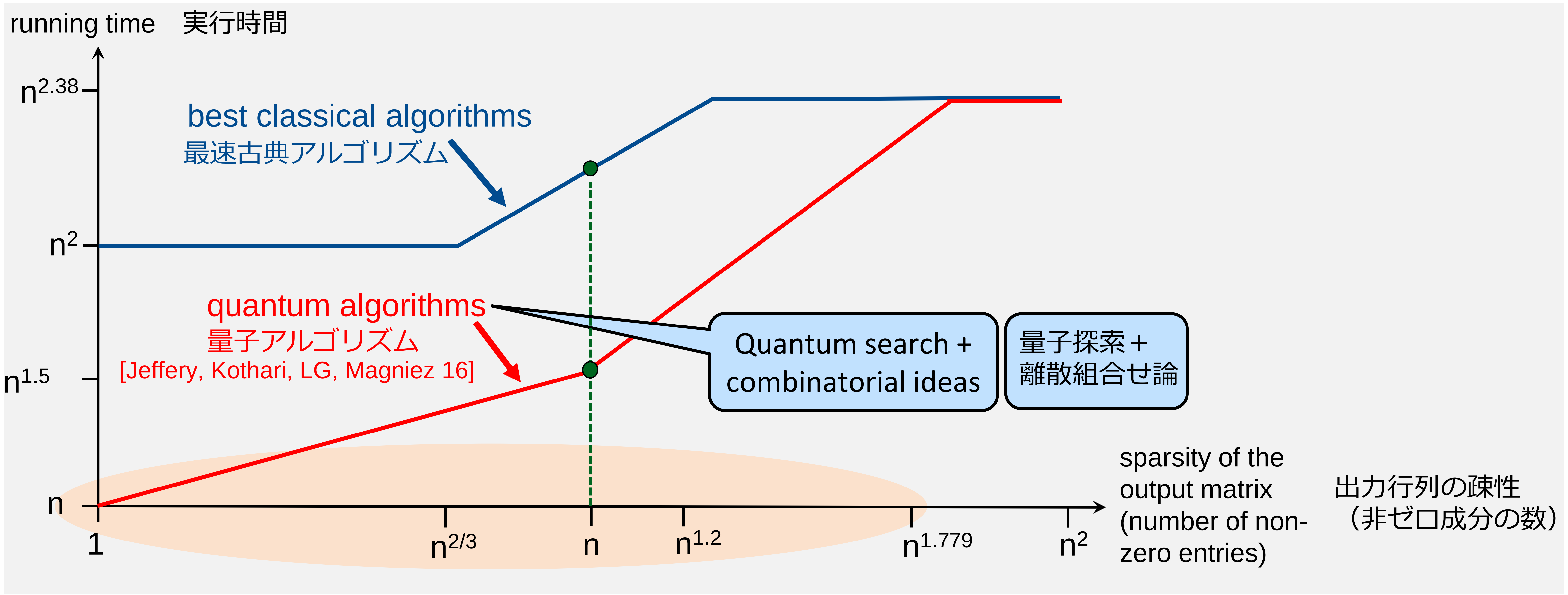
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{for all } 1 \le i \le n \text{ and } 1 \le j \le n$$

Best known classical algorithm: $O(n^{2.38})$ time [Coppersmith and Winograd 87]

最速の古典アルゴリズム： $O(n^{2.38})$ 時間 [Coppersmith and Winograd 87]

Quantum Algorithms for Matrix Multiplication
行列積に対する量子アルゴリズム

[LG 12] [Jeffery, Kothari, LG, Magniez 16] [Jeffery, LG 16]



Quantum advantage for large sparse matrices! ⇨ Quantum advantage for many graph problems

大きい疎行列の場合、量子優位性はある ⇨ 様々なグラフ問題に対する量子優位性

Outline of the Talk

本日の流れ

Quantum algorithms with provable advantage

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

Quantum algorithms for algebraic problems

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- Matrix multiplication
- Systems of linear equations (HHL algorithm)
- Quantum simulation (e.g., chemistry)
- Quantum optimization

- 行列積
- 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- 量子系のシミュレーション (例：化学)
- 量子最適化

Quantum algorithms for string problems

文字列問題に対する量子アルゴリズム

HHL Algorithm for System of Equations
1次方程式系のためのHHLアルゴリズム

[Harrow, Hassidim, Lloyd 09]

Input：

- ✓ an *n* x *n* matrix A (sparse and well-conditioned)
- ✓ a norm-1 vector b ∈ $\mathbb{C}^n$ (given as a quantum state |b⟩)

write $\mathrm{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}$ and $\bar{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}}{\|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}\|}$

solution of: Ax = b

Output:

An approximation of the quantum state $|\bar{\mathrm{x}}\rangle$

入力：

- ✓ *n* x *n* 行列 A（疎、well-conditioned）
- ✓ 単位ベクトル b ∈ $\mathbb{C}^n$（量子状態|b⟩として与えられる）

$\mathrm{x} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}$ と $\bar{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}}{\|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{b}\|}$ をおく

Ax = b の解

出力:

量子状態 $|\bar{\mathrm{x}}\rangle$ の近似

Theorem ([Harrow, Hassidim, Lloyd 09])

There is a quantum algorithm that computes a good approximation of $|\bar{\mathrm{x}}\rangle$ in time polynomial in log(n)

log(n) の多項式時間で $|\bar{\mathrm{x}}\rangle$ の良い近似を求める量子アルゴリズムが存在する

Classically, solving systems of linear equations requires O(n) time

古典では、１次方程式系を解くためにO(n)時間が必要

exponentially faster
指数的に速い

HHL Algorithm for System of Equations
１次方程式系のためのHHLアルゴリズム

[Harrow, Hassidim, Lloyd 09]

✓ Main issue: the solution is output as a quantum state
主な問題点: 解は量子状態として出力される

✓ Possible applications of the HHL Algorithm: estimate $\langle \bar{x}|M|\bar{x}\rangle$ for some operator M

"extract statistics about the solution x"

HHLの考えられる応用: オブザーバブルMに対して、 $\langle \bar{x}|M|\bar{x}\rangle$ の近似

"解 x の統計的な情報を引き出す"

Applications to quantum machine learning ?
量子機械学習への応用?

very promising but hard to analyze the performance
有望だが、性能の評価は難しい

Theorem ([Harrow, Hassidim, Lloyd 09])

There is a quantum algorithm that computes a good approximation of $|\bar{x}\rangle$ in time polynomial in log(n)
log(n) の多項式時間で $|\bar{x}\rangle$ の良い近似を求める量子アルゴリズムが存在する

Classically, solving systems of linear equations requires O(n) time
古典では、１次方程式系を解くためにO(n)時間が必要

HHL Algorithm for System of Equations
１次方程式系のためのHHLアルゴリズム

[Harrow, Hassidim, Lloyd 09]

✓ Main issue: the solution is output as a quantum state
主な問題点: 解は量子状態として出力される

“extract statistics about the solution x”

✓ Possible applications of the HHL Algorithm: estimate $\langle \overline{x}|M|\overline{x}\rangle$ for some operator M

“解 x の統計的な情報を引き出す”

HHLの考えられる応用: オブザーバブルMに対して、 $\langle \overline{x}|M|\overline{x}\rangle$ の近似

Applications to quantum machine learning ?
量子機械学習への応用?

very promising but hard to analyze the performance
有望だが、性能の評価は難しい

- performance on (large) real-data: need a large quantum computer
（大きい）実データに対する性能評価: 大きい量子コンピュータが必要
- theoretical investigations: there exist a few quantum machine learning algorithms with rigorous analysis … but most of them have been “dequantized” [Tang 19][LG 23]
理論的な解析: 性能が解析できる量子機械学習アルゴリズムは開発されたが、
ほとんどは優位性がないと最近明らかになった（脱量子化 [Tang 19][LG 23])

HHL Algorithm for System of Equations
1次方程式系のためのHHLアルゴリズム

[Harrow, Hassidim, Lloyd 09]

Needed: killer application

- ✓ Main issue: the solution is output as a quantum state
  主な問題点: 解は量子状態として出力される
  …bout the solution x”
- ✓ Possible applications of the HHL Algorithm: estimate $\langle \bar{x}|M|\bar{x}\rangle$ f… ome… erator M
  “解 x の統計的な情報を引き出す”

  HHLの考えられる応用: オブザーバブルMに対して、 $\langle \bar{x}|M|\bar{x}\rangle$ の近似

Applications to quantum machine learning ?
量子機械学習への応用?

very promising but hard to analyze the performance
有望だが、性能の評価は難しい

- <u>performance on (large) real-data</u>: need a large quantum computer
  （大きい）実データに対する性能評価: 大きい量子コンピュータが必要
- <u>theoretical investigations</u>: there exist a few quantum machine learning algorithms with rigorous analysis … but most of them have been “dequantized” [Tang 19][LG 23]
  <u>理論的な解析</u>: 性能が解析できる量子機械学習アルゴリズムは開発されたが、
  ほとんどは優位性がないと最近明らかになった（脱量子化 [Tang 19][LG 23])

Space-efficient Equation Solving
1次方程式系のためのメモリー容量削減

[Ta-Shma 2013]
[LG, Liu, Wang 2023]

Input： ✓ an n x n matrix A (sparse and well-conditioned)
✓ a norm-1 vector b ∈ $\mathbb{C}^n$ (given as a quantum state |b⟩)
✓ an index i ∈ {1,…,n}

Output： a good approximation of the i-th coordinate of the vector $x = A^{-1}b$

Theorem ([Ta-Shma 2013], [LG, Liu, Wang 2023]):

There exists a quantum algorithm that solves the above problem using O(log n) space and poly(n) time.
この問題を O(log n) 領域 かつ 多項式時間で解く量子アルゴリズムが存在する。

O(log n) qubitsのメモリー容量

exponentially improvement in the space requirements!

No o(n)-space poly(n)-time classical algorithm is known
o(n)領域 かつ 多項式時間で解く古典アルゴリズムは知られていない

メモリー容量に関する指数関数的な改善

Outline of the Talk　本日の流れ

Quantum algorithms with provable advantage

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

Quantum algorithms for algebraic problems

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- Matrix multiplication
- Systems of linear equations (HHL algorithm)
- Quantum simulation (e.g., chemistry)
- Quantum optimization

- 行列積
- 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- 量子系のシミュレーション (例：化学)
- 量子最適化

Quantum algorithms for string problems

文字列問題に対する量子アルゴリズム

Computational Quantum Chemistry 量子化学計算

Computing the ground state energy of a quantum system is hard even for quantum computers
量子多体系の基底エネルギーの計算は量子コンピュータに使っても困難である


[Kitaev 02]

Given a rough approximation of the ground state (e.g., using Hartree–Fock in quantum chemistry), the ground state energy can be estimated with high precision efficiently with a quantum computer
基底状態の粗い近似が与えられるとき（例： 量子化学の場合、Hartree–Fock法によって得られる近似）、量子コンピュータでは基底エネルギーを効率よく、高精度で計算できる

[Gharibian and LG 22]
[Cade, Folkertsma, Gharibian, Hayakawa, LG, Morimae and Weggemans 23]

Very promising application
量子コンピュータの有望な応用

result #1: computing the ground state energy with high precision is hard for classical computers
高精度での基底エネルギーの計算は古典コンピュータにとって困難である

result #2: computing the energy with constant precision can be done efficiently classically
定数精度での基底エネルギーの計算は古典コンピュータでも効率よくできる

⇨ This shows the superiority of quantum algorithms comes from the improved precision
量子優位性の理由は計算精度の向上にある

Computational Quantum Chemistry 量子化学計算

Provable quantum (exponential) advantage

Compu[illegible]tum system is hard even for quantum computers

量子多体系の[illegible]計算[illegible]子コンピュータに使っても困難である

[Kitaev 02]

Given a rough approximation of the ground state (e.g., using Hartree–Fock in quantum chemistry), the ground state energy can be estimated with high precision efficiently with a quantum computer

基底状態の粗い近似が与えられるとき（例： 量子化学の場合、Hartree–Fock法によって得られる近似）、量子コンピュータでは基底エネルギーを効率よく、高精度で計算できる

[Gharibian and LG 22]
[Cade, Folkertsma, Gharibian, Hayakawa, LG, Morimae and Weggemans 23]

Very promising application
量子コンピュータの有望な応用

result #1: computing the ground state energy with high precision is hard for classical computers
高精度での基底エネルギーの計算は古典コンピュータにとって困難である

result #2: computing the energy with constant precision can be done efficiently classically
定数精度での基底エネルギーの計算は古典コンピュータでも効率よくできる

➡ This shows the superiority of quantum algorithms comes from the improved precision
量子優位性の理由は計算精度の向上にある

Outline of the Talk

本日の流れ

Quantum algorithms with provable advantage

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

Quantum algorithms for algebraic problems

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- Matrix multiplication
- Systems of linear equations (HHL algorithm)
- Quantum simulation (e.g., chemistry)
- Quantum optimization

- 行列積
- 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- 量子系のシミュレーション (例：化学)
- 量子最適化

Quantum algorithms for string problems

文字列問題に対する量子アルゴリズム

Quantum Optimization　量子最適化

Theoretically guaranteed advantage
理論的保証付き優位性

- ✓ Search　探索
- ✓ Quantum walks 量子ウォーク
- ✓ Backtracking バックトラック

…

Heuristic　ヒューリスティック

- ✓ Quantum annealing　量子アニーリング
- ✓ Adiabatic algorithms　断熱量子計算
- ✓ QAOA
- ✓ VQA　変分量子アルゴリズム
- ✓ Quantum machine learning 量子機械学習

…

What about <u>convex optimization</u>?
<u>凸最適化</u>はどうなのか?

convex optimization, especially linear programs (LP) and semidefinite programs (SDPs) has a wide range of applications, rigorous guarantees, and can be solved efficiently by classical solvers

凸最適化（特に線形計画(LP) および半正定値計画(SDPs)）の応用は幅広く、理論もしっかりしていて、古典コンピュータで効率よく解くことはできる

Convex Optimization　凸最適化

n: number of variables　変数の数
ε: precision of the solution　解の精度

Best classical algorithm for SDPs　SDPを解く古典の最速アルゴリズム

$O(n^{2.5} (\log(1/\varepsilon))^5)$ [Jiang et al. 20]

Quantum algorithms for SDPs　SDPを解く量子アルゴリズム

$O(n (1/\varepsilon)^{18})$ [Brandao and Svore 16]

$O(n (1/\varepsilon)^{8})$ [van Aperdoon et al. 17]

$O(\sqrt{n} (1/\varepsilon)^{12})$ [Brandao et al. 18]

$O(\sqrt{n} (1/\varepsilon)^{5})$ [van Aperdoon and Gilyen 18]

Significant improvement if we are only need low precision

低い精度で良ければ、
計算時間の大きい改良が得られる

For huge systems (millions of variables) this can be the only way to get a rough approximation of the solution in reasonable time

大きいSDP(数百万変数)の場合、解の近似を効率よく求める唯一の方法かもしれない

Convex Optimization　凸最適化

n: number of variables　変数の数
ε: precision of the solution　解の精度

Best classical algorithm for SDPs　SDPを解く古典の最速アルゴリズム

$O(n^{2.5} (\log(1/\varepsilon))^5)$ [Jiang et al. 20]

Quantum algorithms for SDPs　SDPを解く量子アルゴリズム

$O(n (1/\varepsilon)^{18})$ [Brand and Svor 16]

$O(n (1/\varepsilon)^{8})$ [van Ape

$O(\sqrt{n} (1/\varepsilon)^{12})$ [Brandao et al. 1

$O(\sqrt{n} (1/\varepsilon)^{5})$ [van Aperdoon and Gilyen 18]

Potentially wide impact

Significant improvement if we are only need <u>low precision</u>

<u>低い精度で良ければ、</u>
計算時間の大きい改良が得られる

For huge systems (millions of variables) this can be <u>the only way</u> to get a rough approximation of the solution in reasonable time

大きいSDP(数百万変数)の場合、解の近似を効率よく求める<u>唯一の方法</u>かもしれない

Outline of the Talk

本日の流れ

Quantum algorithms with provable advantage

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

Quantum algorithms for algebraic problems

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- Matrix multiplication
- Systems of linear equations (HHL algorithm)
- Quantum simulation (e.g., chemistry)
- Quantum optimization

- 行列積
- 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- 量子系のシミュレーション (例：化学)
- 量子最適化

Quantum algorithms for string problems

文字列問題に対する量子アルゴリズム

Quantum String Algorithms　量子文字列アルゴリズム

Given two strings X and Y of length n, compute their similarity
二つの長さ n の文字列 X と Y の類似度の計算

example: file comparison　ファイルの比較 ⇐ length: several MB　長さ：数MB
DNA comparison　DNAの比較 ⇐ length: 3 billion　長さ：30億

How to define the similarity?　類似度の定義？

one standard definition
一つのメジャーな標準

length of the longest common substring　最長共通部分列の長さ

Best known classical algorithm: O(n) time (optimal)
最速の古典アルゴリズム: O(n) 時間 (最適である)

proved advantage　証明された優位性

Quantum algorithms: $O(n^{5/6})$ time [LG and Seddighin 23] ⇒ $O(n^{2/3})$ time [Akmal and Jin 23]
量子アルゴリズム: $O(n^{5/6})$ 時間 [LG and Seddighin 23] ⇒ $O(n^{2/3})$ 時間 [Akmal and Jin 23]

Quantum String Algorithms　量子文字列アルゴリズム

Given two strings X and Y of length n, compute their similarity
二つの長さ n の文字列 X と Y の類似度の計算

New topic in quantum algorithms

exam file co on　ファイルの比較 ⇐ length: several MB　長さ：数MB
NAの比較 ⇐ length: 3 billion　長さ：30億

y：類似度の定義？

on tandard on
一つのメジャ 標準

len of the longest common substring　最長共通部分列の長さ

Best known classical algorithm: O(n) time (optimal)
最速の古典アルゴリズム: O(n) 時間 (最適である)

proved advantage　証明された優位性

Quantum algorithms: $O(n^{5/6})$ time [LG and Seddighin 23] ⇒ $O(n^{2/3})$ time [Akmal and Jin 23]
量子アルゴリズム: $O(n^{5/6})$ 時間 [LG and Seddighin 23] ⇒ $O(n^{2/3})$ 時間 [Akmal and Jin 23]

Perspectives　終わりに

Quantum algorithms with provable advantage

優位性が理論的に保証される量子アルゴリズムの開発

Quantum algorithms for algebraic problems

代数的問題に対する量子アルゴリズム

- Matrix multiplication
- Systems of linear equations (HHL algorithm)
- Quantum simulation (e.g., chemistry)
- Quantum optimization

- 行列積
- 1 次方程式系 (HHL アルゴリズム)
- 量子系のシミュレーション (例：化学)
- 量子最適化

Quantum algorithms for string problems

文字列問題に対する量子アルゴリズム

Perspectives　終わりに

Most pressing questions:
最も喫緊な課題:

✓Find more applications of quantum computers, and especially more exponential speedups

量子コンピュータの新しい応用先の開拓
特に古典より指数的に速い量子アルゴリズムの開発が重要

✓Build theoretical foundations for the advantage of “quantum heuristic algorithms”

ヒューリスティックに基づく量子アルゴリズムにおいて、優位性の理論的基盤の創出

Thank you for your attention!
ご清聴ありがとうございました