

研究報告書

「幾何学的変分問題の解の大域解析とその応用」

研究期間：平成 20 年 10 月～平成 24 年 3 月

研究者：小磯 深幸

1. 研究のねらい

幾何学的変分問題の解(極小曲面、平均曲率一定曲面やその一般化)の存在と一意性、大域的性質及び安定性についての研究を行い、一般の変分問題に応用可能な一般的・普遍的な理論を構築する。さらに、この研究を生かして、等方的あるいは非等方的表面エネルギーを持つ物質の幾何学的性質について、物理化学、工学その他、数学以外の分野との協働を行う。これらにより、数学以外の分野の研究については、その数学的な基礎付けを与えると共に、数学的に厳密な視点を加えることにより、また、数学の一般理論を応用することにより、それらの分野の発展を図る。また、数学の研究においては、実際の「物」を見ることにより未解決問題解決のためのヒントを得ると共に、応用的な視点を加えることにより新たな課題を発見し、それを一般的・普遍的な理論に発展させることを目指す。

2. 研究成果

まず、研究対象について簡単に説明する。曲面に対する変分問題の解として古くから研究されているもののうち、極小曲面と平均曲率一定曲面(constant mean curvature surface。以下、CMC 曲面と略記する)がある。極小曲面は平均曲率が至る所 0 である曲面であり、CMC 曲面は平均曲率が至る所(0 とは限らない)定数の曲面である。前者は面積の臨界点、後者は「囲む体積が一定」なる付加的条件のもとでの面積の臨界点である。そのため、これらはそれぞれ、石鹸膜、シャボン玉の数学的抽象化と言われることがある。一方、たとえば結晶やある種の液晶のように異方性を持つ物質の形状については、エネルギーとして面積汎関数を考えるだけでは十分でなく、より一般の、たとえば、エネルギー密度が表面の法線方向に依存するような表面エネルギーを考えることが有効であると考えられる。曲面上の各点におけるこのようなエネルギーの曲面全体での和(積分)を非等方的表面エネルギーと呼ぶ。物理的にも自然な変分問題は、曲面についての、「囲む体積を変えない」変分に対する非等方的表面エネルギーの臨界点を研究することである。その解は非等方的平均曲率一定(constant anisotropic mean curvature。以下、CAMC と略記する)曲面と呼ばれるものになる。面積は非等方的表面エネルギーの特別な場合とみなせるため、CAMC 曲面は CMC 曲面の一般化となっている。一般に、変分問題の解は、対応するエネルギー汎関数の第 2 変分が非負である時に安定であるといわれる。特に、エネルギー極小解は安定である。物理的に実現されるのは安定な解だけであり、安定解について研究することは極めて重要である。さて、同じ体積を囲む閉曲面の中での非等方的表面エネルギーの最小解は Wulff 図形と呼ばれる凸曲面(または、その相似)となることが知られている。以下では、Wulff 図形が滑らかな狭義凸閉曲面であることを仮定する。この時、非等方的表面エネルギー密度関数を与えることと、Wulff 図形を与えることは、(Wulff 図形の平行移動を除き)同値である。

以下、得られた研究結果をいくつかの課題に分けて述べる。

(1) CAMC 閉曲面に対する一意性

CAMC 閉曲面に対する一意性の問題は、CAMC 曲面に関する基本課題であるだけでなく、近年学際的に取り上げられている非等方的平均曲率流方程式の解の極限を与える候補となるという意味でも重要である。本研究において、3次元ユークリッド空間内の種数0の CAMC 閉曲面は Wulff 図形またはその相似に限ることを証明した。なお、1以上の任意の整数 n に対して、種数 n の CMC 閉曲面の存在が知られているが、どのような非等方的表面エネルギー汎関数に対しても種数 n の CAMC 閉曲面が存在するか否かは未解決である。

(2) CAMC 曲面に対する自由境界問題

「与えられた曲面上に境界を持つ」という束縛条件のもとでの変分問題を、自由境界問題と呼ぶ。自由境界問題は、理論・応用の両観点から興味を持たれている。本研究では、平行な二平面（以下では支持平面と呼ぶ）上に自由境界をもち、これらの平面で囲まれる領域に埋め込まれた曲面に対する「非等方的表面エネルギー＋自由境界での濡れエネルギー＋曲面の境界の line tension」の臨界点について研究し、臨界点の幾何学的性質、安定性の判定法、安定解の存在と非存在、他の結果を得た。主な結果は次のものである。Wulff 図形が支持平面に垂直な直線を回転軸とする回転面であり、line tension が非負の場合には、最大値原理の応用により、自己交差をもたない臨界点は Wulff 図形と同じ軸を持つ回転面となることを証明した。さらに、より一般に、Wulff 図形が支持平面に平行で互いに相似な閉曲線族より成るという仮定のもとで、line tension が正の場合にはシュワルツ対称化が適用できることを証明し、このことを用いて、臨界点の安定性を判定する方法を得た。

(3) CAMC 超曲面に対する分岐理論

上述の変分問題は、ユークリッド空間内の超曲面に対して一般化される。本研究では、ユークリッド空間内の境界を持つコンパクト CAMC 超曲面の分岐、及び、分岐後の超曲面の安定性の判定についての研究、分岐による解の対称性の崩壊についての研究を行った。

まず、与えられた境界条件を満たすコンパクトな CAMC 超曲面全体を考えた時、非等方的平均曲率または囲む体積をパラメータとして、解の分岐が起こるための十分条件を得た。これは、非等方的表面エネルギー汎関数の第2変分に付随する2階楕円型線形作用素に対する固有値問題の固有値の性質、及び、零固有値に属する固有関数の性質により判定される。本研究では、分岐点における零固有値の重複度が1という仮定の下で研究成果を得た。

解の分岐が起こるとき、分岐した解の安定性（境界条件と体積を保つ変分に対する、非等方的表面エネルギーの第2変分が非負であるか否か）の判定が問題となるのは、エネルギー汎関数の第2変分に付随する固有値問題の第2固有値が零の時である。この零固有値の重複度が1である場合について、分岐解の安定性の判定条件を得た。すなわち、いわゆる「pitchfork 分岐」が起こることを証明した。さらに、もとの解族に属する各解が対称性を持つ場合に、分岐族に属する解の対称性が崩壊する可能性についても結果を得た。

例として、3次元ユークリッド空間内の CMC 回転面であって、回転軸に垂直な平面に対して対称であり、面積の第2変分に付随する固有値問題が零固有値をもつものからの、解の分岐について研究した。とりわけ重要な場合である、第2固有値が0であり、かつ安定なものからの解の分岐を重点的に調べ、pitchfork 分岐及び対称性の崩壊が起こることを示した。このような

pitchfork 分岐の存在についてはこれまでも数学や数学以外の研究者による類似の結果が知られていたが、その方法は、既存の分岐理論を応用した複雑な計算を要するものであるか、または、厳密でないかのいずれかであった。本研究では、無限次元空間上の陰関数定理及び問題の幾何的性質を巧みに応用することにより、幾何学的にも明快な証明を得た。

また、支持曲面上に自由境界を持つ CAMC 超曲面に対する分岐の存在と安定性についても同様の結果を得た。その応用として、「平行な二平面上に自由境界を持つ自己交差を持たない CMC 曲面であって安定なものは、半球面と短い円柱に限る」(M. Athanassenas, T. I. Vogel, 1987)という既知の結果の簡明な別証明を得た。さらに、数値計算を援用することにより、エネルギーが非等方的な場合には unduloid 型の安定解が現れる可能性があることを示した。

(4) 円を張る種数0の安定な CAMC 曲面の決定

Wulff 図形が回転面である場合について、3次元ユークリッド空間内の Wulff 図形の回転軸に垂直な平面内の円周を境界とする種数0の CAMC 曲面で安定なものは、Wulff 図形または平面の一部のみであることを証明した。

3. 今後の展開

(1) CAMC 超曲面に対する分岐理論の応用

上述の分岐についての結果を、さまざまな、主としてミクロ・マクロスケールの物理現象に応用し、それらについての物理的な説明に対する数学的な基礎付けを与える。そこでは、上述の一般論を具体例に応用して安定解の形状を決定することになるが、応用に際しては計算機援用が有用となる可能性がある。

(2) CAMC 超曲面に対する分岐理論の発展

上述の分岐についての研究では、分岐点において、エネルギー汎関数の第2変分に付随する固有値問題の第2固有値が重複度 1 の零固有値を持つということを仮定した。零固有値の重複度が2以上の場合について、解の分岐の幾何学的な構造及び安定性を決定することは、今後の課題である。

(3) 物理現象を記述する新しい発展方程式の導出と解析

たとえば微小な液体が徐々に蒸発していく時の液体の形状は、時として不連続に変化するように見える。このような、パラメータ(例えば体積や濡れエネルギー係数)の連続的な変化に対して不連続に変化する安定解を記述する発展方程式を導出し、適切な境界条件のもとで安定性や幾何学的性質を解析することは、理論・応用の両観点から重要であると思われる。純粋数学としては、従来以上に幾何学と解析学の境界分野としての発展性があり、また、さまざまな物理現象への応用という観点からも有望であると期待している。

4. 自己評価

「研究成果」で述べたように、極小曲面や平均曲率一定(CMC)曲面の一般化である非等方的平均曲率一定(CAMC)曲面についての研究を行い、円を張る種数0の安定な CAMC 曲面の一意性を証明し、CAMC 曲面に対する「非等方的表面エネルギー+自由境界での濡れエネルギー

「+曲面の境界の line tension」の臨界点の幾何学的性質・安定性の判定法・安定解の存在と非存在についての結果を得た。ここでは、エネルギー汎関数や境界条件について、物理学や工学等の研究に鑑みて自然な条件設定を行うことにより、さまざまな数学的研究成果を得ることができた。また、種数0の CAMC 閉曲面を決定し、学際的に重要な非等方的平均曲率流方程式の研究にも貢献することができた。さらに、CAMC 超曲面に対する分岐理論を構築し安定性の判定条件を得たが、その方法は、CAMC 超曲面に限らず、解が、局所的に(線形とは限らない)楕円型方程式の解となるような変分問題に対して一般化できる結果であり、さまざまな物理現象への応用が可能である。また、まだ公開できるだけの成果を得るには至っていないが、「今後の展開」で述べたように、物理現象を記述する新しい発展方程式の導出と解析についての研究を、物理学及び工学分野の研究者との協働により開始した。さらに、物理学者との協働により新しい数学的方法を提案し、応用数学者との協働により従来知られていなかった研究成果をもたらしたということも追記しておきたい。以上により、本研究の当初の目標は十分に達せられたと自己評価する。

5, 研究総括の見解

シャボン玉、石けん膜にみられる曲面は面積最小にするものとして良く知られているが、小磯氏は液晶などのように非等方的表面エネルギーの場合も含めた非等方的平均曲率一定曲面(CAMC曲面)の一意性、自由境界問題さらにCAMC超曲面の分岐問題などについて厳密な結果を得たことは大いに評価できる。とりわけ超曲面の分岐問題においてエネルギー汎関数の第2変分を詳細に調べ、pitchfork 分岐の存在証明を得たことは興味深い。さらにより一般の分岐も含めた体系化が望まれる。物理学者であるさきがけ研究者との協働も進めており、今後その発展が大いに期待される。

6, 主な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic Surface Energy, Proceedings of the 16th OCU International Academic Symposium 2008 “Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization”, OCAMI Studies Volume 3, Osaka Municipal University Press (2010), pp.105-117.
2. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf's Theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, Indiana University Mathematics Journal 59-1 (2010), pp.79-90.
3. Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Equilibria for anisotropic surface energies with wetting and line tension, Calculus of Variations and PDE's 43-3 (2012), pp.555-587.

(2)特許出願

なし

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物等)

学会招待講演

- [1] Miyuki Koiso, Pitchfork bifurcation for hypersurfaces with constant mean curvature, The 10th Pacific Rim Geometry Conference 2011 Osaka-Fukuoka, (December 1–5, 2011, Osaka City University, December 7–9, 2011, Kyushu University), December 7, 2011.
- [2] Miyuki Koiso, Stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature and applications to physical phenomena, III Encontro Paulista de Geometria (San Paulo, Brazil, August 8–12, 2011), August 9, 2011.
- [3] Miyuki Koiso, Stability of hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature and its applications, Spanish-Japanese Workshop on Differential Geometry (グラナダ大学, スペイン, February 14–18, 2011), February 14, 2011.
- [4] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature and their generalizations, 16th School of Differential Geometry (San Paulo, Brazil, June 12–16, 2010), June 13, 2010.
- [5] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature and their generalizations, Oberwolfach workshop “Progress in Surface Theory”, (Oberwolfach, Germany, May 2–8, 2010), May 6, 2010.
- [6] Miyuki Koiso, Bifurcation and stability for solutions of isoperimetric problems, Isoperimetric problems, space-filling, and soap bubble geometry (March 19, 2012 – March 23, 2012, ICMS (International Center for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK), March 19, 2012.
- [7] 小磯深幸, 等周問題型変分問題の幾何解析, 2012(平成 24)年 3 月 26 日, 日本数学会 2012 年度年会(東京理科大学), 企画特別講演.