

「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」研究領域 領域活動・評価報告書

—平成 22 年度終了研究課題—

研究総括 西浦 廉政

1. 研究領域の概要

本研究領域は、数学者が社会的ニーズの高い課題の解決を目指して、諸分野の研究者と協働し、ブレークスルーの探索を行う研究を対象とする。謂わば21世紀におけるデカルト流の数学的真理とベーコン流の経験則の蓄積との統合を目指すものである。

諸分野の例として、材料・生命・環境・情報通信・金融などが想定されるが、社会的ニーズに対応した新しい研究課題の創出と解決を目指すものであればこの限りではない。

諸分野の研究対象である自然現象や社会現象に対し、数学的手法を応用するだけでなく、それらの数学的研究を通じて新しい数学的概念・方法論の提案を行うなど、数学と実験科学の融合を促進する双方向的研究を重視する。

2. 研究課題・研究者名

別紙一覧表参照

3. 選考方針

選考の基本的な考えは下記の通り。

- 1) 選考は「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」領域に設けた選考委員 13 名の協力を得て、研究総括が行なう。
- 2) 選考方法は、書類選考、面接選考及び総合選考とする。
 - ・書類選考において 1 提案につき 3 名の選考委員が査読評価を行なう。
 - ・選考委員の所属機関と応募者の所属機関が異なるよう配慮し、書類選考は利害関係者を査読対象とせず、面接選考において利害関係者は席を外して実施する。
 - ・面接選考では可能な限り多くの研究提案を直接聴取し、質疑応答する。
- 3) 選考に当たっては、研究構想、計画性、課題への取り組みなどの観点のほか、諸分野とのつながりを具体的にどのように実現させるのか、その姿勢や他の助成金等ではできない斬新な取り組みを重視した。

4. 選考の経緯

一応募課題につき領域アドバイザー・外部評価者 3 名が書類審査し、書類選考会議において面接選考の対象を選考した。続いて、面接選考および総合選考により、採用課題を選定した。

選 考	書類選考	面接選考	採用課題数
対象課題数	169 件	25 件	12 件

5. 研究実施期間

平成 19 年 10 月～平成 23 年 3 月

6. 領域の活動状況

領域会議: 7 回

成果報告会: 1 回

研究総括(または技術参事)の研究実施場所訪問:

平成 19 年秋～平成 21 年にかけて研究者の研究拠点を訪問し、研究環境・設備等の確認および研究計画のヒアリング、学長、組織責任者などへさがけ事業と当領域の意義を説明し、機関に対する協力依頼などを実施した。また、研究者の異動に対しては、適宜訪問して同様の取組みを行なうと同時に、研究継続に必要な支援等を検討した。

領域独自活動の展開:

当領域では、諸分野をつなぐコーディネータの育成にも寄与することを強く期待しており、数学の重要性と諸分野とのつながりを一般に理解していただくためのアウトリーチ活動として、「さがけ数学塾」および「さき

「さきがけ数学キャラバン」を研究者主体により開催した。

さきがけ数学塾:3 回(主に大学生を対象。H21.3.7-9、H22.3.8-10、H23.3.7-9)

さきがけ数学キャラバン:1 回(主に高校生を対象。H23.2.20、山形大学理学部にて開催)

7. 評価の手続き

研究者の作成した研究報告書および自己評価を基に、年 2 回の領域会議における経過報告および討議内容、領域アドバイザーの意見、さらに成果報告会(公開)での評価を参考にして研究総括が総合評価を行なった。

(評価の流れ)

平成 22 年 7 月 第 6 回領域会議(総括・アドバイザーによる進捗評価とアドバイス)

平成 23 年 2 月 第 7 回領域会議(総括・アドバイザーによる進捗評価とアドバイス)

平成 23 年 2 月 成果報告会開催(一般参加者および総括・アドバイザーによる評価)

平成 23 年 3 月 研究期間終了(11 件*)

平成 23 年 3 月 研究報告書提出

平成 23 年 3 月 研究総括による評価

* 注)平成 19 年度採用課題 12 件のうち 1 件は研究者の逝去(田中ダン研究者)により研究中止となった。

8. 評価項目

- (1)研究計画書の目標に対する研究課題の達成度
- (2)得られた研究成果の科学技術への貢献、諸分野との協働実績
- (3)外部発表(論文、口頭発表、特許)など研究成果の発信状況
- (4)数学への理解増進のため一般や他の諸分野に対する働きかけ

9. 研究結果

当領域では、数学を深化させ、結果として他分野の伏流水となるもの、また材料・生命・医療・環境・情報・交通・金融を含む様々な分野とのつながりを意識し、新たな切り口を開拓しようとする意欲的な研究課題が採択されている。今回終了する 11 名の研究者は、ほぼ全員が異分野とのしっかりとしたつながりを持っており、研究者やアドバイザーとの活発な議論を通じて、いずれの研究に関しても、非常にレベルが高く、ブレークスルーの探索という領域名に相応しい斬新な成果が得られたものと判断できる。これらの研究を契機に、各研究者が一層大きく飛躍するとともに、基礎研究に留まることなく諸分野との協働を推し進めて広がっていくものと期待している。

「数学と計算機科学の連携による数理モデルの大域的計算理論」(荒井迅研究者)

微分方程式や写像などの力学系で表現される数理モデルを解析するための、メモリ圧縮技術に即した計算理論の新たなアルゴリズムを開発し、大幅な計算の効率化をはかることが出来た。また、このアルゴリズムにより高次元複素力学系のモノドロミー計算が可能となり、さらに大域計算のメモリ圧縮を研究する過程において、メモリ消費量などの大域的計算の困難さを測る量と、その力学系の複雑さとの間に非自明な関係があることも発見され、この分野に大きく貢献した。

「ウェーブレットフレームを用いた視覚の数理モデル」(新井仁之研究者)

脳が行う視知覚に関する情報処理の数理モデルを研究対象とし、新たな視覚の数理的研究の基盤として「かざぐるまフレームレット」を構成した。これにより、従来の方法ではなしえなかった幾何学的錯視の構造を明らかにすると同時に、各種錯視画像に対して成分の抽出や錯視量の制御が初めて可能となった。これらは新しいフレームの一つを提案したものとして、純粋数学的な立場からも大きな意義があると同時に、今後は数学からの脳科学への大きな貢献も期待される。

「水圏環境力学理論の構築」(坂上貴之研究者)

身近な水圏環境(河川・湖沼・海洋)で起こる問題に対して統一的に扱える数学理論へ水圏環境力学への構築を目指し、二次元多重連結領域の複雑な形状やその内部障害物の配置が自由に扱えるような理論構築を行なうことができた。また適用範囲の拡大により、水圏環境問題のみならず「渦・境界相互作用」というキーワードで、生命流体・スポーツ力学・エコデザインなどにも応用できることが判明し、今後は大きく期待される。

「臨床医療診断の現場と協働する数理科学」（水藤寛研究者）

数理科学と臨床医学の協働により、双方の研究に関して実質的な進展をもたらすことを目指し、大きな成果を挙げた。具体的には大動脈内血流解析、脳脊髄液流動解析、造影剤濃度の時系列データを用いた灌流解析などを取り上げ、シミュレーション手法の開発ならびに、臨床医学的に重要な知見を得ることができた。とりわけ大動脈血流解析では、形態からは判定し難い動的量の可視化に成功し、臨床現場と数学との橋渡しをなし得た貢献は大きい。今後は臨床医学に対する数理科学の貢献を実現するために、より多数の臨床データを用いた検証を通してその詳細を解明していくことが望まれる。

「科学工学モデルの安定性に関する計算機援用解析」（長藤かおり研究者）

「安定性」というキーワードのもとに、当初目標に掲げた3つの研究テーマ(Ⅰ)非圧縮粘性流体の安定性問題、(Ⅱ)反応拡散方程式系の解の安定性解析、(Ⅲ)Schroedinger作用素のスペクトル解析、に取り組み、それぞれにおいて精度保証に基づく計算機援用証明を実施し、新たな知見を得ることに成功した。

「保険型金融商品のリスク分散メカニズムの解明」（中野張研究者）

保険型の金融商品のリスク分散構造の理解を目指し、最適な安全割り増しおよび保険集団化によるリスク分散を実現する、リスク分配・共有型のプレミアム算出原理の開発と、リスク分散構造を持つ金融商品の最適設計を行った。とりわけこれまで考慮されていなかった市場価格の変動および投資機会も組み入れたものになっておりただちに実装可能となった点は評価できる。

「自己組織化としての皮膚バリア機能の数理解析」（長山雅晴研究者）

(1)細胞間カルシウムイオン伝播モデルの構成と局在化の再現、(2)細胞ダイナミクスモデルの構成、(3)統合モデルの構成と数値シミュレーション、により角層形成の数理解析モデル化を行なった。数理解析モデル化と実験グループとの協働により、数理科学的視点からカルシウムイオンの局在化とその伝播が角層の恒常性維持機構と角層破壊からの早期回復機構の本質的であることが明らかにされた。皮膚科学への数理からの貢献の第一歩として期待される。

「輸送と渋滞に関する諸現象の統一的解析と渋滞解消」（西成活裕研究者）

車だけではなく、人やアリ、インターネットなど「流れや輸送に伴う渋滞」を最新の数理科学を用いて抽象化し統合的な研究を行なった。現実のデータや新たな実験結果を厳密な数理を用いて解析することにより、結果の信頼性や高精度化を図るとともに、具体的な「車・人・在庫物流」の諸問題について渋滞予測や解消方法を提案することに成功した。より広く社会システムの数理的デザインという立場から今後の発展が期待される。

「『計算機システムの科学』のための数学」（蓮尾一郎研究者）

主に圏論を用いて定式化した代数・余代数の理論を用いた研究を行い、数学による抽象化と新たな設計・検証手法の創発、およびシステムのモジュラーな設計・検証に対する数学的基礎付けと新展開を得ることができた。これにより、計算機システムに対する数学的アプローチの有用性における実証・発展に貢献した。

「離散アルゴリズムに対する品質保証技術」（牧野和久研究者）

離散アルゴリズムに対する品質保証の開発に重要な離散構造の解明とそのための解析手法の確立を目指し(1)単調論理関数の双対化(2)オンラインナップサック問題等の重要な課題に対して大きく進展させた。Berge アルゴリズム+発見的方法の実用性を明らかにし、NP 困難性とも関連している点は興味深い。今後のアルゴリズム分野の基礎理論への貢献が期待される。

「確率過程の統計推測法の基礎理論およびその実装」（吉田朋広研究者）

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論、確率数値計算および半解析的方法による期待値の近似、種々の近似法のオプションやリスク評価への応用を課題とし、確率過程の統計推測理論、漸近分布論、保険数理・ファイナンスへの応用を包括的に研究するとともに、ソフトウェアの実装研究を行なった。

10. 評価者

研究総括 西浦 廉政 北海道大学 教授

領域アドバイザー氏名(五十音順)

赤平 昌文	筑波大学 理事／副学長
池田 勉	龍谷大学 教授
織田 孝幸	東京大学 教授
小田 忠雄	東北大学 名誉教授
小野 寛晰	北陸先端科学技術大学院大学 特別招聘教授
高橋 理一	(株)コンボン研究所 取締役
津田 一郎	北海道大学 教授
長井 英生	大阪大学 教授
宮岡 礼子	東北大学 教授
山口 智彦	(独)産業技術総合研究所 副部門長

(参考)

(1) 外部発表件数

	国 内	国 際	計
論 文	12	63	75
口 頭	90	70	160
その他	18	0	17
合 計	120	133	253

※平成 23 年 3 月現在

(2) 特許出願件数

国 内	国 際	計
5	0	5

(3) 受賞等

- ・新井 仁之
文部科学大臣表彰 科学技術賞(研究部門) (H20.4)
- ・西成 活裕
日本応用数理学会 論文賞(応用部門) (H22.9)
- ・牧野 和久
文部科学大臣表彰 若手科学者賞 (H20.4)
第 9 回 船井学術賞 (H22.4)
- ・吉田 朋広
第 14 回 日本統計学会賞 (H21.9)

(4) 招待講演

国際 27 件

別紙

「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」領域 研究課題名および研究者氏名

研究者氏名 (参加形態)	研究課題名 (研究実施場所)	現職 (応募時所属)	研究費 (百万円)
荒井 迅 (兼任)	数学と計算機科学の連携による数理解析モデルの大域的計算理論 (北海道大学)	北海道大学創成研究機構 特任助教 (京都大学 助教)	28
新井 仁之 (兼任)	ウェーブレットフレームを用いた視覚の数理解析モデル (東京大学)	東京大学大学院数理科学研究科 教授 (同上)	16
坂上 貴之 (兼任)	水圏環境力学理論の構築 (北海道大学)	北海道大学大学院理学研究院数学部門 教授 (同上 准教授)	25
水藤 寛 (兼任)	臨床医療診断の現場と協働する数理解析科学 (岡山大学)	岡山大学大学院環境学研究科 教授 (同上 准教授)	29
長藤 かおり (兼任)	科学工学モデルの安定性に関する計算機援用解析 (九州大学)	九州大学大学院数理学研究院数理科学部門 准教授 (同上)	28
中野 張 (兼任)	保険型金融商品のリスク分散メカニズムの解明 (東京工業大学)	東京工業大学大学院イノベーションマネジメント研究科 准教授 (大阪大学 特任助教)	6
長山 雅晴 (兼任)	自己組織化としての皮膚バリア機能の数理解析 (金沢大学)	金沢大学理工学研究域数物科学系 教授 (同上 准教授)	27
西成 活裕 (兼任)	輸送と渋滞に関する諸現象の統一的解析と渋滞解消 (東京大学)	東京大学先端科学技術研究センター 教授 (同上大学院 准教授)	47
蓮尾 一郎 (兼任)	「計算機システムの科学」のための数学 (京都大学)	京都大学数理解析研究所 助教 (同上)	17
牧野 和久 (兼任)	離散アルゴリズムに対する品質保証技術 (東京大学)	東京大学情報理工系研究科数理情報学専攻 准教授 (同上)	40
吉田 朋広 (兼任)	確率過程の統計推測法の基礎理論およびその実装 (東京大学)	東京大学大学院数理科学研究科 教授 (同上)	38

研 究 報 告 書

「数学と計算機科学の連携による数理モデルの大域的計算理論」

研究期間：平成 19 年 4 月～平成 23 年 3 月

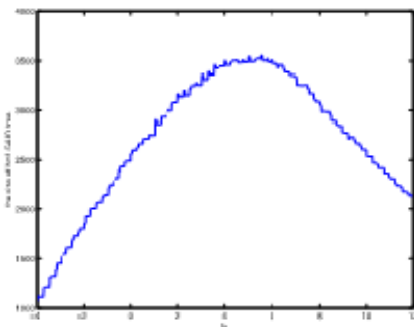
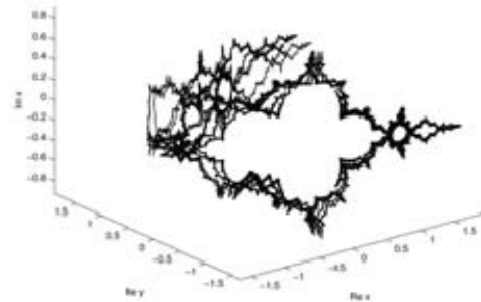
研 究 者：荒井 迅

1. 研究のねらい

微分方程式や写像などの力学系で表現される数理モデルを解析するための、新たなアルゴリズムを開発することが本研究のねらいである。周期軌道の分岐解析など、一般的に数理モデルの解析に使われてきた手法と異なり、力学系の大域的な構造をグラフを用いて組合せ的に表現し、そのグラフの構造をグラフ理論や計算ホモロジー理論などの道具を駆使して解析するという新たな手法を取ることで、大域的な構造を自動的、かつ数学的に厳密にとらえる事が出来るアルゴリズムの開発を目指した。

2. 研究成果

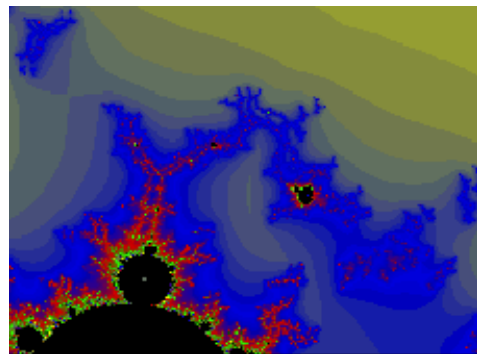
研究の柱である、大域的な計算理論のアルゴリズムの開発という面では、計算機科学で近年盛んに研究されている Succinct Binary Tree などのメモリ圧縮技術に即した計算アルゴリズムを開発することで、大幅な計算の効率化をはかることが出来た。これにより、右図のような高次元複素力学系のジュリア集合など、従来は次元の高さが問題となって大域的計算が行なえていなかった力学系に対しても本研究の手法を用いることが出来るようになり、複素力学系理論の進展に貢献することができた。



また、大域計算のメモリ圧縮を研究する過程において、メモリ消費量などの大域的計算の困難さを測る量と、その力学系の複雑さとの間に非自明な関係があることが見出された。例えば力学系の位相的エントロピーに対して、その力学系の大域的な構造を計算するために必要なデータの情報エントロピーが左図のように山形の関数をなす現象が観察された。これは圧縮技術を理論に導入して初めて明確になった問題である。この観察を元に、記号力学系の場合には系を定義するのに必要な情報エントロピーと位相エントロピーの

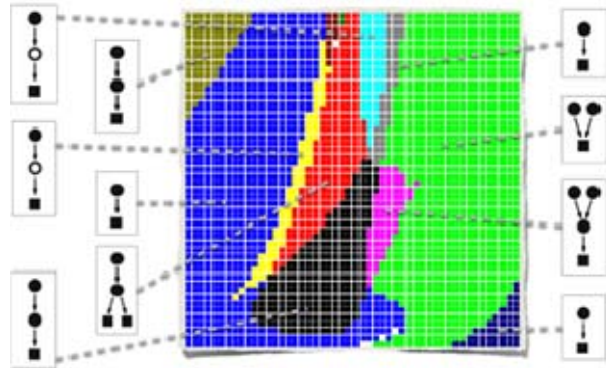
間に明確な関係があることを証明することが出来た。異なる文脈ではあるが、複雑性とエントロピーの関係は従来から複雑系理論において考察されてきたテーマであり、本研究の結果はこの問題に新たな視点を与えるものである。

本研究で開発された構造安定性証明アルゴリズムを応用して、高次元複素力学系のモノドロミーの計算が行なえることも示された。線形常微分方程式のモノドロミー理論とは異なり、カオス的な力学系を扱う場合には解空間は線形構造のような構造は持たないフラクタル集合であり、またこの場合は特異点も一点ではなくマンデルブロ集合のようなフラクタル集合になる。例えば右図は複素エノン集合のパラメータ空間であるが、ここ



で特異点に対応するのはマンデルブロ集合のコピーのように見える黒い集合で、この中には無限個の軌道の特異点がフラクタル状に含まれている。このような場合、モノドロミーの計算は解析的な手法では困難である。そこで、本研究の大域計算アルゴリズムを用いて、パラメータを変化させながら解の挙動を厳密に評価し、モノドロミーを計算するアルゴリズムを開発した。例えば解空間がフラクタルな構造を持つため、個々の軌道の挙動を追いかけてもモノドロミーは求まらず、本研究のように不変集合全体の大域的な構造を追跡して初めてこのようなアルゴリズムが得られた。これにより、例えば複素エノン写像のパラメータ空間の位相的な構造が低次元複素力学系の場合と大きく異なることがわかり、高次元複素力学系理論の進展が得られた。

また、本研究の具体的な数理モデルへの応用を探る過程で、力学系理論で標準形に用いられている構造安定性の概念が応用には使いにくいことが次第に判明してきた。これは力学系が構造安定となるパラメータが系のパラメトリゼーションによってはほとんど存在しないことが様々な系での計算を通じてわかってきたことや、構造安定性の鍵となる一様双曲性の強さと証明に必要な計算量の関係の評価から得られた考察である。またそもそも、具体的な応用においてはそもそも得られるデータへのノイズ混入が避けられず、そのような状況では全ての軌道の無限小構造まで見る構造安定性の概念がそのままでは意味を持たないということも理由である。そこで、より大域計算に適した、計算しやすい安定性概念を追求するなかで、京都大学の國府寛司教授や Rutgers 大学の Konstantin Mischaikow 教授らと共同でコンレイ・モースグラフという概念を開発した。これは、力学系を離散化して得られる有向グラフから、強連結成分を一点に潰すことで不要な情報を削除し、力学系の勾配的な構造だけに着目した情報を引き出したものである。ただし、このままでは情報が落ちすぎなので、潰した各強連結成分において対応する不変集合のコンレイ指数を計算し、この情報は残す。このように力学系の構造をグラフで表現することにより、グラフ表現の安定性を議論することが出来るようになった。すなわち、コンレイ・モースグラフのグラフとしての構造と、各頂点の持つコンレイ指数が同型である場合には、今見ている離散化グリッドのレベルでは力学系の構造は安定であると見なすのである。ノイズのある系に対しても、最初に力学系を離散化してグラフを構成する段階で軌道像にノイズの大きさに対応するマージンを持たせることでノイズを吸収できる。ノイズの影響は最初の離散化の段階にしか入らないため、以降の解析は決定論的な力学系と完全に平行に出来るというメリットがある。このコンレイ・モースグラフを用いて非線形レスリー写像という人口予測モデルのパラメータ空間の構造を調べたものが右の図である。



3. 今後の展開

まずは本研究で開発した力学系の大域計算アルゴリズムを、同様な方向性を模索している他の研究グループに提供し、そこからフィードバックを得てさらにアルゴリズムの改良を進めたい。たとえば本領域内でいえば、國府 CREST における計算とは重なる部分が多いので、本研究の成果を提供して研究の進展をはかりたい。同時にメモリ圧縮など、さきがけ期間に進めた研究についても、計算機科学の研究者と連携してさらなる改良を進める。

計算の効率化を研究する過程で遭遇した複雑性とエントロピーの関係の問題については、同様の問題を複数の切り口から検討することが肝要だと考える。関連する研究としては本領域アドバイザーの津田教授を初めとする複雑系理論の研究者の仕事もあり、また確率論的アプローチやアルゴリズムの複雑性の観点からのアプローチも考えられる。大域計算理論という具体的な計算アルゴリズムを中心にこれらのアプローチの相互の関係を整理することで、新たな進展が得られると期待される。

具体的な数理モデルへの応用としては、北大電子研の小松崎教授らと共同で、化学反応論における反応障壁のダイナミクスの解析に本研究の手法を応用する試みが初まっており、まずはこの方面の応用を追求したい。それ以外にも、グループリーダーとして参加する坂上CRESTにおいては、流体力学への本研究の応用も進める。ここでは、セルオートマトンや離散モース理論など、さきがけ研究では扱わなかったより広い枠組みへの応用も進める。

また、さきがけ研究の期間では十分に達成できなかった、プログラムへの使いやすいインターフェースの開発や、ドキュメントの整備も今後の課題として取り組んでいきたい。

4. 自己評価

理論的な側面においては、さきがけ研究開始時の方向とは少し異なるものの、一定の成果を得られたといえる。さきがけ当初は研究の中心に据えていた構造安定性理論が一般の数理モデルへの応用においては使い勝手が悪いことが次第に判明し、新たな方向性を模索することとなったが、その結果コンレイ・モースグラフ理論などの、新しい安定性概念を見出すことが出来、応用の可能性を広げることができた。応用を指向した研究から力学系理論自体へのフィードバックも得られたのも成果だといえる。また、メモリ圧縮の研究過程において遭遇した複雑さとエントロピーの関係の問題や、モノドロミー研究が代数多様体や群論の問題と繋がるといった、隣接分野とのエキサイティングな関係が生まれた事も予想以上の成果であった。諸分野の連携というよりは、力学系内部の問題意識になってしまいが、複素力学系の長年の課題であるハバード予想についての進展が得られたことも大きい。

いっぽう、具体的な諸分野の数理モデルへの応用や、またより広い応用を促進するためのインターフェース開発などは達成度が当初の予定よりも低い。原因としては、具体例の解析においてより強力なツールを開発するために、安定性の概念に立ち戻って理論を再構築し直すといった基礎的な作業に集中的に取り組んだため、応用が立ち後れたといえる。ただし、諸分野の研究者と応用の可能性を議論する中で、今後の発展に必要な問題点はだいぶ洗い出せたので、この意味で応用に向けた進展は得られた。

5. 研究総括の見解

微分方程式や写像などの力学系で表現される数理モデルを解析するための、メモリ圧縮技術に即した計算理論の新たなアルゴリズムを開発し、大幅な計算の効率化をはかることが出来た。また、このアルゴリズムにより高次元複素力学系のモノドロミー計算が可能となり、さらに大域計算のメモリ圧縮を研究する過程において、メモリ消費量などの大域的計算の困難さを測る量と、その力学系の複雑さとの間に非自明な関係があることも発見され、この分野に大きく貢献した。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	Zin Arai, Kazunori Hayashi and Yasuaki Hiraoka, "Mayer-Vietoris Sequences and Coverage Problems in Sensor Networks", to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.
2.	Zin Arai, William Kalies, Hiroshi Kokubu, Konstantin Mischaikow, Hiroe Oka and Pawel Pilarczak, "A Database Schema for the Global Dynamics of Multi-parameter Systems", SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 8 (2009), 757-789.
3.	Zin Arai, Hiroshi Kokubu and Pawel Pilarczak, "Recent Development in Rigorous Computational Methods in Dynamical Systems", Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 26 (2009), 393-417.
4.	On Loops in the Hyperbolic Locus of the Complex Henon Map and Their Monodromies, preprint.

(2)特許出願

研究期間累積件数：0 件

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

	解説論文：荒井迅,「カオスと構造安定性:計算機からのアプローチ」, システム制御情報学会学会誌「システム/制御/情報」に掲載予定.
	解説記事：荒井迅,「精度保証付き数値計算の応用:カオス/渾沌を殺さず七竅を鑿つために」, 数学セミナー2008 年 11 月号, 日本評論社.
	招待講演：Zin Arai, “Hyperbolicity, Monodromy and Pruning Fronts”, ICM2010 Satellite Conference on Various Aspects of Dynamical Systems, Vadodara, India, 2010 年 8 月 29 日.
	招待講演：Zin Arai, “A Database Schema for the Analysis of Global Dynamics”, 7 th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics “ICNAAM2009”, Crete, Greece, 2009 年 9 月 21 日.
	招待講演：Zin Arai, “Rigorous Verification of the Hyperbolicity of Dynamics Systems and its Applicatoins”, Foundations of Computational Mathematics “FoCM08”, City University of Hong Kong, 2008 年 6 月 17 日.

研 究 報 告 書

「ウェーブレットフレームを用いた視覚の数理モデル」

研究期間：平成 19 年 10 月～平成 23 年 3 月

研 究 者：新井 仁之

1. 研究のねらい

数学はこれまで外界の現象の研究と協働して発展してきた。たとえば物理現象、化学現象、生物現象、社会現象などである。しかし 21 世紀になって、科学の最後のフロンティアの一つである脳の研究が大きく進展してきた今日、人の知覚など内的な現象の数学的な研究も必要とされつつある。しかしその研究はまだそれほど多くはない。私の研究対象はその知覚の一つである視知覚、ならびに視知覚が引き起こす錯覚、すなわち錯視である。視知覚は知覚の一つだが、脳の多くの部分が視知覚に関与している。「さきがけ」では、特にこれを研究するための数学的方法とその実際的应用を研究した。

本研究の基本的な研究対象は、脳が行う視知覚に関する情報処理の数理モデルである。視覚に関する数理モデル研究にはいくつかのアプローチが知られている。たとえば視覚に関するニューロンの活動をできるだけ忠実に再現するような神経科学の研究を目的としたモデル、脳を個々のニューロンの繋がりから組み立てようとするニューラルネットワークのモデルなどである。これに対して本研究でのモデルは、ややマクロな立場に立っていて、ニューロンの束が形成する受容野を基本的な単位として、視覚がどのような情報処理の計算を行っているのかをモデル化することを目的としている。ところで、これまで個々の視覚の現象、あるいは特定の錯視を説明するモデルは数多く作られてきたが、本研究で作るのは、単に説明するだけでなく、視覚・錯視の現象をある程度統一的にシミュレーションでき、さらに詳細な数学的解析を可能にするような‘数理モデル’である。

2. 研究成果

まず本研究の基本的な考え方を述べ、次に個々の研究成果について述べる。

2-1. 研究の基本的な考え方 - 数学と視覚、錯視の関連について -

神経科学者ダマシオの言葉を借りれば、脳は「多数のシステムからなる超システムである」(ダマシオ『デカルトの誤り』(ちくま学芸文庫)より)。したがって視覚系も一つのシステムとしてとらえるのではなく、超システムであると考えるのが妥当である。視覚の数理モデル研究の究極の目標はこの超システムを数学的に理解することである。しかし現時点では、超システムはもちろんのこと、個々のシステムの数理モデルですら、現在進行形かあるいは手つかずのものが多い。

さて、個々のシステムの研究を進め、数理モデルの候補を作ることができたとする。次に問題となるのは、それが実際の視覚系のシステムのモデルとして適切かどうかの検証である。外的な現象の場合、対象とする現象をシミュレートできているかどうかで検証をすることができる。しかし、内的な現象の場合には工夫が必要である。このために私が注目したのが錯視である。実際、数理モデルが適切なものであれば、それを実装した計算機も人と同様に錯視を発生させるはずである。つまり、錯視は視覚の数理モデルの試金石の役割をはたすと考えられる。しかし、私の考えでは、じつは錯視の果たす役割はこれに留まらない。たとえば計算機が錯視を起こすような情報処理のアルゴリズムを作ったとする。そのアルゴリズムを参考にして脳内の視覚に関する未知のメカニズムを推測することも可能なはずである(図 1 参照)。実際に本研究でも、視知覚のメカニズムに関する数学的推測をいくつか提言している。

ところで、視覚の情報処理は大きく分けて二種類あると考えられる。それは

(i) 局所的情報処理、(ii) 大域的情報処理

である。局所的な情報処理は、複数のニューロンが近傍のニューロンと連合して形成する古

典的受容野を基盤にして行われる。一方、大域的な情報処理は、ニューロンの水平結合あるいは非古典的受容野で行われる情報処理である。私は古典的受容野による局所的な情報処理は、個々のシステムに適した離散ウェーブレットフレームを用いて数理モデルの基盤を構成できると考えている。古典的受容野のモデルとして、これまでガボール関数やガウス導関数などが用いられてきた。しかし、ここでの研究は計算機による視知覚の情報処理の研究が主眼であるため、ガボール関数、ガウス導関数といった原始的な数学よりも、数学的に優れた性質をもったウェーブレットフレームを用いるか、あるいは必要に応じて新しいウェーブレットフレームを開発して使うことを提唱している。実際、このことにより我々は、これから報告する本さきがけ研究結果も含め、これまでにない成果を得ている。

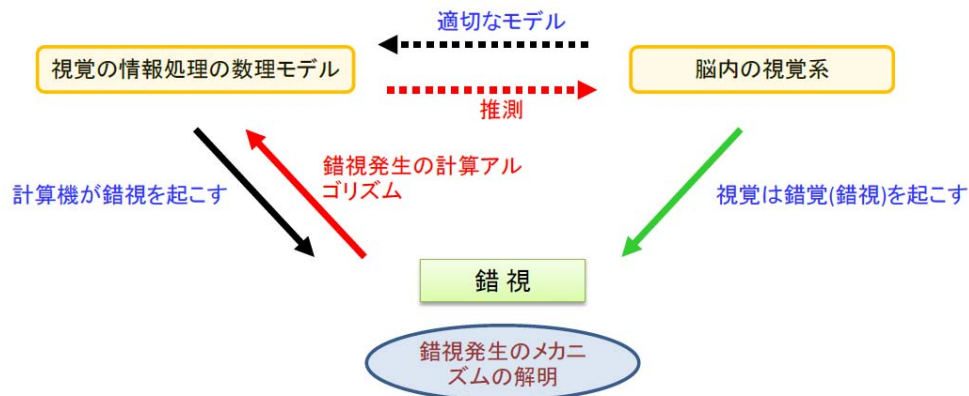


図 1. 数学、視覚研究、錯視研究の関連図。

大域的情報処理については、さまざまなタイプの処理があるため、まずは何をモデル化するかを研究することから始めなければならない。これについては、「さきがけ」採択以前の研究でも、いくつかの大域的情報処理を組み入れた大脳皮質 V1 野の非線形数理モデルを作り、ある種の錯視の統一的なシミュレーションに成功した (H. Arai, 2005)。

2-2. 本「さきがけ」研究の基盤を作るために行った数学研究

「さきがけ」では、まず初めに、新たな視覚の数理的研究の基盤となる数学の研究から行った。その一つの成果は、「かざぐるまフレームレット」の構成である。これは本研究の数学的な基礎を形成することになった成果である。まずその背景を述べる。

【背景】

私が「さきがけ」採択以前に行った研究では、最大重複双直交ウェーブレットを基盤にして、大脳皮質 V1 野における静止画に対する視覚の情報処理の非線形数理モデルを作り、それによりある種の錯視の統一的な計算機シミュレーションができるという結果を得ていた。しかしウェーブレットの方位選択性は水平、垂直、対角の三方向しかなく、この点の改良が必要であると考えていた。さらに視覚科学では、V1 野の単純細胞は多様な方位選択性を持ち (Hubel and Wiesel)、さらに単純細胞の受容野のプロファイルは高次のガウス導関数と類似のものであることが指摘されていた (R. Young) ため、この点も数理モデルに組み込む必要があった。

【成果 1】

そこで、私はこれらの要請をみたすような新しいウェーブレットフレームを構成した。「単純かざぐるまフレームレット」(H. Arai and S. Arai, 2009) と、それよりもフィルタの構成が複雑になるが、神経科学的な観点から改良した「(改良)かざぐるまフレームレット」(H. Arai and S. Arai, 論文準備中) である。記述を簡単にするために、本報告書では両者を総称してかざぐるまフレームレットと呼ぶことにする。ところで、フレームレットは視覚・錯視の研究とは関係なく、2003

年に Daubechies らにより提唱されたウェーブレットフレームのサブクラスで、ウェーブレットをさらに一般化したような枠組みである。かざぐるまフレームレットは視覚の数理モデルに適するように構成した新しいフレームレットの一つである。図 2 は次数 7 の単純かざぐるまフレームレットのレベル 2 の最大重複フィルタにレベル 1 の近似フィルタを循環相関積して得たフィルタを示す図である。

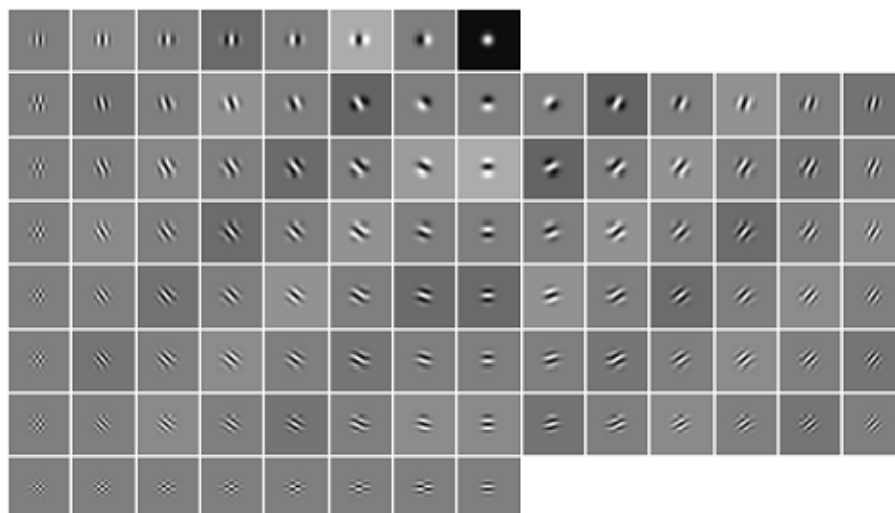


図 2. 次数 7, レベル 2 の最大重複単純かざぐるまフレームレット(Arai-Arai,2009)。

図 2 から単純かざぐるまフレームレットが、単純細胞の受容野に類似の形態を有していることがわかる。

かざぐるまフレームレットのもつ数学的に優れた性質を挙げる。

(1) フィルタは有限長である。フィルタの長さが無限長であると、計算機上で計算する際に、フィルタを有限長で近似して計算をすることになるが、有限長であれば近似しなくてもすむ。このことは再構成画像にエラーが生じないというメリットがある。

(2) タイト・フレームレットになっている。フレームの場合、一般には分解フィルタと合成フィルタは別のものを取らなければならない。またフレームには一次独立性がないため、合成の仕方のも一意的ではない。しかし、タイト・フレームでは分解フィルタと合成フィルタを同一のものに取れるというメリットがある。

(3) スプライン関数を用いて、2 次元ユークリッド空間上のコンパクト台をもつタイト・フレームレットを作れる。このことは本研究に直接関係はないが、ユークリッド空間上で解析学を研究する際には有用なことである。

(4) 多様な方位選択性を有している。かざぐるまフレームレットには「次数」というパラメータを付けてあり、次数が上がると、それだけ多様な方位選択性が得られる。ただし、次数を上げるとフィルタ長が長くなる。目的に応じて次数を取ればよい。ここでは次数 7 の場合の単純かざぐるまフレームレットによる方位選択性の性能を例示する。

テスト画像として図 3 の画像を用いる。

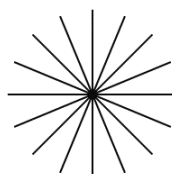


図 3. テスト画像。

このテスト画像を単純かざぐるまフレームレットによる最大重複多重解像度分解する。最

大重複法はもともウェーブレットに対して、Coifman et.al.(1995)、Nason et.al.(1995)らにより考案された方法であるが、ここではそれを単純かざぐるまフレームレットに適用した。その結果が図 4 である。この結果から、単純かざぐるまフレームレットは多様な方位選択性を有していることがわかる。この性質を利用した画像処理への応用も期待できる。なお(改良型)かざぐるまフレームレットについてもほぼ同様の結果が得られる。

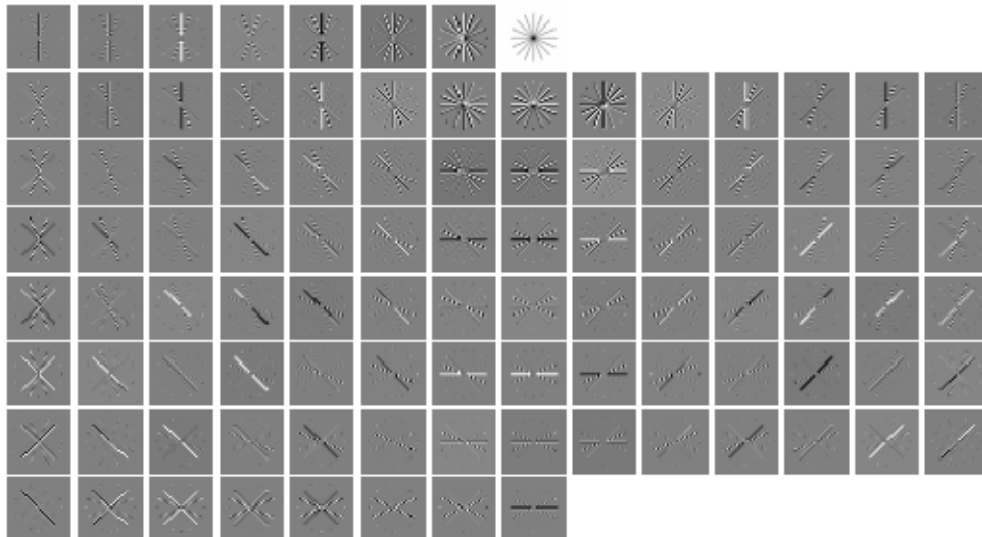


図 4. テスト画像の単純かざぐるまフレームレット分解(レベル 2)。

かざぐるまフレームレットは、視覚系の神経科学に動機を持つものであり、視覚と錯視に関する本さがけ研究の基盤となった成果である。このフレームレットは、本研究に大きな進展をもたらせることとなった。その成果は 2-3 以降で詳述する。

なおかざぐるまフレームレットは新しいフレームの一つを提案したものとして、純粋数学的な立場からも意義のあるものである。

【成果 2. そのほかの数学研究の成果】

かざぐるまフレームレットの数学的な研究を行う際に、多次元信号処理の立場からウェーブレットフレームを捉えておく必要がある。そこで、本さがけ研究の準備的な研究として、フレームレットを含むウェーブレットフレームと、多次元マルチレート信号処理との関連に関する種々の定理に厳密な証明を与えた。またその過程で 1 次元信号処理に関する Feichtinger らの定理を多次元かつ一般的なサンプリング格子の場合に拡張した。そしてそれらの結果、ならびに単純かざぐるまフレームレットの結果も含めて、ウェーブレットフレームと多次元信号処理との関連を数学的に厳密な形にまとめ、著書『ウェーブレット』(共立出版, 2010, 総頁数 463+xi)として出版した。

2-3. 新しい幾何学的錯視の創出とその数理解析

【背景】

幾何学的錯視の代表的な例の一つとして、渦巻き錯視が知られている。Fraser が 1908 年に発表したフレーザーの渦巻き錯視が最初の渦巻き錯視である。その後、心理学者の北岡明佳らが渦巻き錯視をいろいろと作成している。私もさがけ研究を始める前に、新井しのぶと共同で新しい渦巻き錯視の一つとして、フラクタル螺旋錯視を発見した(図 5)。これはフラクタル島と呼ばれる自己相似集合を 1:3 の割合で縦長にして、図 5 のように同心円状に配列すると、それらが渦巻いて見えるというものである。自己相似集合から渦巻き錯視が作れるという発見は新しいものであった。なおフラクタル螺旋錯視は本数学領域のロゴとしても使われている。

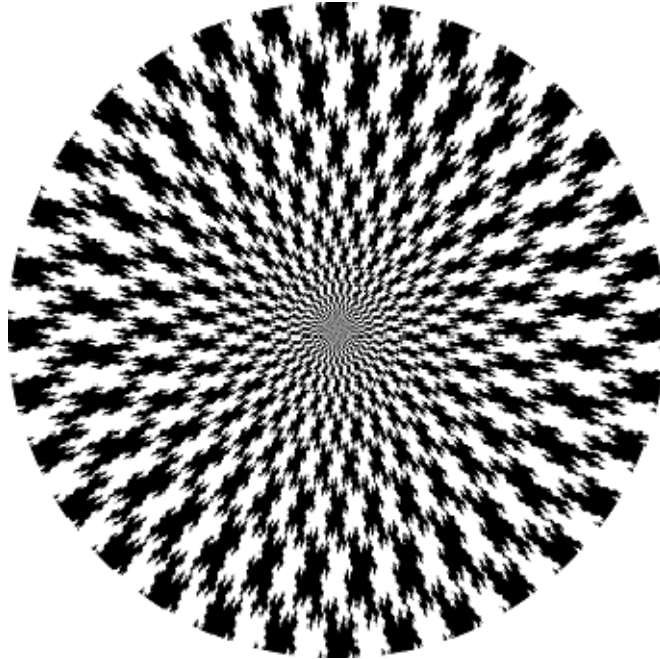


図 5. フラクタル螺旋錯視(新井・新井、2007)。

【成果 3】

さきがけ研究の一つとして、このフラクタル螺旋錯視の錯視の構造を明らかにするために、数学的な解析を行った。そのために考案したのが、かざぐるまフレームレットをもとにした極座標的フィルタリングという方法である。これによるフィルタの例を図 6 に示す。

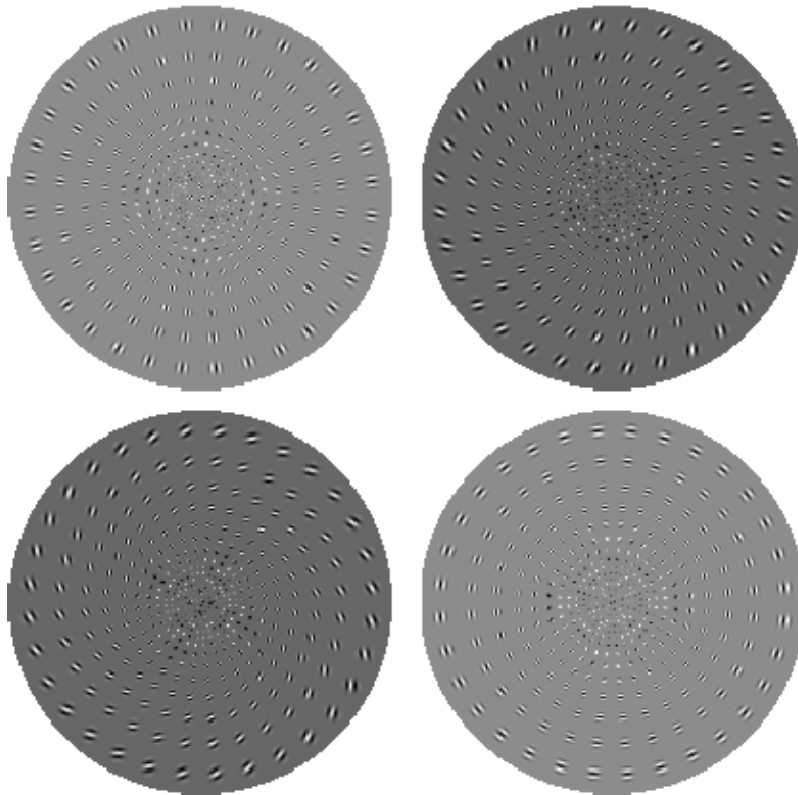


図 6. 極座標的フィルタの例(Arai-Arai, 2010)。

この極座標的フィルタから、我々は最大重複多重解像度構造と完全再構成性を有するフィルタバンクを構成した。このフィルタバンクを用いた、画像の最大重複多重解像度分解を本報告書では、極座標的多重解像度分解と呼ぶことにする。これを用いて次のようなことを明らかにすることができた：

(1) 図 5 のフラクタル螺旋錯視の極座標的多重解像度分解には、反時計回りに渦巻いて見える成分が含まれている(図 7 左)。

(2) そのほか、知覚される錯視とは逆向きの成分、すなわち時計回りに渦巻いている成分(図 7 右)も含まれている。この他、反時計回りと時計回りの混在型の成分も含まれている。

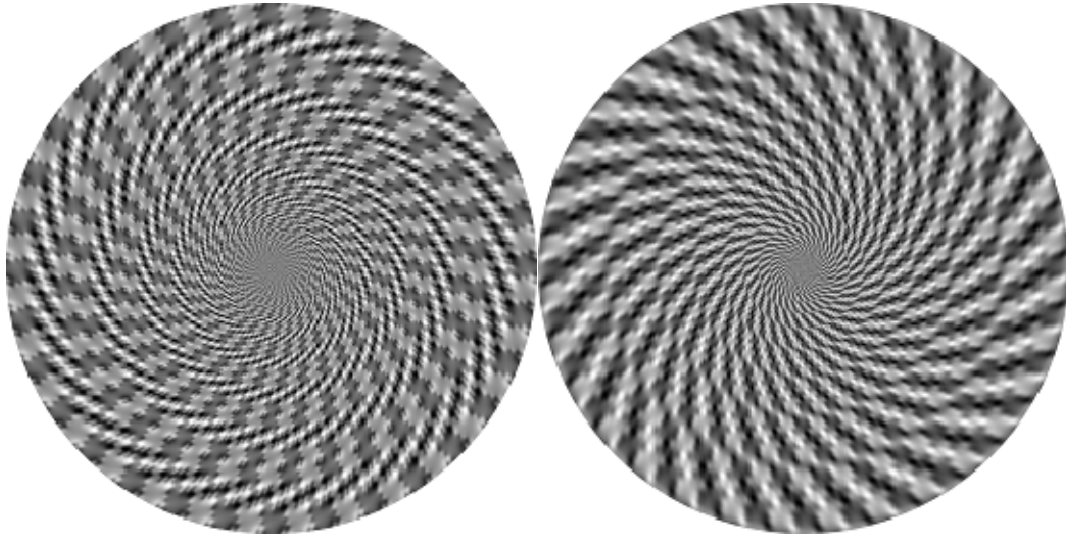


図 7. フラクタル螺旋錯視の反時計回り成分(左)と時計回り成分(右) (Arai-Arai,2010)。

これらの結果から、次のようなことが推測できる。反時計回り成分はフラクタル螺旋錯視を起こす働きをし、一方、時計回り成分は錯視現象を打ち消す働きをしている。しかし、その成分の働きが弱く、結局反時計回りの錯視が起こってしまう。このことを確かめるため、我々はフラクタル螺旋錯視の極座標的多重解像度分解のうち、反時計回り、時計回り、混在型の成分を除去して再構成した。すると図 8 のように、フラクタル螺旋錯視の原型をある程度とどめながら、渦巻き錯視が消失しているような画像が得られた。極座標的多重解像度分解は完全再構成性を有しているので、まさしく反時計回り、時計回り、混在型の成分に錯視の要因があることが数学的に示されたことになる。そこでこれらの成分を錯視成分と呼ぶことにした。

一方、時計回りの成分を除去した結果が図 9 であるが、錯視量が原画像(図 5)に比べて増えている(原画像に比べ急速に中心に向かって渦巻いている)ことが確認できる。このことから時計回り成分を逆錯視成分と呼ぶことにした。

ここで注意しておきたいことは、これらの成分が錯視、あるいは逆錯視の成分であることを数学的に特定できたことは、極座標的フィルタによるフィルタバンクが計算機上でも完全再構成性を持っているためである。そしてこの性質は、極座標的なフィルタバンクのもとなったかざぐるまフレームレットの完全再構成性に由来するものである。

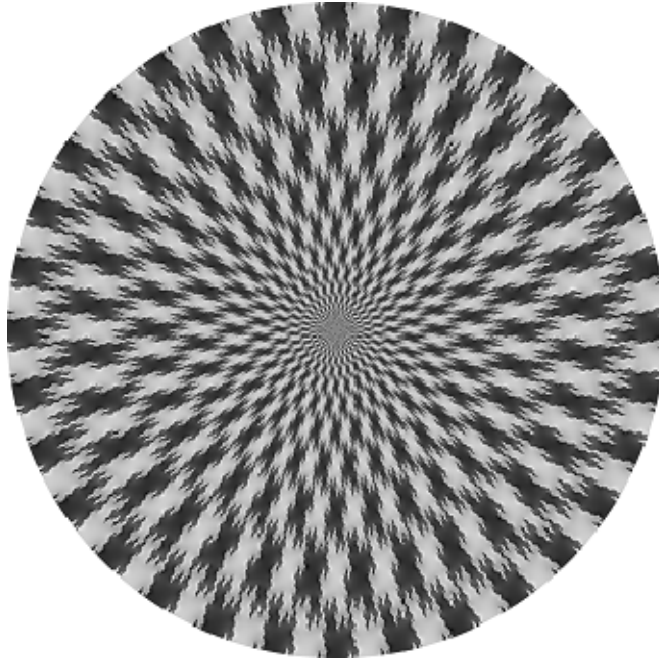


図 8. 錯視成分を除去すると錯視が消失する (Arai-Arai,2010)。

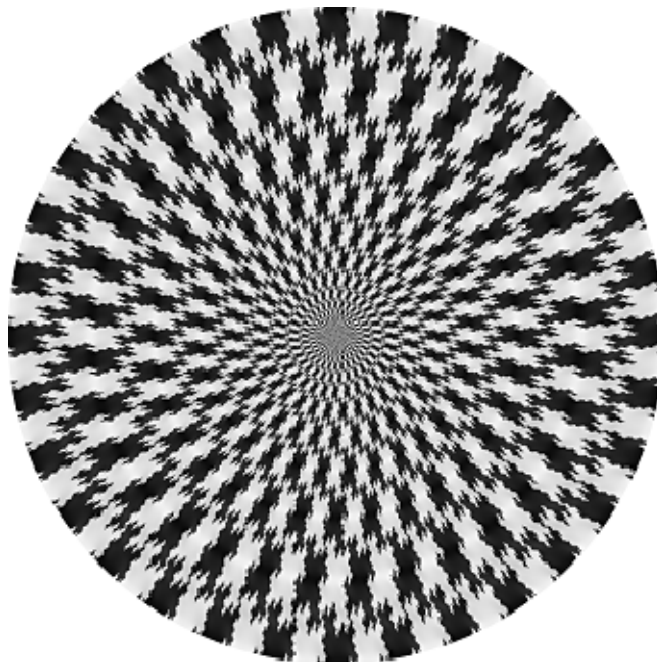


図 9. 逆錯視成分を除去すると錯視量が増える (Arai-Arai, 2010)。

以上述べたような幾何学的錯視の解析は、従来の方法ではなしえなかったことである。またそれによって明らかにされた幾何学的錯視の構造も本研究で初めてわかったことである。さらに本研究で行った錯視成分の抽出と錯視量の制御は、数学的方法によって初めて可能になったものであり、数学が錯視研究に一つのブレークスルーを与えるものであると考えられる。

なおこの研究成果は『日本経済新聞』朝刊(2009 年 2 月 16 日)でも報じられた。

【考察】

錯視は脳内の視覚情報処理で起こっていることであるから、錯視の構造が解析できたということは、その数学的方法と脳内の情報処理が関係していることが推測される。この観点から神経科学との関連を探ることとする。関連した結果として 1996 年に Gallant らが大腦皮質 V4 野に同心円、渦巻き、放射線状の縞に強く反応するニューロンがあることを発見したものがあ。極座標的フィルタリングで作られる極座標的フィルタ(その例は図 6 参照)は、同心円、渦巻き、放射線状の縞に反応するといえる。このことから、極座標的フィルタは V4 野のニューロンが行う情報処理と関係があることが推測される。

【成果 4】

北岡、Pinna、Brelstaff (2001)は、傾き錯視を同心円状に配列すると渦巻き錯視ができることを発見した。Gallant et al. (1996) によれば、V4 野には上記【考察】で述べたように極座標的縞に強く反応するニューロンがあるが、それだけでなく Gallant らは双曲座標的な縞に強く反応するニューロンもあることを発見した。そのニューロンの種類と縞の形状から、我々は傾き錯視を直角双曲線座標に沿って配列すると、軸がずれて見える錯視が起こることを予想し、実際にそのようになることを発見した。その一例が図 10 左で、フレーザーのねじれ紐と呼ばれている傾き錯視を直角双曲線座標軸(図 10 右)に沿って配列したものである。しかし、図 10 左の画像では、軸が反時計回りにずれて見える。この他の傾き錯視でも同様の錯視画像が得られる。この一連の新しい錯視を我々は「双曲型錯視」と呼ぶ。

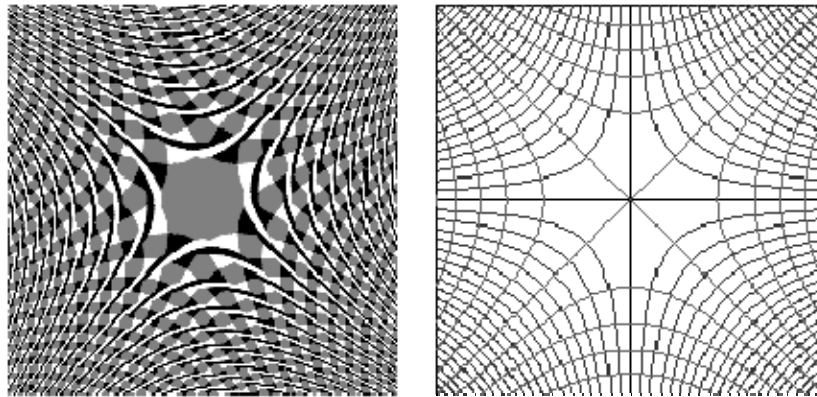


図 10. 左: フレーザーのねじれ紐を用いた双曲型錯視(Arai-Arai, 2010)、右: 直角双曲線座標。

双曲型錯視を解析するために、【成果 3】で導入した極座標的フィルタリングと同様に双曲座標的フィルタリングを考える。これにより得られる双曲型フィルタの例を図 11 に載せる。これらの双曲型フィルタは V4 野にある双曲座標的な縞に強く反応するニューロンが行う情報処理と関係があることが推測される。

双曲型フィルタを用いて、最大重複多重解像度構造と完全再構成性をもつフィルタバンクを作ることができる。本報告書では、それによる画像の分解を双曲型多重解像度分解ということにする。

これによる双曲型錯視の構造の解析例を示す。ここで解析するのは、北岡のカメのパターンから作った双曲型錯視(図 12(a))である。これは図 10 左のフレーザーのねじれ紐を用いた双曲型錯視と異なり、対角方向の軸のずれの錯視のみならず、水平・垂直方向の軸のずれも知覚される。図 12(b) は錯視成分の除去したもので、錯視が消失している。図 12(c) は反時計回りの錯視成分からなる画像であり、逆錯視成分が加えられていないため、錯視量が増えている。図 12(d) では水平・垂直錯視成分を除去した。水平・垂直の錯視は消失しているが、対角の錯視は残っている。同様に対角錯視成分のみを除去することも可能である。

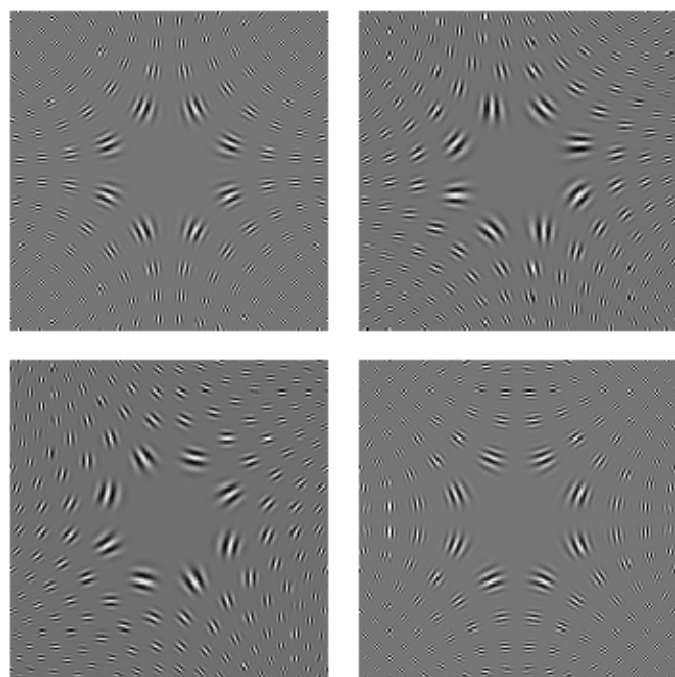


図 11. 双曲型フィルタ (Arai-Arai,2010)。

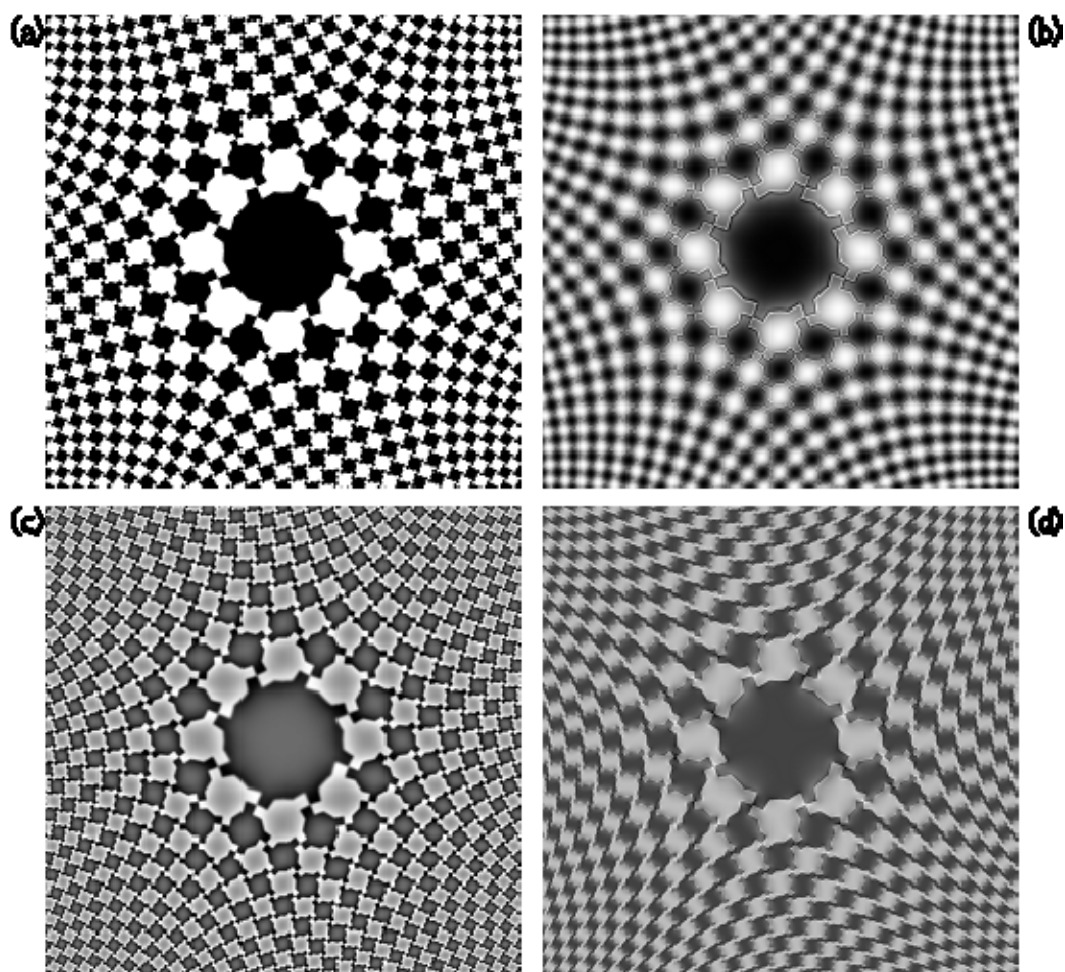


図 12. (a)北岡のカメを用いた双曲型錯視、(b) 錯視成分の除去(錯視が消失している)、(c) 逆錯

視成分等を除去(錯視量が増えている)、(d) 水平・垂直錯視成分の除去(水平・垂直の錯視は消失しているが、対角の錯視は残っている) (Arai-Arai,2010)。

神経科学的な考察から、双曲型錯視という新しい幾何学的錯視のクラスを見出すことができた。さらに、双曲型多重解像度分解を用いて、双曲型錯視の構造の解析と錯視量の制御を行うことができた。【成果 3】の結果と合わせて、本研究で開発した数学的方法は、従来の錯視研究では考えられたことのない方法であり、錯視研究に一つのブレークスルーを与えるものと考えられる。

2-4. 文字列傾斜錯視のフレームレット解析

【背景】

2005 年頃に、日本のインターネットの掲示板等に特定の文字列を並べて傾きの錯視を作る遊びが流行した。そして数多くの文字列が傾いて見える錯視が匿名でネット上に発表された。私と共同研究者の新井しのぶは、この錯視に「文字列傾斜錯視」と名前を付け、ウェブレットを用いた文字列傾斜錯視の作成方法などをネット上に発表した。たとえば数学的方法を用いて我々が見出した文字列傾斜錯視として次の図 13 がある。



図 13. 数学的方法を用いて見出した文字列傾斜錯視の例。東京大学理学部数学科同窓会より依頼され作成。2009 年の会報の表紙に掲載された。なお 2008 年より新井・新井の発見した錯視が同会報の表紙デザインとなっている。

【成果 5】

さきがけ研究では、本研究で開発したかざぐるまフレームレットを駆使して、文字列傾斜錯視の構造を調べた。かざぐるまフレームレットは大脳皮質 V1 野の単純細胞の数理モデルを作るために考えたものであり、一方、単純細胞は視覚情報処理の中で、線の傾きを検出する役割も果たしている。そこで、文字列傾斜錯視となる文字列をかざぐるまフレームレットで解析することにより、V1 野でどのようなことが起こっているかを調べた。その結果、文字列傾斜錯視の錯視に関連するニューロン(に対応するフレームレットのフィルタ)を特定できた。それが文字列傾斜錯視に関連していることの証明として、そのフィルタの反応を取り除くことにより、文字列傾斜錯視の錯視が除去された。結果を図 14 に示す。この成果は、傾きの錯視が V1 野のどのような情報処理で発生するかについて、数学的推測を与えている。



図 14. 文字列傾斜錯視からの数学的方法による錯視の除去(新井・新井)。

同様の結果は他の文字列傾斜錯視でも成立する。この成果に関する論文は現在準備中である。

【神経科学的な考察 1. - 実験的なことへの予測 -】

外界の情報が眼球から入ってきたとき、脳内のさまざまなニューロンに興奮あるいは抑制が起こる。錯視発生の要因は、錯視画像が入力された際のニューロンの興奮/抑制の仕方にあると考えるのは自然である。したがって、ある錯視画像を見ても、錯視が発生する要因となるニューロンの興奮/抑制が起こらなければ、錯視は知覚されないだろう。しかし、現時点の技術からは特定のニューロンの働きをピンポイント的に制御することは困難である。そこで数理モデルを用いて‘ある種のシミュレーション’を行ったのが本研究成果であると考えることができる。このことを詳しく、しかし分かりやすくするためにやや比喩的に説明する。まず文字列傾斜錯視をニューロンの数理モデルを実装した計算機に入力する。すると、計算機内でニューロンの対応物に興奮/抑制が起こるが、錯視の要因となるものが何であるかを計算機実験で特定し、要因となる反応を起こさないようにする。この部分は計算機なので容易に可能である。すると計算機は原画像に変化を加えて出力する。ところで、この画像を人が見たときに、どのようなことが起こるであろうか。考えることは、この出力画像を見ても脳内の対応する実際のニューロンに反応が起きないということである。なぜならば反応を起こす要因を計算機で除去していると考えられるからである。その結果、その画像をみても錯覚は起こらないはずである。そこで実際に、我々の出力画像を見ると、原画像である図 13 には傾きの錯視を知覚するにもかかわらず、出力画像である図 14 には傾きの錯視が知覚されない。

脳内の視知覚の情報処理との関連 (仮説)

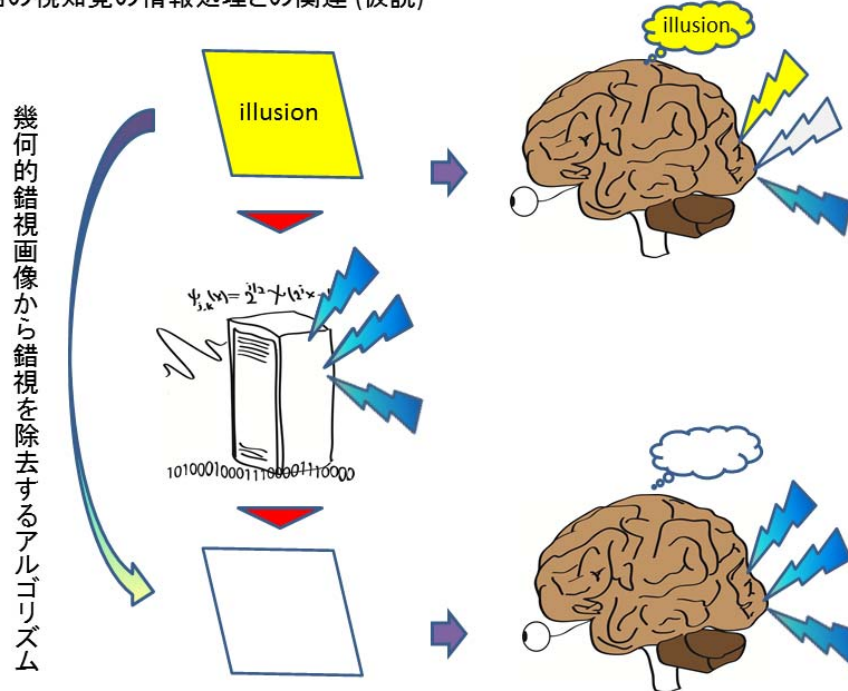


図 15. 脳内の視知覚の情報処理との関連に関する仮説の説明図。

ただし、脳内のニューロンの反応については、上記のことはあくまでも仮説であり、実際にニューロンの反応がどのようなになっているのかは実験的検証が必要なことである。なおこの仮説は渦巻き錯視、双曲型錯視に関する記述の成果に対しても当てはまる可能性がある。

【成果 6】

2005 年に新井・新井はウェーブレットを用いた文字列傾斜錯視の発見方法を見出した。「さきがけ」研究では、多くの文字列傾斜錯視を作成するうちに、文字列傾斜錯視が起こる要因として、より本質的なことがあることを発見した。それはねじれ紐に似たパターンである。このことについて、具体例を用いて述べる。「千葉県立現代産業科学館」という文字列から、文字列傾斜錯視ができる文字とその配列を見出してみよう。まず各漢字を双直交ウェーブレット(Cohen-Daubechies-Feauveau)による最大重複ウェーブレット分解すると図 16 のようになる。

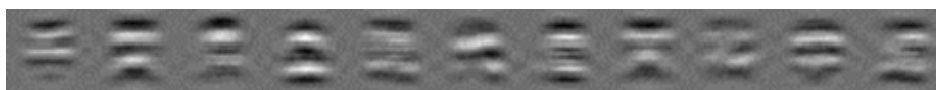


図 16. 千葉県立現代産業科学館の各文字の最大重複双直交ウェーブレットのレベル 3 の水平成分。

この中から文字を選んで配列しなおしてねじれ紐に似たようなパターンができるようにする。

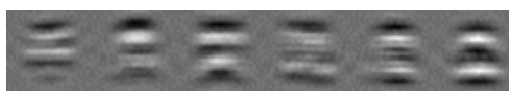


図 17. このように抜粋して配列しなおすとねじれ紐のようなパターンが見られる。

これに対応する文字は、千葉県現産立である。これを並べると図 18 の文字列傾斜錯視ができる。

千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立
 千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立
 立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千
 立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千
 千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立
 千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立千葉県現産立
 立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千
 立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千立産現葉県千

図 18. 文字列傾斜錯視（新井・新井, 2010）

なお詳細は現在発表準備中である。この結果は私の他の研究成果とともに、『数学で探る目の錯覚と視覚の謎』として千葉県立現代産業科学館の企画展で展示された(展示期間、2010 年 10 月 9 日-11 月 28 日)。

2-5. 浮遊錯視生成アルゴリズムの発明

【背景】

静止画が動いて見える錯視は現在、錯視研究者たちにより盛んに研究されている。そのうちの一つに静止画が浮遊して見える錯視があり、たとえばオオウチ錯視、Pinna 錯視、北岡明佳による錯視などがある。

【成果 7】

任意の画像を浮遊錯視に変換するアルゴリズムを見出したことが浮遊錯視に関する成果である。詳細は現在、特許を申請中である（JST, 発明者: 新井仁之、新井しのぶ）。

たとえば例として次のような画像(図 19)を取り上げる。



図 19. 原画像。

この画像を今回の研究で得たアルゴリズムで変換して得た画像が図 20 である。



図 20. 浮遊錯視。画像を上下にゆっくりと動かすと、さがかけのロゴマークが左右に浮遊したように見える。眼鏡をかけている方は眼鏡を上下にしても錯視を知覚できる。

従来の錯視画像は、日常的な環境の中で見出したり、あるいは職人芸的に錯視の起こるような特殊なパターンを用いて作られるものがほとんどであった。これに対して、我々の浮遊錯視アルゴリズムは、任意の画像から浮遊錯視を作れるというものである。このようなことは、数学的方法によって初めて可能になったことである。

【実用的応用 -広告産業、娯楽-】

誰もが任意の画像を浮遊錯視にできるため、会社名、製品名、学校名、個人名などを浮遊錯視にしてインパクトのあるチラシ、カードなどを作成して宣伝効果を上げることができる。また、自分で描いたデザインを浮遊錯視にしてハガキをはじめ、CD、DVD のラベルなどを作成することもできる(図 21、図 22 参照)。

【神経科学的な考察 2. - 実験的なことへの予測 -】

浮遊錯視を作るアルゴリズムと神経科学との関連について、すでに【神経科学的な考察 1. - 実験的なことへの予測 -】において詳述したことと同様に図 23 に記したようなニューロンとの関連が予測ができる。



図 21 浮遊錯視生成アルゴリズムで作成した錯視の利用例。画像をゆっくりと左右に動かすとウサギたちは縦に浮遊したように見え、画像をゆっくりと上下に動かすとウサギたちは左右に浮遊したように見える。



図 22. 浮遊錯視生成アルゴリズムの適用例。画像を遠くにしたり近くにしたりするか、あるいは顔を画像から遠ざけたり、近づけたりすると、文字列が円上を動いて見える。

脳内の視知覚の情報処理との関連 (仮説)

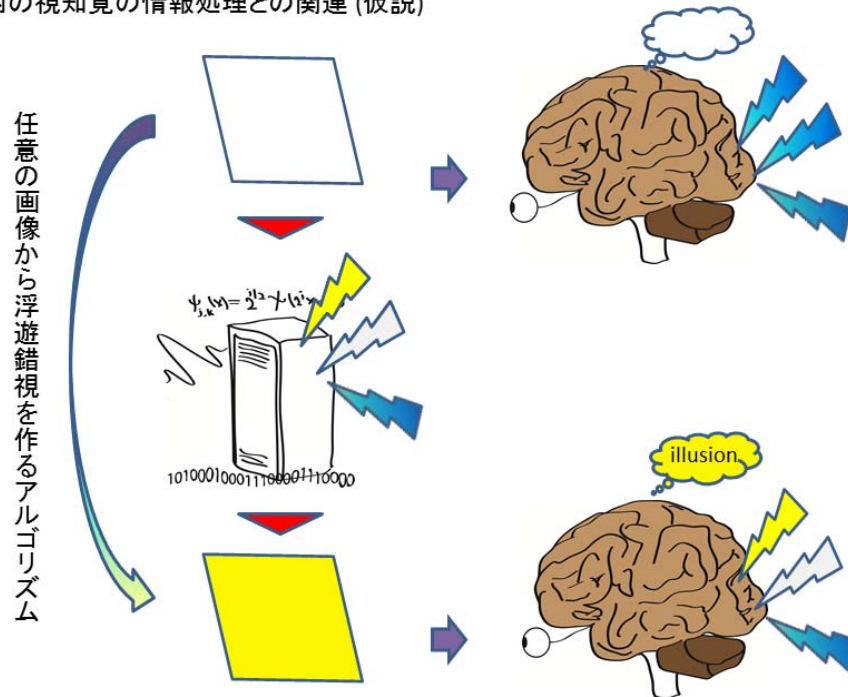


図 23. 脳内の視知覚の情報処理との関連に関する仮説の説明図。

2-6. その他の結果 (新しい現象の発見)

【成果 8】

新しい錯視と錯視に関する新しい現象も発見したので、それを報告する。

発見した錯視は次のものである。図 24 の左に緑の同心円がある。これを図 24 右のようにフラクタル螺旋錯視の上に載せる。すると、緑の同心円が歪んで見える。

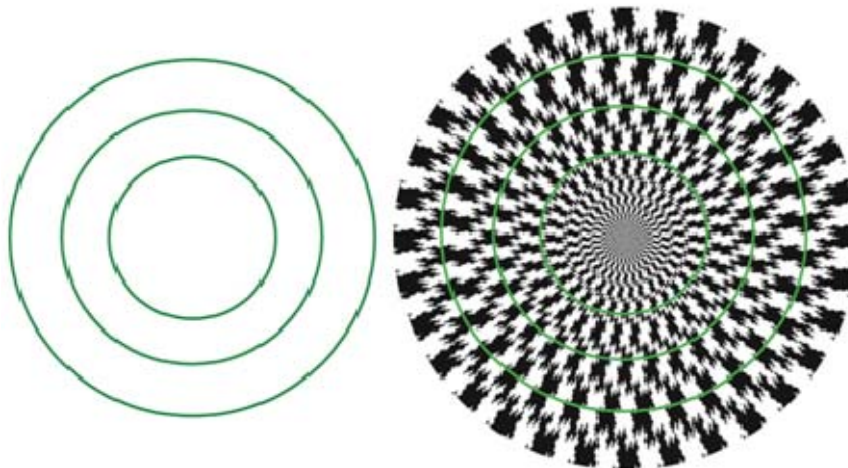


図 24 左: 緑の同心円、右: 歪同心円錯視(新井仁之)。

同心円が歪んで見える錯視を最初に発見したのは Fraser (1908)であるが、しかし Fraser の同心円が歪んで見える錯視と図 24 右には一つの違いがある。それは Fraser の錯視はねじれ紐を同心円にしたものであるのに対して、図 24 右では単なる単純な同心円が歪んで見

えるという点である。

もう一つの現象はフラクタル螺旋錯視と色に関するものである。図 25 上はフラクタル螺旋錯視に色を付けたものである。フラクタル島は同心円状に配列されているにもかかわらず渦巻いて見える。一方、図 25 下の図は上の図と同じデザインで、色が異なっているだけである。しかし図 25 下の図では渦巻き錯視が消失している（新井・新井）。

これらの現象の数理解析は今後の課題の一つである。

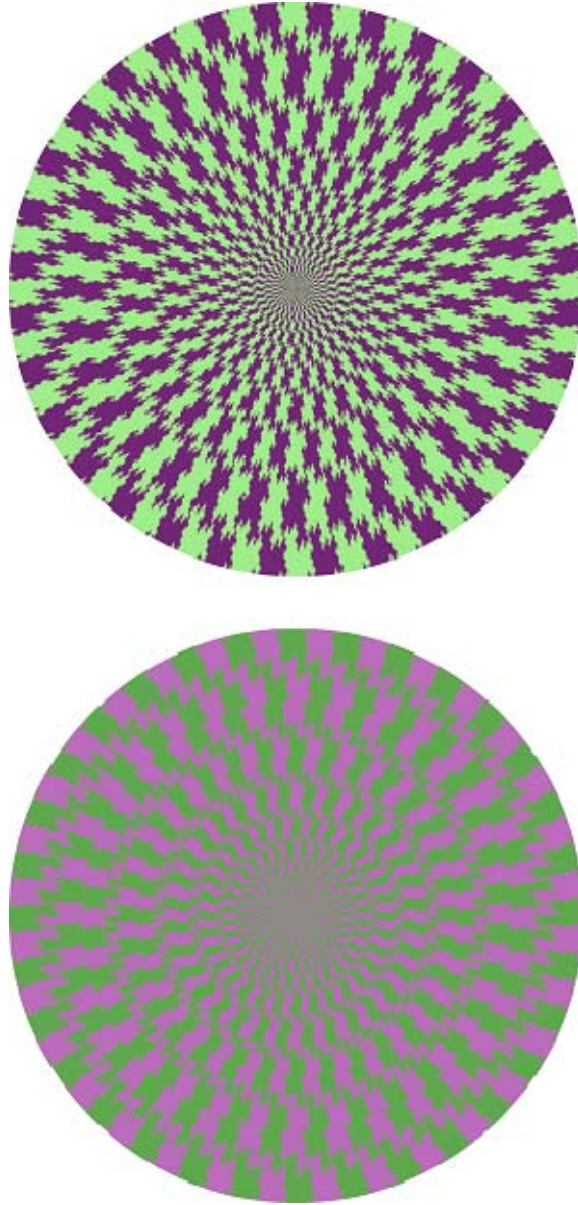


図 25. 上：フラクタル螺旋錯視、下：上の画像と全く同じデザインであるが、渦巻いて見えない。フラクタル螺旋錯視は色によって錯視量が変わる。錯視が消失する場合もある。これはフレージャーの渦巻き錯視では見られない現象である。

3. 今後の展開

「さきがけ」ならびにそれ以前に私が研究してきた主な研究対象は、大脳皮質の V1 野、V4 野の一部であった。さらにその他の領野の数理解析を研究していきたい。特に、「さきがけ」では静止画に対する情報処理を研究したが、今後の期待される大きな展開としては、視

覚研究に適した時空間ウェーブレットフレームを開発して、動画の研究をすることである。動画を研究するに当たっては、奥行き知覚など3次元空間をどのようにとらえるかという数理モデルの研究も必要になる。

「さきがけ」では、ある種の静止画が動いて見える錯視の生成アルゴリズムを発見することができた。脳のさまざまな領野の数理モデルの研究とともに、その領野に原因がある錯視の発生のメカニズムも解明でき、それが正しいものであれば、さまざまなタイプの錯視の生成アルゴリズムを作ることができるはずである。

色知覚の数学的な研究は非公開研究成果として述べたが、さらにそれを推進させることも展開の一つである。色知覚の研究は、色彩科学、映像メディア、アート、デザインなどさまざまな産業とも密接に関連しているので、大きな可能性を持っているといえよう。

本研究は画像処理の立場からも興味深いものがあり、実際、映像メディア情報学会の講習会の講師を依頼されたりしている。画像工学への応用も今後の発展として大きな可能性があると考えている。

最後に本研究で開発したかざぐるまフレームレットならびに、今後視覚の研究のために構成しようとするフレームについて、その数学的性質を純粋数学の立場から研究していくことは、古典解析学として興味あるテーマであり、純粋数学の発展にも貢献することが期待できる。

4. 自己評価

「さきがけ」採択前に新井は最大重複双直交ウェーブレットを用いた大脳皮質V1野の非線形的な数理モデルを作り、ある種の錯視に対して統一的なシミュレーションを行った。しかし、ウェーブレットには、視覚科学の観点から考えて改良の余地が残されていた。そこで、「さきがけ」ではまず視覚科学の観点からウェーブレットを改良することを行った。それが「かざぐるまフレームレット」である。これを構成できたことは本研究の一つの目標を達成したものと考えている。かざぐるまフレームレットを用いた研究課題はいろいろあるが、さきがけ研究では、幾何学的錯視への応用研究が特に進展した。この際導入した幾何的フィルタリングの方法は、大脳皮質V4野の情報処理の一部と密接に関連していると考えている。この結果、これまでの心理学分野における錯視研究では得られなかった幾何学的錯視の構造が明らかにできたことは特筆したい。さらに、かざぐるまフレームレットを用いた脳の神経科学的な数理解析により、任意の画像から浮遊錯視を生成するアルゴリズムを作ることができた(特許出願中)。これは錯視研究において画期的なことではないかと考えている。なぜならば、これまで錯視は日常の中に見出さず、あるいは特別なパターンを見出して職人芸的に作られていたのに対して、本研究で得た浮遊錯視生成アルゴリズムは誰もが任意の画像から新しい浮遊錯視を作れるからである。しかもこれは単なる画像工学的アルゴリズムではなく、脳内の視知覚の情報処理の数理モデル的考察から生まれたという点からも、脳科学的な発展性も含んでいる。さらに錯視の広告産業などへの実用的応用も期待することができる。

この他に、現在進行中の色の知覚の数理モデルの研究をはじめ、非公開の研究成果があり、これらも新しいタイプの進展を視覚・錯視研究もたらずのではないかと考えている。

こういった成果は本研究の当初の目標をかなり達成しているものであると同時に、当初予想していなかった発展もあったといえる。

さきがけに採択されたことにより、研究期間中、多くのアイデアと成果を得ることができた。しかし、成果を得ることに時間を割かれ、それを論文発表、あるいは特許出願をする時間的余裕がなかった。現在、未発表の成果の発表の準備を進めている。また、さきがけ研究を中心に、それ以前に得た研究成果も含めて、視覚と錯視の数学的研究に関する著書を出版準備中である。研究をしながら、発表準備に研究時間を割く配慮をすることは、今後の私の研究姿勢に対する課題である。

5. 研究総括の見解

脳が行う視知覚に関する情報処理の数理モデルを研究対象とし、新たな視覚の数理的研究の基盤として「かざぐるまフレームレット」を構成した。これにより、従来の方法ではなしえな

かった幾何学的錯視の構造を明らかにすると同時に、各種錯視画像に対して成分の抽出や錯視量の制御が初めて可能となった。これらは新しいフレームの一つを提案したものとして、純粋数学的な立場からも大きな意義があると同時に、今後は数学からの脳科学への大きな貢献も期待される。

6. 主要な研究成果リスト

(1) 論文(原著論文)発表

1.	H. Arai and S. Arai, Framelet analysis of some geometrical illusions, Japan J. Indust. Appl. Math. 27, 23-46, 2010.
2.	H. Arai and S. Arai, 2D tight framelets with orientation selectivity suggested by vision science, JSIAM Lett. 1, 9-12, 2009. Invited Paper.
3.	新井仁之、ウェーブレット・フレームとその錯視研究への応用、可視化情報学会誌、29 (115), 10-17, 2009.
4.	新井仁之、視覚の科学と数学、ウェーブレットで探る錯視の世界、最終回、色の知覚と錯視、数理科学、547、75-79+表紙裏の画像+裏表紙裏の画像、2009.

(2) 特許出願

研究期間累積件数: 1 件

発 明 者: 新井仁之、新井しのぶ

発明の名称: 錯視画像生成装置、錯視画像生成方法、およびプログラム

出 願 人: 科学技術振興機構

出 願 日: 2010/11/15

(3) その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

1. 新井仁之、平成 20 年度科学技術分野の文部科学大臣表彰 科学技術賞(研究部門)。受賞理由: 視覚と錯視の数学的新理論の研究。

2. 新井仁之、視覚と錯視の数学的研究、2008 年度日本応用数理学会年会、総合講演、2008 年、9 月 17 日、於東京大学柏キャンパス。

3. 新井仁之、ウェーブレット、共立出版株式会社、2010、総頁数 463+xi。

4. 新井仁之・新井しのぶ、数学で探る目の錯覚と視覚の謎、千葉県立現代産業科学館、企画展展示、2010 年 10 月 9 日-11 月 28 日。

5. 新井仁之、ウェーブレット・フレームによる視覚の数理モデルと明暗及び幾何的錯視への応用、脳と心のメカニズム第 11 回冬のワークショップ、日本神経回路学会ほか主催、於ルスツリゾート、2011 年 1 月 12 日。

6. 新井仁之、視覚の数理モデルによる錯視の解析と生成、映像メディア情報学会講習会、於機会振興会館、2011 年 2 月 18 日(発表予定)。

研 究 報 告 書

「水圏環境力学理論の構築」

研究期間：平成19年9月～平成23年3月

研究者：坂上 貴之

1. 研究のねらい

私達の身近な水圏環境(河川・湖沼・海洋)で起こる問題, 例えばタンカーからの重油漏れ事故, 海上空港が周辺水域に及ぼす影響, 湖沼における生物多様性の変化と生態環境の回復など, 日常生活に密接に関わるものばかりです. この研究構想では, これらの水圏環境問題を統一的に扱える数学理論→水圏環境力学への構築と, それを応用したソフトウェアの開発により現実の環境問題に応えられる新概念・シミュレーション手法の提案を目指す.

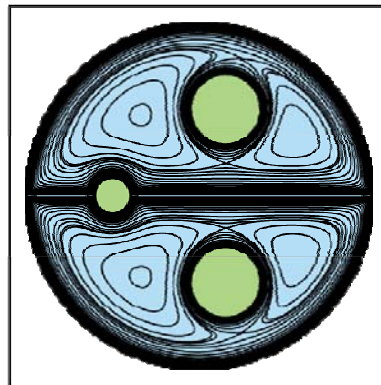
2. 研究成果

【理論研究】 河川や湖沼, 海岸で起こる問題を扱うための流れ場を数理解析する基礎理論の構築を行った. 理論解析が容易になるように, 流れは二次元非粘性・非圧縮流と簡単のものを考えたが, その代わりに二次元多重連結領域の複雑な形状やその内部障害物の配置が自由に扱えるように理論構築を行った. 二次元非粘性・非圧縮流体では, ケルビンの循環定理が成立するため, 初期時刻に渦度が存在しない限り, 渦は生成しない. この事実に基づいて, 初期時刻に渦が存在する領域だけを離散近似して, その上の流体粒子(点渦)の運動として流体運動を近似する「渦法」と呼ばれる常微分方程式系に帰着させることで, 渦と境界の相互作用を理論的・数値的に研究する基盤を構築することが可能になる(点渦力学の構築).

この定式化を任意の多重連結領域の上で適用可能にするためには, 与えられた多重連結領域に対するグリーン関数(点渦の複素速度ポテンシャル)を構成しなければならない. 本さがけ研究ではこれに対応すべく, 二つのアプローチをとった.

A. 二次元多重連結領域における点渦力学理論

多重連結領域の標準領域(円領域)を考え, その上で点渦方程式を構築した. ここでは2005年にDarren Crowdyによって与えられた標準円領域におけるグリーン関数が用いられるが, 本さがけ研究においてこの基礎方程式の導出を行った, また標準円領域における点渦の定常配置の理論研究を行った. これを元に, 与えられた領域からこの標準円領域への等角写像を構築することで, 標準円領域における点渦方程式がどう変化するかを考えより広い多重連結領域での点渦力学の展開が完成し, 広い問題に応用が可能になった. なお, この場合, 与えられた領域から標準円領域への等角写像をどう構築するかが問題になるが, これに対しても数値等角写像を用いることで多重連結スリット領域の場合には広く利用可能であるということがわかった. 成果は主要な研究成果リスト(1)論文2として公開済みである. 右図はある多重連結領域における点渦の軌道の様子を示したものである.



B. 数値等角写像を用いた流れ場の構築

上の標準円領域を通した理論を使う場合, 与えられた任意の領域から標準円領域への等角写像の構築が一般には困難であるため, それを数値的に構成することが重要になる. これに対して与えられた任意の多重連結領域の上での点渦の複素速度ポテンシャルを数値等角写像によって実現する数値的手法を応用することで実現し, 幅広い応用が獲得

できるようになった。

C. 点渦力学系理論の深化

多重連結領域における点渦力学の数学理論を構築する上で必要なハミルトン力学系理論による理論的取り組みを推進した。特に球面点渦に関する理論の構築(点渦力学の高速数値計算法・カオス軌道の発見・定常解の特徴付け・衝突解の存在)に大きな進展があり、その成果は多重連結領域への拡張可能なものである。成果は主要な研究成果リスト(1)論文3, 4, 5, 6として公表済みである

次に、ここで構築された理論を拡張する意味で二つの事柄についても研究し以下の成果を得た。

D. 二次元多重連結領域における流れの構成(一様流・吸い込み、湧き出し)

二次元非粘性非圧縮流体の研究を様々な流れに応用するには、上の点渦力学で達成される点渦の流れだけでなく、湧き出し・吸い込みや一様流といった基本流れを構成することも重要である。標準円領域における一様流の流れについては既に Darren Crowdyによって与えられているが、本さがけ研究では湧き出し・吸い込みの流れの構成に成功した。

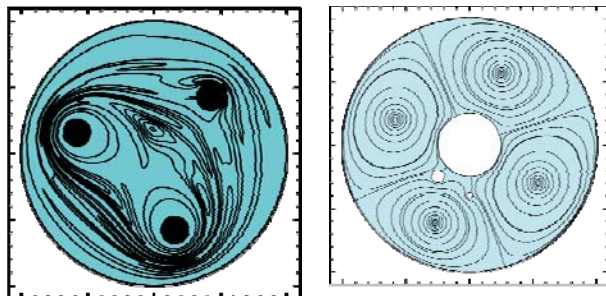
E. 二次元多重連結領域における点渦統計流れの構築

与えられた多重連結領域における流れ場として点渦力学によって構成される非定常時間発展が扱えるようになったが、こうした流れ場は初期の点渦の配置などに応じて、様々な挙動を示すので、多重連結水圏環境場における代表的な流れと取り扱うことには適さな場合がある。そこで、点渦力学の多粒子系の極限として定義される点渦統計力学の問題を考えた。このような流れは多くの初期値の集合に対してもっとも達成されやすい流れを与えるため多重連結環境場における標準流れの候補としても最適である。ここで扱う方程式は $\sinh$ -Poisson 方程式であるが、この解を数値的に構成する手法を開発し、与えられた多重連結領域における点渦統計解を構成した。以下にいくつかの例を示す。

【環境問題への応用研究】 理論研究の成果を水圏環境の問題に適用する数値計算法を開発した。具体的には以下の二つのモデル研究を行った。

A. 二次元多重連結領域における化学物質・生態系モデルの数値解析

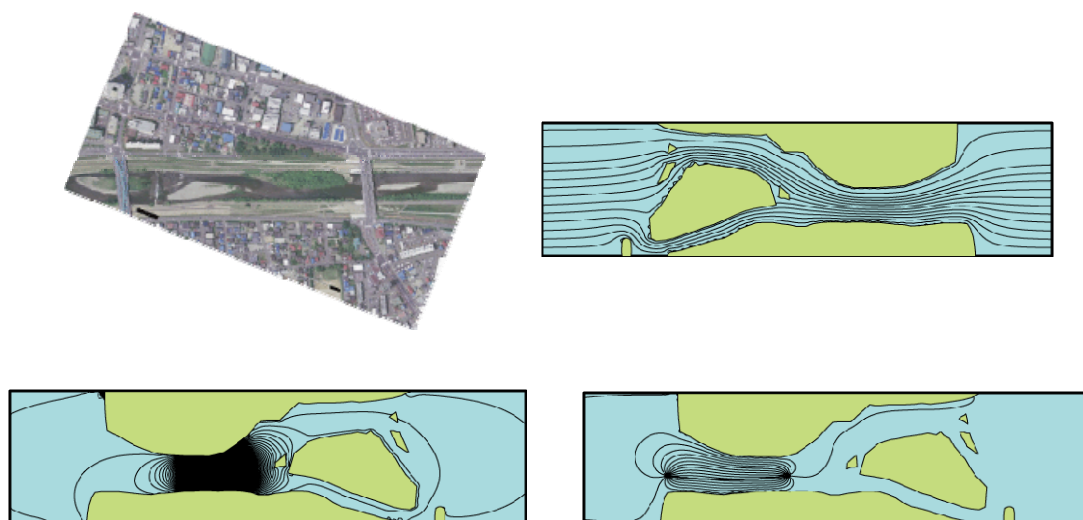
点渦力学・点渦統計解などで構成される流れ場を用いて、その流れの上で物質移流と与える移流拡散方程式、生態系の変化を扱う移流・拡散・反応方程式を与えられた多重連結領域で数値的に解く手法を埋め込み境界法・およびコンパクト差分スキーム法を組み合わせることで実施する手法を開発した。移流拡散モデルでは、流れの双曲型淀み点ではなく、それらを結ぶホモクリニック・ヘテロクリニックな粒子軌道の周囲で汚染物質が集まりやすいことなどが示唆された。右図は標準流れによる物質移流の様子(右側)とある多重連結領域における統計的標準流れ(左側)の様子である。



B. テスト問題「河川領域」の研究

河川における物質移流・生態系モデルを構築するためのモデル問題として「河川問題」を設定し、その上で流れを構成する数値等角写像を構成する手法を開発した。河川領域とは多重連結チャネル領域として定式化できるが、その領域の中で一様流・渦・吸い込み湧き出しの複素速度ポテンシャルを構成した。これによって、複雑な形状を持った、河川領域における数

値点渦力学が可能になった。実際の地図から河川の外形を読み込んで、その上でもこのアルゴリズムが適用可能なことを確認し、河川生態学や河川の水質基準を求める上での基礎的な流れ場構成手法を完成した。成果は主要な研究成果リスト(1)論文1として現在投稿中である。以下にその計算例(豊平川とその上で的一様流れ・点渦・吸い込み湧き出しの数値的構成)を示す。



【環境流体問題の探索・数学理論の深化】

A. 数理環境流体セミナーの実施

環境流体・数値解析・力学系理論など、本さがけ研究の展開に必要な専門知識を得るための「数理環境流体セミナー」を実施した。さがけ研究開始から終了までに計13名専門家からの情報提供を受けた。具体的な講演者と講演タイトルは以下の通りである。

第1回	2007. 11.12	泉 典洋 氏 (北海道大学)	水工学における地形動力学問題
第2回	2007. 11.29	雨宮 隆 氏 (横浜国立大学)	湖沼生態系管理に関する数理科学の理論と実践
第3回	2008. 1.25.	天野 要 氏 (愛媛大学)	代用電荷法による数値等角写像の方法
第4回	2008. 5.16	千葉 逸人 氏 (京都大学)	Extension and unification of singular perturbation methods for ODEs based on the renormalization group method
第5回	2008. 6.30.	佐竹 暁子 氏 (北海道大学)	繁殖同調の数理モデルと生態系と人間社会のカップリング
第6回	2009. 7.13.	小林 健太 氏 (金沢大学)	非凸領域における有限要素解の事前誤差評価
第7回	2009. 8.7.	服部 哲弥 氏 (慶応大学)	Move-to-front 規則, Burgers 型方程式, そして web アクセスランキング解析
第8回	2009. 12.7.	降旗 大介 氏 (大阪大学)	ボロノイ格子を用いた、自由形状領域での離散変分導関数法
第9回	2010. 10.8.	小林 幹 氏 (京都大学)	カオス力学系の手法を用いたGOYシエルモデル乱流における間欠性の解析

第 10 回	2010. 10.22.	佐々木 英一 氏 (京都大学)	回転球面上の帯状流の分岐
第 11 回	2010. 12.24.	柴山 充瑠 氏 (京都大学)	衝突多様体論による可積分性の判定
第 12 回	2011. 2.4.	Rhodri Nelson 氏 (英国・Imperial College London)	Modelling vortex-vortex and vortex-boundary interaction
第 13 回	2011. 2.8,	Nitsan Ben-Gal 氏 (イスラエル・Weizmann Istitute)	Non-Compact Global Attractors and Dynamics at Infinity for Slowly Non-Dissipative Reaction-Diffusion Equations

B. JSTシンポジウム「環境問題における数理の可能性」の開催

上記研究集会を、JST戦略的創造研究推進事業 国際強化支援策の資金援助を受け、また北海道大学大学院理学研究院数学部門・北海道大学数学連携研究センター・横浜国立大学GCOE「アジア視点の国際生態リスクマネジメント」との共催で開催した。本研究集会では、環境問題の解決に資する数理科学的アプローチの可能性について、外国人2名を含む招待講演者6名による先端の研究成果の発表が行われるとともに、ポスターセッション14名による発表を通じて参加者全員を交えた活発な議論が行われた。招待講演者による発表のテーマは、(1)氷河の温暖化による影響を調べる数値シミュレーション(Marco Picasso教授)、(2)空間分布を持った数値データの統計的処理(栗原考次教授)、(3)気候変動にともなう乾燥と皮膚への影響とその数理科学モデルによる研究(傳田光洋博士)、(4)生物多様性と食物網解析(Axel Rossberg博士)、(5)地球温暖化予想モデルの数理的展開(伊藤公紀教授)、(6)生態系保護を目指す河川工学と数理モデル(辻本哲郎教授)であった。これらの講演すべてにおいて、それぞれ数理的アプローチの手法紹介や問題点また今後の方向性などについて問題提起が行われた。研究者また、公募により開催されたポスターセッションでは、分野を超え多くの参加者全員によるきわめて活発な議論が行われ、招待講演だけではカバーできなかった様々な分野とつながる環境問題や数理的な方法が公表された。また、特筆すべき成果として、最終日には参加者全員参加による総合討論の時間が設けられ、講演者や数学領域のさきがけ研究員からなる組織委員および参加者からも活発な意見が交換された。そこで環境問題のようなきわめて学際的な分野については、従来のような一つの学問体系として問題にアプローチするのではなく、強固な学問的背景を持つ多くの研究者が一つの「共通問題」として環境問題をとらえ、互いに協力しあいながら解決のため「研究者の鎖(chain of researchers)」の枠組みを作り、それによりアプローチするのが効果的であり、数学者は自身の持つ方法論や考え方を活かして問題の様々な局面に挑戦する形がよいという意見が出された。実際、数学が本来もつ論理性・抽象性や普遍性をうまく応用することによって、これまでにない新しい発見があることが期待され、それを実現するためにも今後継続的にこうした異分野研究者の交流が必要との共通認識を持つに至った。こうした認識は数学による諸分野におけるブレークスルーの探索という研究領域の環境科学方面への展開手法を考える上で極めて示唆的であると思われる。

詳細はホームページ<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/080611/program.html>に掲載されている。これらの講演内容をベースにした講究録(北大数学講究録Vol.136)も発行し、広く本研究集会の成果を公表した。本講究録は上記HPからダウンロード可能になっている。

C. 研究成果の発表に関する主要な招待講演

(1) IUTAM シンポジウム Vortex Dynamics; 150 Years (2008 年 10 月 13 日～16 日)

選抜講演者

- (2) 日米先端工学シンポジウム(JAFoE)(2009 年 11 月 12 日～14 日) 招待討議者
- (3) 日本学術会議 理論応用力学講演会 (2011 年 3 月 6 日～8 日)
OS「多重連結領域問題の数値解析とその周辺」基調講演者

その他の講演・発表については「外部発表連絡票」にすべて記載している。

D. 様々な他分野研究機関との研究交流会の参加

本さがけ研究の一つの目標として環境・数理を結びつける研究機関や研究者との交流や、理論展開に必要な数学者との共同研究や研究交換が必要である。これを積極的に推進し、さがけにおける水圏環境理論の数学構築の構築とその応用の展開に多いに役立った。

- (1) UCLA IPAM プログラム「Optimal Transport」(2008年3月11日～13日)
- (2) 国際研究集会 Resilience 2008 (ストックホルム 2008年4月14日～16日)
- (3) ケンブリッジニュートン研究所「Nature of High Reynolds Number Turbulence」
(2008年9月～12月)に参加
- (4) 英国 Sheffield 大学応用数学科滞在(2008年9月～2009年3月)
- (5) 国立環境研究所来訪(2010 年 12 月 15 日)
- (6) 豊田中央研究所交流会(2010 年 12 月 20 日～21 日)

3. 今後の展開

《基礎理論の CREST 研究への展開》本さがけ研究において、数学基礎理論として構築した多重連結領域における点渦力学理論は、天野らによる数値等角写像の手法と組み合わせることで、水圏環境の問題のみならず、非常に多くの問題に適用可能であることが明らかになった。すなわち生物の飛翔や遊泳、風力発電のプロペラの配置や形状、スキージャンプやヨットセーリングなどのスポーツ力学などにおいても、ある理想的な状況において、境界と境界から生成されて渦との相互作用がその運動の理解に重要な役割を果たすことが多くの研究から明らかになりつつあり、この数学的な基礎として本理論が適用可能であることがわかった。このことを受けて、本理論を核として「多重連結領域における境界と渦の相互作用」をキーコンセプトとしたプロジェクトを提案し、平成 23 年度 JST 数学領域における CREST 研究計画「渦・境界相互作用が創出するパラダイムシフト」として採択された。本 CREST 研究計画はさがけ研究のさらなる発展を目指したものとして今後も強力に推進する予定である。

《環境問題への本格的応用に向けて》本さがけ研究では水圏環境問題における流れの構成に関して、多くの成果が多く得られた。また、それを用いて、汚染物質の拡散(移流拡散方程式)や生態系の発展(移流拡散反応方程式)とのカップリングが可能になった。また、河川領域といったテスト問題に対しても、自由に流れ場を構成することができるようになった。こうした数理的・数値的の手法の確立がなった現在、今後はこれらの成果を実際の環境問題へ応用したい。その流れとして上記 CREST 研究の中には「環境工学・エコデザイン」をターゲット分野の一つとして掲げており、また、数理環境に関するポスドクが現在 JSPS の外国人特別研究員として申請中であり、本研究員の採択があった場合はより一層強力に研究が推進できるものと思われる。また環境における他分野研究者との連携も推進したい。本さがけ研究のおかげで、国立環境研究所の研究グループとの交流が始まりつつあり、河川環境汚染や河川生態学、環境基準の確定のための数理モデルなど、今後、相互の研究分野間の連携を図る計画が進行しており、上記 CREST 計画の中でさらに共同研究を拡大する予定である。

4. 自己評価

《理論的研究》当初計画に基づいて二次元多重連結領域における非粘性・非圧縮流体の運動を取り扱える数学的枠組みに関する研究は順調に進んだ。特に、本さがけ研究を始めた結果として数値等角写像の理論が極めて有益な数値的手法であることがわかり、理論

が他分野協働のための基礎理論として展開できるようになったことは想定を越える成果であった。そのおかげで、本理論が適用範囲を拡大し、水圏環境問題のみならず、「渦・境界相互作用」というキーワードで、生命流体・スポーツ力学・エコデザインなどにも応用できることが判明し、それが CREST 研究につながったことは、さきがけ研究の一つの成果と考えている。一方で、理論の中核をなす多重連結領域に付随して定義される Schottky-Klein-Prime 関数の代数的研究も目指したが、こちらは力及ばず小さな結果にとどまり大きな成果を得られなかった。この方向での研究は今後も続けていきたいと考えている。

《協働研究》 他分野協働を実際に行うための枠組みとして、数値等角写像と標準領域における点渦力学理論が完成し、さらに、それを現実の流れに応用が可能な形にまで展開できたことは大きな成果であった。また、多重連結領域における標準流れの数値的構築が可能になったことや、それらの流れに基づいて物質移流や生態系モデルを数値的に解く数値スキーム（埋め込み境界法・コンパクト差分スキーム法）が構成できたことも当初の予定通りの成果である。本研究対象である「水圏環境」への本格的展開としては、特に、河川の流れを構成する多重連結チャンネル領域の流れの構成などは、衛星画像からとりこまれたデータから流れを構成するところまで完成できたことが、今後の河川環境学分野への進出の大きな足がかりとなったことは極めて有意義だと考えている。一方で、当初目指していたこれら一連の衛星画像から流れ場構成までを一環して行うソフトウェア開発については、実際にこの作業の自動化がそれほど簡単でないということが例を積み重ねるに従って次第に明らかになってきたため、今後の研究で経験を積み重ねていく形で終わることになったのは残念であるが、こちらも後継の CREST 計画の方で可能な限り実現したいと考えている。

《さきがけ研究としての成果》 研究成果と明記できるかどうかはわからないが、本さきがけ研究を通じて、他分野応用を狙う気鋭の他のさきがけ研究者と知り合うことができたことがたいへん有意義であった。特に領域会議において、従来の研究発表だけでなく、オーガナイズセッションを企画させていただき、そのとりまとめ役としてさきがけ研究者横つなぎや戦略目標実現のための活動を支援できたことは極めて有意義であった。加えて、さきがけという活動を通じて、従来の数学研究者としては決して知り合えることのない多くの環境関係の研究者と知り合えたことは今後の CREST 研究のみならず、数理環境学という今後の環境問題を考える一つの軸となりうる分野の構築に向けた大きな財産となった。

《全体を通じての自己評価》 研究課題である「水圏環境力学理論の構築」という目的の中心的な目的としての理論構築は、ほぼ当初通りの成果であった。その応用という面では、数値的な解法の確立は一部の問題では進んだものの、本格的な協働研究にはこの期間で至らなかった。一つには理論構築が目的であったことにもあるが、もう一つには新たに作り上げられた理論の本格的応用を実施するには、理論を広めその適用範囲を示し、現実問題を扱う環境科学者に理解を深めてもらう活動が必要であったようである。このようなことは本課題の後半1年程度の間急速に進んだと思うが、少し時間がたらなかった。しかし、この流れを活かして、今後の CREST 活動でも継続的に本理論の本格的応用に向けて他分野協働を積極的に活かしていきたいし、それは可能だと考えている。

5. 研究総括の見解

身近な水圏環境（河川・湖沼・海洋）で起こる問題に対して統一的に扱える数学理論へ水圏環境力学への構築を目指し、二次元多重連結領域の複雑な形状やその内部障害物の配置が自由に扱えるような理論構築を行なうことができた。また適用範囲の拡大により、水圏環境問題のみならず「渦・境界相互作用」というキーワードで、生命流体・スポーツ力学・エコデザインなどにも応用できることが判明し、今後が大きく期待される。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	T. Sakajo and Y. Amaya, Numerical construction of potential flows in multiply connected channel domains, submitted to <i>Computational Methods and Function Theory</i> , 査読中 (2010)
2.	T. Sakajo, Equation of motion for point vortices in multiply connected circular domains <i>Proc. Roy. Soc. A</i> , vol. 465 pp. 2589–2611 (2009), doi:10.1098/rspa.2009.0070
3.	T. Sakajo, An extension of Draghicescu's fast tree-code algorithm to the vortex method on a sphere, <i>Journal of Computational and Applied Mathematics</i> , vol. 225 pp. 158–171 (2009) doi: 10.1016/j.cam.2008.07.021
4.	P. K. Newton and T. Sakajo, Point vortex equilibria on the sphere via Brownian ratchets, <i>Proc. Roy. Soc. A.</i> , vol. 465 pp. 437–455 (2009), doi:10.1098/rspa.2008.0203
5.	T. Sakajo, Non self-similar, partial and robust collapse of four point vortices on a sphere, <i>Physical Review E</i> , vol. 78 No. 1 (2008) doi: 10.1103/PhysRevE.78.016312
6.	T. Sakajo and K. Yagasaki, Chaotic motion of the N-vortex problem on a sphere: I. Saddle-centers in two-degree-of-freedom Hamiltonians, <i>J. Nonlinear Science</i> , vol. 18 (5) pp. 485–525 (2008) doi: 10.1007/s00332-008-9019-9

(2)特許出願

なし

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

1. (著作物) T. Amemiya, H. Serizawa, T. Sakajo, K. Itoh, Mathematical models for dynamics and management of algal blooms in aquatic ecosystems, submitted to Aquatic Ecosystem Research Trends, NOVA Publishers (2008)
2. (著作物) Proceedings of JST Presto Symposium on Mathematical Sciences towards Environmental Problems <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/080611/> (北大テクニカルレポート136号として出版済)
3. (国際研究集会) JSTシンポジウム「環境問題における数理の可能性」(2008年6月11日～13日)
4. (国際研究集会) IUTAM シンポジウム Vortex Dynamics; 150 Years, 選抜講演者 (2008年10月13日～10月16日) コペンハーゲン
5. (国際研究集会) 日米先端工学シンポジウム(JAFoE) 招待討議者(2009年11月8日～12日)
6. (国内研究集会) 日本学術会議 理論応用力学講演会 (2011年3月6日～8日) OS「多重連結領域問題の数値解析とその周辺」基調講演「点渦力学と数値等角写像による新展開」

研 究 報 告 書

「臨床医療診断の現場と協働する数理科学」

研究期間：平成 19 年 10 月～平成 23 年 3 月

研究者：水藤 寛

1. 研究のねらい

本研究では、数理科学と臨床医学の協働により、双方の研究に関して実質的な進展をもたらすことを目指した。経験的知識の集積という面が強い現代の臨床医療に対して、数理モデルという新しい見方とその解を提供することで貢献し、それを通じて数学／数理科学自身も新たな発展を遂げることを目的とした。この目的を実現するため、近年臨床診断において中心的な役割を占めるようになってきている放射線診断の専門家との協働を軸として進めることとした。

2. 研究成果

本研究では具体的な対象として、大動脈内血流解析、脳脊髄液流動解析、造影剤濃度の時系列データを用いた灌流解析などを取り上げ、臨床医との協働を通して研究目的の実現を目指してきた。その中心となったのは大動脈内の血流解析であったため、以下でその成果の概要について述べる。

(1) 背景

動脈硬化をはじめとする種々の要因に起因して大動脈が異常に拡張した状態を大動脈瘤と呼ぶ。大動脈瘤の治療法のひとつとして、ステントグラフト内装術がある。これは、自己伸展する金属骨格を取り付けた人工血管を瘤のある部位まで運び、血管に固定することで血管内壁をカバーし補強する治療法である。これにより、血管内壁にかかる力を軽減し、それ以上の変形や破裂を防ぐというものである。大動脈瘤は長期的な経過によって拡大を示すが、どのような場合に拡大が進行するのか、血管の形状と長期的な大動脈瘤の形状変化についての関連性は明らかとなっていない。またステント治療後、治療部が屈曲、延長するケースが一部で見られるが、どのような場合にそのような現象が生じるのかは未だ明らかにされていない。大動脈形状によって生じる血管内の血行動態には個体差があると考えられ、これが長期的な大動脈瘤・ステント留置後の大動脈の形態変化と密接に関連していると推察されているが、その詳細についても明らかとなっていない。本テーマでは、数値シミュレーションによって個々の大動脈形態に特有の血管内の血流動態を明らかにし血流による壁面応力を評価することで、大動脈瘤の予後の予測と、ステント治療の適用の一助とすることを目指した。大動脈瘤には、胸部大動脈瘤（thoracic aortic aneurysms）、腹部大動脈瘤（abdominal aortic aneurysms）、脳動脈瘤（Intracranial aneurysms）など、発生する部位によって特徴には差があるが、本研究では胸部大動脈瘤を主な対象とした。

一般に血管のような複雑形状物体を表現する場合には、有限要素法を用い、対象領域を四面体、六面体などの要素で分割する手法が多く採用されている。しかし、本研究においては流れの主流方向が決まっており、かつ流れの様相を主流である血管の軸方向とそれに垂直な面内の 2 次流れに分割して考察することが重要であるため、一般座標系における差分法を採用した。そして座標軸のうちの一つを流れの主流方向に一致するようにすることで、精度の向上と解析の容易さの実現を図ったものである。

(2) 形状表現

血流の計算を行うため、医療画像を用いて血管形状を再構成した。その手順は次の通りである。

① 医療画像からの血管中心軸と半径情報の抽出

放射線医学の分野で使用されている median axis transform の手法を用いて、胸部大動脈の中心軸の座標値と中心軸上の各点における半径の情報を CT 画像から抽出する。

② 中心軸に沿う一般座標格子の生成

ひとつの座標軸が血管の中心軸にほぼ沿うような一般座標系 (ξ, η, ζ) を生成する。ただし、その中の ζ 軸がほぼ血管の中心軸に沿うようにとる。ここで、「ほぼ」の意味は、①で抽出した中心軸の形状に対してある程度のスムージングをほどこした上で一般座標系を生成し、それ以降では再度オリジナルの中心軸形状を用いるという意味である。これは、計算に用いる一般座標系格子の極端なゆがみやねじれによる数値計算の不安定性を回避するためである。図 1 に、そのようにして作成した格子系の例を①で抽出した中心軸と共に示す。

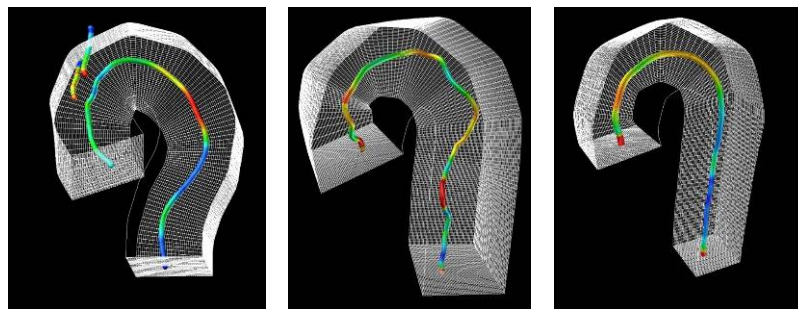


図 1 血管中心軸と差分格子

③ 血管形状を表現する特性関数の生成

前項で作成した格子系内の各点において、血管形状を表現する特性関数 $\lambda(xyz)$ の値を設定する。特性関数は、血管の内側で 0、外側で 1 の値をとり、その境界においてはある程度のなめらかさを持って変化する関数である。図 2 に、このようにして生成した特性関数の $\lambda=0.5$ の等値面を、ii) で構成した一般座標格子と併せて示す。

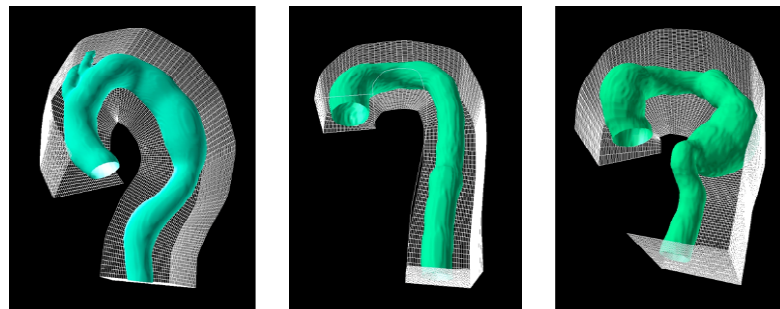


図 2 特性関数によって表現された血管形状

これらの手法により、医療画像から一貫した手順で差分格子を生成することが可能となった。このような中心軸適合格子系は、計算精度と計算効率の良好なバランスを実現することが期待できる。

(3) シミュレーション結果と臨床医との検討作業

流れ場の数値計算を行った後、それを用いて壁面応力の時間平均を計算した。例として、剪断応力成分を拍動周期にわたって平均した結果を図 3 に示す。

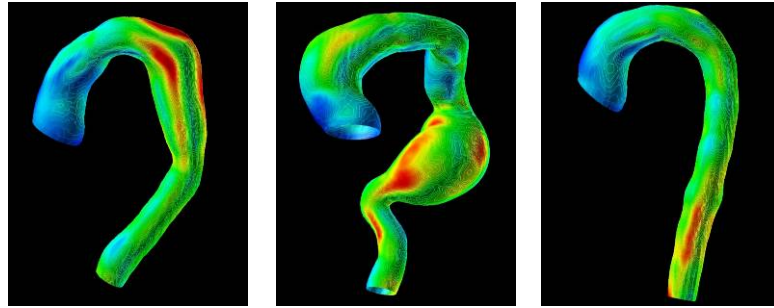


図3 時間平均剪断応力の分布

しかし、このような応力分布図からは、臨床における重要な情報を読み取ることは困難であった。そこでこのような応力場の長期間にわたる影響を見積もるため、血管の拡張に関する応力成分 $E(s)$ と、血管の曲がりに関する応力成分 $B(s)$ を定義した。

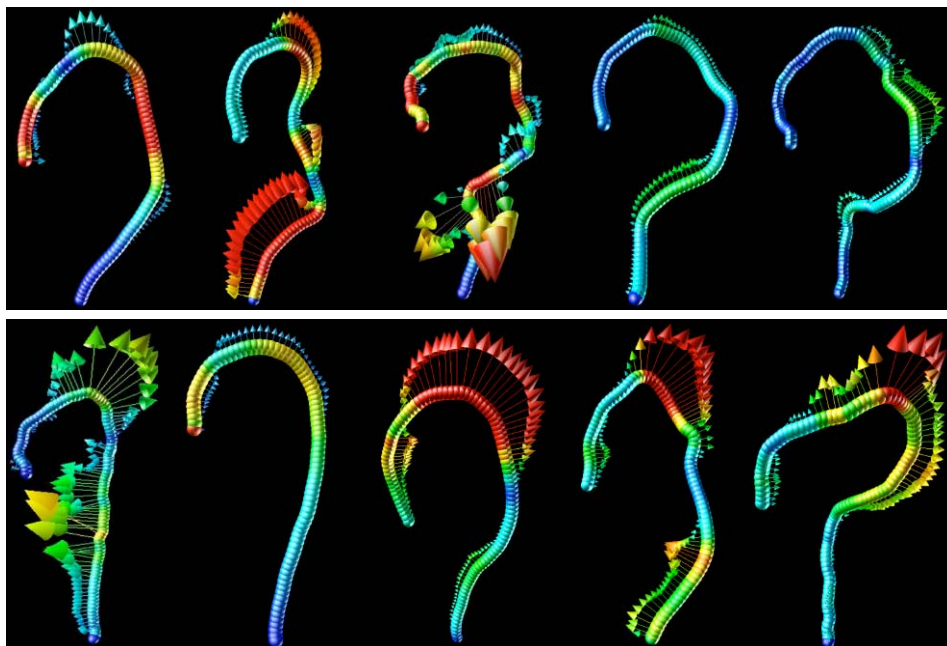


図4 形状による応力分布の違い

図4は、本研究で用いた10例の大動脈形状に対して計算を行い、 $E(s)$ と $B(s)$ を表示したものである。ここで中心軸の色は $E(s)$ を表し、中心軸上に描かれたベクトルは、 $B(s)$ の大きさと方向を示している。図5より、形状の違いによって応力分布が大きく異なっていることがわかる。臨床医との協働の過程で、図4のような表現方法は、臨床判断において血流の血管壁に対する影響を把握するために有用であることがわかった。このような表現方法、意思疎通方法を工夫することは、今後の数理科学と他分野との協働に置いても非常に重要であると思われる。

図4に示したような強い形状依存性の主な原因の一つとして考えられるのは、図5に示すような心臓拡張期における旋回流の存在である。これは、心臓収縮期に生成された強い渦度が拡張期にまで残っているもので、血管形状によって大きな違いがみられた。

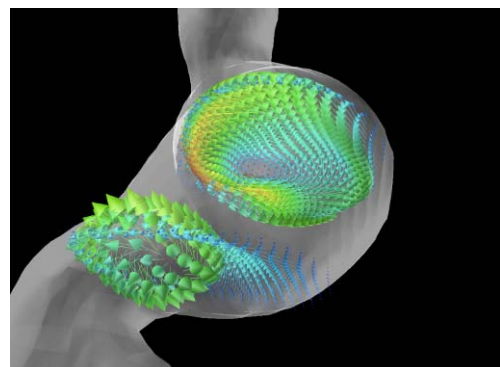


図5 拡張期における旋回流

(4) 流れのメカニズムの解明

前節で述べたように、臨床データを用いた計算によって、予後に大きな影響を与えるメカニズムの一端を見ることができた。そこで、そのメカニズムを詳細に調べるため、特徴と思われる因子を抽出してモデル計算を行った。特徴因子のうち最も重要と思われるのは血管の振れであった。図 6 と 7 に、単純な螺旋管形状を用い、振率が 0 の場合とそうでない場合の断面内 2 次流れの様相を示す。流入境界における流れは拍動流とし、胸部大動脈と同程度の曲率を与えている。

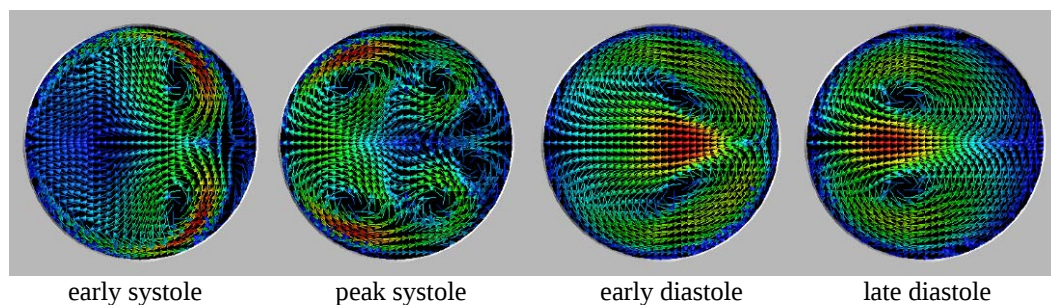


図 6 螺旋管内流の 2 次流れ（振率 = 0）

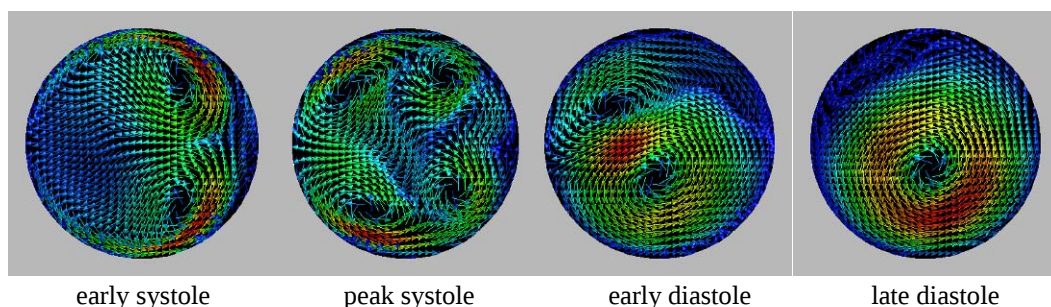


図 7 螺旋管内流の 2 次流れ（振率 = 5）

図 6 では曲がり管内流れに特徴的な Dean 渦が見られるが、図 7 ではそれらが壊れ、拡張期には一つの大きな旋回流に変化していることがわかる。これにより、胸部大動脈において個人差の小さい曲率分布に比べて、個人差の大きい振率分布が血流の渦構造に影響していることが示唆された。

(5) まとめと展望

前節の結果は臨床医学的には重要な知見であり、今後はより多数の臨床データを用いた検証を通してその詳細を解明していくことが、臨床医学に対する数理科学の貢献を実現するために必要である。

その他に、本テーマにおいては胸部大動脈の形状のみを用いた統計学的判別分析、血管ファントムを用いた医療用 MRI による血流測定実験なども行った。これら複数の視点からのアプローチは、数理科学の成果を実際の臨床現場に適用するために欠かせないプロセスである。今後も臨床医との緊密な連携を通して臨床医学者と数理科学者の間の研究上のフィードバックを積み重ねていくことが重要であると考ええる。

3. 今後の展開

本さがけ研究の成果をふまえ、今後は臨床医との協働をいっそう進め、様々な病態メカニズムの解明と共に、臨床医療診断における熟練した医師の判断に内在するアルゴリズム

を抽出する方向に展開することが重要であろう。本さがけ研究に引き続くCREST研究では、さがけ研究の中で築いてきた臨床医と数理科学者の双方に渡るネットワークを生かし、数理科学と臨床医学の真の協働の実質化に向けて研究を進めて行く計画である。具体的には、本さがけ研究で行った大動脈形状とステント治療に関する予後予測の他、腫瘍等の画像診断の自動化等にも発展していく。これにより、数理科学が臨床医療に対してより大きな貢献をしていくと共に、数理科学自身にとっても、現実社会からの要請という新しい動機による新たな展開が期待されるものである。

4. 自己評価

本さがけ研究では当初の目的として、(1)数理モデルという新しい見方を提供することによる臨床医学への貢献、(2)それによる数学／数理科学自身の新たな発展、のふたつを挙げた。大動脈血流解析などにおいては、臨床医との協働作業によって、蓄積されたデータからあるメカニズムを抽出することができ、臨床応用につなげる道筋をつけることができた。これは数理モデルという新しい見方を導入することで因果関係を明示する具体例となり、当初の目的(1)を達成したものであると言える。さらに重要なことは、そこに至るまでの過程において、分野の違いによる用語の違い、考え方の違い、その他諸々の違いを乗り越えて、異分野間の協働作業を行う経験を積んだこと、及びそのような協働作業を今後も継続、発展させていく見通しを得たことである。

一方、(2)の数理科学自身がこの研究によって新たな発展を遂げたのか、という点に関しては、具体的な形を示すことは残念ながらできない。臨床医療との協働のために必要なあらゆる数理科学的知識や技術の取得・構築を、他の多くの数理科学者の協力・援助を得て進めてきたが、それによって何か目新しい数理科学的概念や手法が構築されたわけではない。しかし、非常に幅の広い数理科学の研究分野の中から、ある目的のための必要に応じて協力を得られるようになったことは、それ自体が数理科学の発展であるということもでき、それを可能にしたのがこのJST 数学領域という場であったと考えるものである。

5. 研究総括の見解

数理科学と臨床医学の協働により、双方の研究に関して実質的な進展をもたらすことを目指し、大きな成果を挙げた。具体的には大動脈内血流解析、脳脊髄液流動解析、造影剤濃度の時系列データを用いた灌流解析などを取り上げ、シミュレーション手法の開発ならびに、臨床医学的に重要な知見を得ることができた。とりわけ大動脈血流解析では、形態からは判定し難い動的量の可視化に成功し、臨床現場と数学との橋渡しをなし得た貢献は大きい。今後は臨床医学に対する数理科学の貢献を実現するために、より多数の臨床データを用いた検証を通してその詳細を解明していくことが望まれる。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	水藤寛, 植田琢也, “胸部大動脈における血流の数値シミュレーション”, Medical Imaging Technology, Vol. 28, No. 3, pp. 175-180, 2010.
2.	七澤洋平, 水藤寛, 植田琢也, 南学, “肝臓 Perfusion 解析における逆解析手法とデータ補正”, 応用数理学会論文誌, Vol. 18, No. 4, pp. 147-164, 2008.
3.	K. Kaneoya, T. Ueda, H. Suito, Y. Nanazawa, J. Tamaru, K. Isobe, Y. Naya, T. Tobe, K. Motoori, S. Yamamoto, G. D Rubin, M. Minami and H. Ito, “Functional computed tomography imaging of tumor-induced angiogenesis: Preliminary result of the new tracer kinetic modeling using a computer discretization approach”, Radiation medicine, Vol. 26, pp. 213-221, 2008.

(2)特許出願
なし

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

	1. “新しいタイプの臨床医療診断を目指した放射線医学と数理科学の協働”, 水藤寛, 東北大学ワークショップ「数学の展開—諸分野との連携を探る」, 東北大学理学部キャンパス, 2010.11
	2. “放射線医学と数理科学の協働による新しいタイプの臨床医療診断”, 水藤寛, 植田琢也, 日本応用数理学会 2010 年度年会オーガナイズドセッション, 明治大学駿河台キャンパス, 2010.9
	3. “Vortex dynamics in thoracic aortic aneurysms”, H. Suito, T. Ueda, M. Murakami and G. D. Rubin, ECCOMAS CFD 2010, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal, 2010.6
	4. “Numerical simulation of blood Flow in thoracic aorta and evaluation of wall stresses”, H. Suito, T. Ueda and M. Murakami, Russia-Japan Symposium on Numerical Experiment in Hydrodynamical Instability and Turbulence with High-performance Computing, Steklov Mathematical Institute, Moskow, Russia, 2009.11
	5. “Simulation of blood flow in thoracic aorta for prediction of long-term adverse events”, H. Suito, T. Ueda and G. D. Rubin, 1st International Conference on Computational & Mathematical Biomedical Engineering, University of Wales, Swansea, UK, 2009.6

研 究 報 告 書

「科学工学モデルの安定性に関する計算機援用解析」

研究期間：平成19年10月～平成22年3月

研 究 者：長藤 かおり

1. 研究のねらい

自然科学や工学における現象解析のための数理モデルについて、主にその安定性を中心に数学理論と計算機を用いて厳密に解析する。通常の数値シミュレーション(近似計算)による解析結果に対して数学的な保証を与えること、また理論的な解析が不可能、あるいは非常に複雑な場合に対して計算機援用による解析手法を確立することを目標とする。

2. 研究成果

研究期間中に得られた成果は下記の通りである：

- (1) 1次元シュレディンガー作用素に対する固有値の除外法および非線形シュレディンガー方程式の解の検証
- (2) 非圧縮粘性流体の安定性問題
- (3) Travelling wave の安定性証明
- (4) 微分作用素の複素固有対の精度保証
- (5) 2次元反応拡散方程式の解の検証
- (6) 関数方程式の解の安定性証明

以下、それぞれについてまとめる。

(1) 1次元シュレディンガー作用素の固有値問題

$$-u'' + q(x)u + s(x)u = \lambda u, \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える。ここで $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ は周期関数、 $s \in L^\infty(\mathbb{R})$ は無限遠方で減衰する摂動項である。これはバンドギャップ構造の本質的スペクトルを持つ作用素であり、スペクトル・ギャップにおいて離散スペクトル(固有値)が存在するか否かは固体電子論において重要な問題である。この問題の固有値の非存在範囲の検証について、非常に効率的な手法を開発することができ、さきがけ研究開始当初から進めていた本研究について新たな検証数値例を追加することにより論文投稿することができた。また、周期ポテンシャルを持つ1次元非線形シュレディンガー方程式の解の検証法も提案し、検証数値例を与えた。(論文投稿準備中)

(2) 2次元領域における非圧縮粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

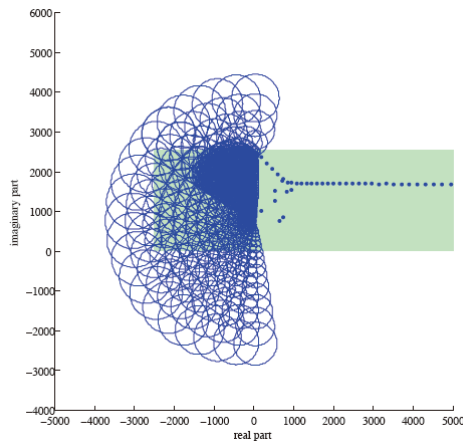
を考える。ここで (u, v) は速度ベクトル、 p は圧力、 R は Reynolds 数である。この支配方程式を満たす基本流れとして、

$$(u, v) = (U(y), 0), \quad p = p_0 + \frac{1}{R} \frac{d^2 U(y)}{dy^2} x \quad (p_0 \text{ は適当な定数})$$

を考え、この基本流れの安定性を考える際に基礎的な役割を担うのが、次で記述される Orr–Sommerfeld 方程式である：

$$(-D^2 + a^2)^2 u + iaR[U(-D^2 + a^2)u + U''u] = \lambda(-D^2 + a^2)u \quad \text{in } I$$

ここで $D = d/dx$ 、 a は波数である。基本流れの安定性は Orr–Sommerfeld 方程式の固有値 λ と密接に関連している。つまり、適当な境界条件のもとで、 λ の実部がすべて正であれば安定であり、そうでなければ不安定である。本研究では $U(x) = 1 - x^2$ 、 $I = [-1, 1]$ となる Poiseuille flow の場合について安定性を厳密に証明した。



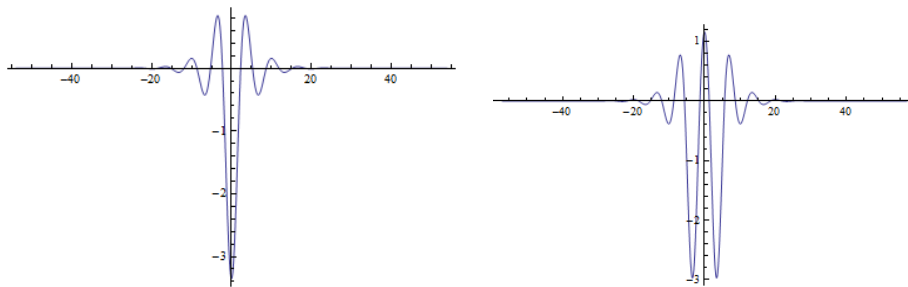
緑の領域は理論的な固有値の存在範囲を表す。青い円内には固有値が存在しないことを証明できたため、固有値の実部はすべて正であることが分かる。

(3) 指数関数的な非線形性を持つ beam 方程式に対して、ある波速に対して少なくとも 36 個の Travelling Waves が存在することが計算機援用証明により 2006 年に Breuer らにより示されているが、これらの解の軌道安定性は重要な未解決問題であった。本研究では、

$$\frac{d\varphi}{dx^4} + c^2 \frac{d\varphi}{dx^2} + e^\varphi - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

の解 φ を用いて表される Travelling Wave $u(x, t) = 1 + \varphi(x - ct)$ について、その軌道安定性・不安定性を計算機援用証明により厳密に判定することに成功した。

近似解の形状



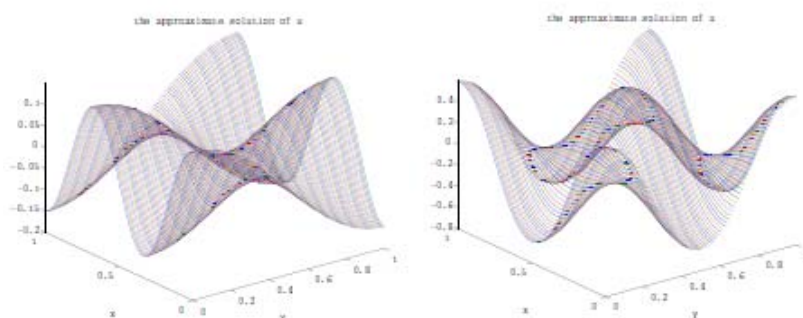
(4) 非線形微分方程式系の周期境界値問題に対する数値的検証法を提案した。特に、作用素が非対称で固有関数が周期境界条件を満たす場合の多重複素固有値および複数の単純（実または複素）固有値を精度保証付きで求める手法を開発し、良好な検証数値例を得た。上の(2)でも見たように、複素固有値の存在（あるいは非存在）範囲を数学的に厳密に求めることは、安定性の解析において非常に重要である。

(5)2次元有界領域における反応拡散方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v) \end{cases}$$

をノイマン境界条件のもとで考えた場合の定常解に対する数値的検証法を提案し, いくつかの f, g について解を包み込むことに成功した。

近似解の形状



(6) $(S, \circ)$ を groupoid とするとき, すべての $x, y \in S$ に対して

$$(x \circ y) \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ (y \circ y)$$

を満たすならば S は square-symmetric であるという。本研究では, 左単位元を持つ square-symmetric な groupoid 上で定義された実数値関数に対する関数方程式

$$\max \{ f((x \circ y) \circ y), f(x) \} = f(x \circ y) + f(y)$$

の Hyers-Ulam 安定性を証明した。

3. 今後の展開

上記の(1), (3), (5)について, 既にいくつかの発展的な研究課題を設定し取り組んでいる。まず(1)については, 1次元問題における解の検証だけでなく, それが ground state であることの証明法に取り組み, 数値実験を行っている。また多次元問題への拡張にも取り組んでいる。(3)については更に効率的な安定性判定法の構築を目指すとともに, 吊橋単独ではなくその上を物体(列車等)が走る場合の進行波についても問題を拡張しているところである。(5)については, 時間発展問題としてのパターン形成の計算機援用証明法に取り組んでいる。これは計算機援用解析と半群理論を併用するもので, 発展方程式に対する計算機援用証明法としての新しい結果となることが期待できる。また, 関連する解の安定性についての考察も既に進めている。

4. 自己評価

「安定性」というキーワードのもとに, 当初目標に掲げた3つの研究テーマ

(I) 非圧縮粘性流体の安定性問題

(Ⅱ)反応拡散方程式系の解の安定性解析

(Ⅲ)Schroedinger 作用素のスペクトル解析

に取り組み、それぞれにおいて新たな知見を得ることに成功した。(Ⅱ)の安定性に関わる部分と(Ⅲ)の多次元への拡張については間に合わなかったが、今後の展開として既に研究に着手しており、近い将来の解決を目指している。さきがけ研究期間中に非常に多くの研究者との有益な研究討論の機会を持つことができ、それぞれのテーマにおける研究の進展に大いに役立った。他分野や企業との協働が十分でなかったという反省点が残るが、全体としては当初の目標の大部分は達成でき、更に関連する発展課題も設定できた。

5. 研究総括の見解

「安定性」というキーワードのもとに、当初目標に掲げた 3 つの研究テーマ(Ⅰ)非圧縮粘性流体の安定性問題、(Ⅱ)反応拡散方程式系の解の安定性解析、(Ⅲ)Schroedinger 作用素のスペクトル解析、に取り組み、それぞれにおいて精度保証に基づく計算機援用証明を実施し、新たな知見を得ることに成功した。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, A computer-assisted stability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, a special issue of ``Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE'' on ``Recent Progress in Verified Numerical Computations'', Vol.2, No.1 (2011), pp. 123-127.
2.	K. Nagatou, T. Morifuji, An Enclosure Method for Complex Eigenvalues of Ordinary Differential Operators, a special issue of ``Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE'' on ``Recent Progress in Verified Numerical Computations'', Vol.2, No.1 (2011), pp. 111-122.
3.	A. Gilanyi, K. Nagatou, P. Volkmann, On the stability of a functional equation characterizing the absolute value of additive functions, Annals of functional Analysis 1 (2010), No.2, pp.1-6.

(2)特許出願

該当なし

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

1. K. Nagatou, Y. Watanabe, S. Yamamoto and T. Kinoshita, Validated computations for elliptic systems of FitzHugh-Nagumo type, 13th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2008), The University of Texas at El Paso, USA (2008.9.30)
2. K. Nagatou, M. Brown, M.-N. Kim, Y. Watanabe, I. Wood, M. Plum, M.T. Nakao, Spectral Problem on 3-D Maxwell's Equations, 7-10 March 2009, International workshop on verified computations and related topics, University of Karlsruhe (TH), Germany. (2009.3.8)
3. K. Nagatou, Computer Assisted Proofs for Nonlinear Partial Differential Equations, INDAM Meeting: Theoretical and computational methods in nonlinear differential equations, Centro Residenziale Universitario di Bertinoro, Forli, Italy. (2009.9.16)
4. K. Nagatou, M. Plum, M.T. Nakao, Eigenvalue excluding for perturbed-periodic 1D Schroedinger operators, Conference on Inequalities and Applications 2010, Hajduszoboszlo, Hungary. (2010.9.20)
5. K. Nagatou, P.J. McKenna, M. Plum, Orbital stability investigation for travelling waves in a nonlinearly supported beam, SIAM/MSRI workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation, MSRI, Berkeley, California, USA. (2011.11.18)

研 究 報 告 書

「保険型金融商品のリスク分散メカニズムの解明」

研究期間：平成19年9月～平成23年3月

研究者：中野 張

1. 研究のねらい

本研究では、保険型の金融商品のリスク分散構造の理解を目指す。具体的には、最適な安全割り増しおよび保険集団化によるリスク分散を実現する、リスク分配・共有型のプレミアム算出原理の開発を行う。さらに、リスク分散構造を持つ金融商品の最適設計を行う。

2. 研究成果

第一に、 n 個のリスク分散対象（人、リスク種類等）を考え、このグループへの分散を指向する保険料計算原理の構築を行った。これはリスク計測の公理系を満たす動的リスク尺度として表される。この保険料計算原理が n 無限大の極限で期待値に収束することを示した。従来、リスク分散の原理は、一般には必ずしもリスク間の独立性が保証されないにもかかわらず、独立性を前提とする古典的な大数の法則によって説明されてきた。本研究の成果は全く異なる観点からリスク分散の原理を説明するものである。成果を纏めた論文は現在投稿中である。

第二に、保険リスクの証券化が実現するリスク分散構造を理解するため、大災害債券の最適設計問題を研究した。先行研究では考慮されていなかった市場価格の変動および投資機会を問題に組み入れ、発行者と購入者の間の確率ゲーム問題として定式化した。この問題を確率過程の optional 分解問題に帰着させることで、最適価格および最適クーポンの導出を行った。この成果は、通常の金利モデルのカリブレーションと災害リスクモデルの推定により直ちに実装可能なものである。成果を纏めた論文は現在投稿中である。

3. 今後の展開

第一の研究成果について、より一般の効用汎関数から構成される保険料計算原理についても同様にリスク分散効果を説明できるか研究したい。第二の研究成果について、大災害債券は金融危機後も市場規模は拡大してきており、その設計の重要性は増すと思われるので、より多様な元本棄損構造に対応できるよう理論を一般化し、災害リスクの推定も含め実証的な研究を行いたい。

4. 自己評価

本研究は、保険型金融商品の持つ多様なリスク分散構造の理解を目的としていたが、第一の研究成果については抽象度が高く具体的な商品レベルでの理解には及ばなかった。第二の研究成果については、個別の商品の最適化には成功したが、より一般的なレベルでのリスク分散構造の抽出に課題を残した。

5. 研究総括の見解

保険型の金融商品のリスク分散構造の理解を目指し、最適な安全割り増しおよび保険集団化によるリスク分散を実現する、リスク分配・共有型のプレミアム算出原理の開発と、リスク分散構造を持つ金融商品の最適設計を行った。とりわけこれまで考慮されていなかった市場価格の変動および投資機会も組み入れたものになっておりただちに実装可能となった点は評価できる。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

	1. Y. Nakano, Quantile hedging for defaultable claims, Recent Advances in Financial Engineering: Proceedings of the KIER-TMU International Workshop on Financial Engineering 2009, World Scientific, 2010, 219--230.
	2. Y. Nakano, Partial hedging for defaultable claims, Adv. Math. Econ., 14 (2011), 127--145.

(2)特許出願

なし

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

口頭発表

1. On the design of catastrophe bonds, CREST and Sakigake International Symposium: Asymptotic Statistics, Risk and Computation in Finance and Insurance 2010, December 16, 2010, Tokyo Institute of Technology.
2. Approximating Average Value-at-Risk, 諸分野との協働による数理科学のフロンティア, 2010 年 11 月 19 日, 京都大学
3. Quantile Hedging for Defaultable Claims, 数理経済学研究センター研究集会「経済の数理解析」, 2009 年 11 月 15 日, 慶應義塾大学
4. Premium Calculation and Optimal intertemporal risk diversification, ファイナンスの数理解析とその応用, 2007 年 11 月 20 日, 京都大学

研 究 報 告 書

「自己組織化としての皮膚バリア機能の数理解析」

研究期間：平成19年10月～平成23年3月

研究者：長山 雅晴

1. 研究のねらい

皮膚科学において病理学的研究や細胞レベルの研究は日々進歩しており、皮膚構成要素全体が持つ重要な機能であるバリア機能（保水機能と病原体等の侵入を防ぐ機能）に関する基礎的な研究も多く行われている。しかしながら、バリア機能の恒常性維持と早期回復に対する動的機構の研究はほとんどなされていないのが現状である。皮膚バリア機能は死んだ表皮細胞から構成される角質層が重要な役割を果たしている機能であり、バリア機能の形成過程においては「表皮細胞の分化、アポトーシス、角質層形成、細胞間脂質形成」を総合して考える必要がある。それ故に皮膚バリア機能動態を解明するためには皮膚を構成する細胞集団の振る舞いを明らかにしなければならず、実験による研究が困難となっていたからである。しかしながら、近年、皮膚のバリア機能に関する研究の中で

- (1) 角層が正常な場合、角層直下にカルシウムイオンの局在化がある。
- (2) 角層が破壊された場合、角層直下のカルシウムイオン局在が消失する。
- (3) 培養表皮細胞において空気暴露した部分から内部にカルシウムイオンの伝播現象がみられる。
- (4) アトピー性皮膚炎や老人性乾皮症などバリアに異常をきたす病気では表皮細胞内カルシウムイオンの濃度勾配が無い。

等の結果からカルシウムイオンの重要性がわかってきた。また、外的要因が皮膚バリア機能の回復に与える影響として

- (5) 空気暴露刺激の有無が角層の回復速度に依存する。
- (6) 空気暴露刺激を受けるとその深部にある基底細胞の分裂が促進する。
- (7) 角層破壊後に皮膚表面を正に帯電するとバリア機能の回復が遅れる。
- (8) 角層破壊後に皮膚表面を負に帯電するとバリア機能の回復が促進される。

が報告された。この実験結果からバリアの早期回復は電気仕掛けであることが予想される。これらの結果を総合すると、バリア機能の一部である「角層の形成・恒常性維持機能」と「角層破壊からの早期回復機構」は、カルシウムイオンによる情報伝達によって形成される自己組織化現象として考えることができる。そこで数理モデルを構成することによって、実験グループとの協働により数理科学的視点からカルシウムイオンの局在化とその伝播が角層の恒常性維持機構と角層破壊からの早期回復機構の本質的であることを明らかにする。また将来、本研究によりアトピー性皮膚炎、乾癬、老人性乾皮症等の皮膚バリア機能破壊が見られる皮膚疾患に対して、バリア機構破壊の要因を数理モデルの解析から明らかにすることができる可能性を与えることも目指す。

2. 研究成果

角層形成の数理モデル化をおこなうために次の3段階に分けて研究を遂行した。

(1) 細胞間カルシウムイオン伝播モデルの構成と局在化の再現

表皮細胞間カルシウムイオンの伝播を記述する数理モデルを構成するために、最初に、機械刺激によるカルシウムイオン伝播実験の数理モデルを構成した(図1)。この数理モデルは、既存モデルである1貯蔵庫モデルを基盤にして、表皮細胞のカルシウムイオン興奮によるATP放出現象を取り入れている。この数理モデルは機械刺激実験に現れるカルシウムイオン伝播を定性的に再現することが数値計算によってわかった。機械刺激実験とそれに対応する数値実験により、カルシウムイオン伝播は、細胞外からのATP刺激とGap-Junctionを通じたIP₃の拡散によって起こることがわかった。

数理モデル(図1)だけは自己組織的な局在解を形成しないことがわかり、皮膚構造に見られるカルシウムイオン局在は再現できない。従って、境界条件の影響によって局在化するのではないかと予測される。強すぎる機械刺激によって死亡した表皮細胞の周囲の細胞がカルシウムイオン興奮し続ける現象の考察から、数理モデル(図1)と細胞死に伴う細胞刺激物質の放出を仮定した数理モデルを構成し、3次元皮膚構造(図2)におけるカルシウムイオンの局在化の再現に成功した(図3)。この結果から、実際に皮膚においても表皮細胞が角質化する時点で何らかの刺激物質の放出が行われている可能性がある。しかし、現時点ではその存在は未確認のみである。

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = d_A \Delta A - K_A A + \sum_{i=1}^N I(c_i), \\ \frac{dP_i}{dt} = \sum_{j \in \Delta_i} w_{ij}(t) d_P (P_j - P_i) + \frac{K_{PA} A(t, \mathbf{x}_i)}{H_0 + A(t, \mathbf{x}_i)} - K_P P_i, \\ \frac{dc_i}{dt} = \sum_{j \in \Delta_i} w_{ij}(t) d_c (c_j - c_i) + f_c(P_i, c_i, h_i), \\ \frac{dh_i}{dt} = \frac{1}{\tau_h} f_h(c_i, h_i). \end{cases}$$

図1：細胞間カルシウムイオン伝播の数理モデル

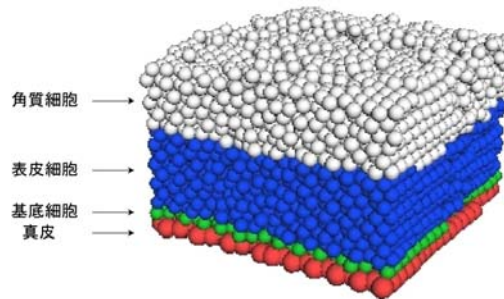


図2：数値計算のための3次元皮膚構造

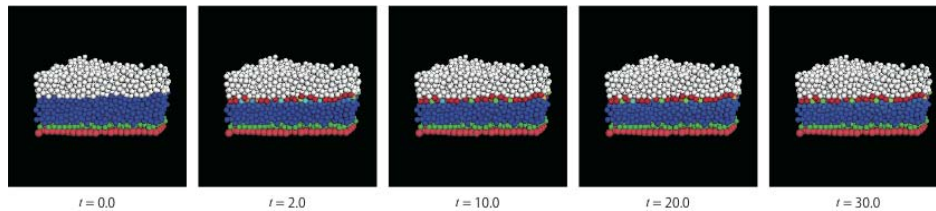


図3：角層直下でのカルシウムイオン局在の再現。

数理モデル(図1)に対して3次元構造皮膚において角層破壊時のカルシウムイオンの挙動について数値計算を行った。空気暴露実験において暴露した細胞からATPを放出することが知られており、その結果を用いて、角層破壊された表皮細胞部分に空気暴露があると仮定し、空気に触れている表皮細胞からATPが放出される条件下で数値計算を行った。その結果、表皮細胞の深部へとカルシウムイオンの伝播現象が見られた(図4)。この結果から、生体表皮細胞においても空気暴露部分からカルシウムイオン伝播が起こっているのではないかと考えられる。

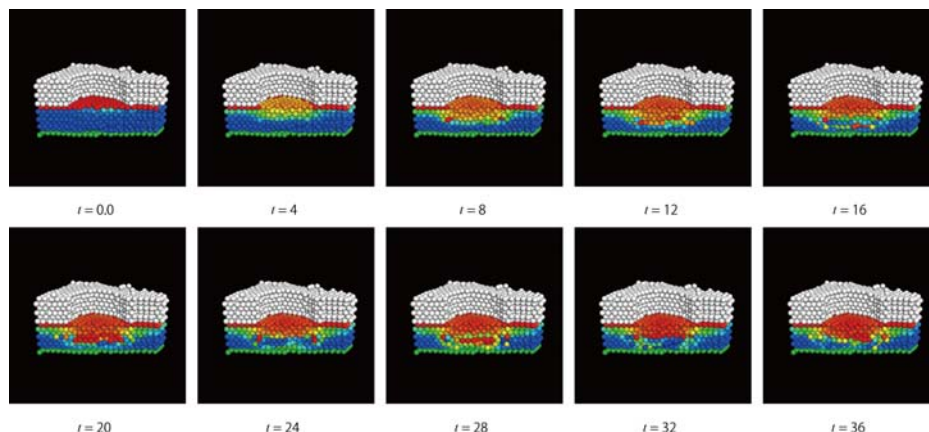


図4:角層破壊時におけるカルシウムイオン伝播現象の数値計算結果.

(2)細胞ダイナミクスモデルの構成

角層回復機構の数値計算を行うためには、細胞ダイナミクスに関して基底層における細胞分裂、有棘層から角質層にかけての細胞分化、細胞運動、細胞成長の数値モデルを構成する必要がある。本研究では分裂や分化に対する詳細なモデルを考えるのではなく、カルシウムイオン濃度に依存して分裂時間や分化速度が変化するという単純なモデルを考えた。

(2-1)細胞分化のモデル化

細胞分化を表現するために状態変数 $S_k(t)$ を導入し、この状態変数の値によって細胞の分化を表現することにした。

(2-2)細胞分裂のモデル化

細胞分裂に関して多くの実験によって詳しく研究されているが、ここでは分裂期だけを表現することにした。細胞分化と同様に細胞分裂の状態変数を導入することによって分裂期を表現した。また、細胞分裂時の分裂方向は、細胞間にかかる力(排除体積効果から計算)を計算することによって最も力のかからない方向に分裂すると仮定した。基底層における細胞の種類として、幹細胞(分裂し続ける細胞)、娘幹細胞(3回分裂可能)、分裂不可能な細胞を用意した。

(2-3)細胞運動のモデル化

細胞の移動を表現する数値モデルとして、レナード・ジョーンズ型ポテンシャルを用いた排除体積効果をもった運動方程式を導入した。この系では細胞運動が受動的な動きしかしないが、3次元皮膚構造を再現するだけなら問題ないと判断した。

(2-4)細胞成長のモデル化

細胞の大きさを定義するため、細胞成長を記述する常微分方程式を導入した。ここでは、細胞はある大きさ以上は成長しないと仮定した。

(3)統合モデルの構成と数値シミュレーション

培養細胞の実験結果から、細胞の分化が進むことによって未分化細胞と分化細胞によって

Gap-Junction 発現率や細胞外 ATP の感受性が異なることから、細胞間カルシウムイオン伝播モデルに対して分化による細胞の性質の違いを考慮した分化機能つきカルシウムイオン伝播モデル(図5)を構築した。この数値モデルと2)で構成した細分ダイナミクスを結合した統合モデルを考える。カルシウムイオン伝播

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = d_A \Delta A - K_A + \sum_{i=1}^N I(c_i) \\ \frac{dP_i}{dt} = \sum_{j \in \Lambda_i} d_p(S_k, i; j, L)(P_j - P_i) + \frac{K_{PA}(S_k)A^{m_A}}{H_0 + A^{m_A}} - K_P P_i, \\ \frac{dc_i}{dt} = \sum_{j \in \Lambda_i} d_c(S_k, i; j, L)(c_j - c_i) + f_c(P_i, c_i, h_i), \\ \frac{dh_i}{dt} = \frac{1}{\tau(S_k)} f_h(c_i, h_i) \end{cases}$$

図5:分化機能を有した細胞間カルシウムイオン伝播の数値モデル.

現象と細胞ダイナミクスは観測する時間スケールが異なる。そこで時間平均化法を導入して数値計算を行った。

(3-1)カルシウムイオン局在化の再現

細胞ダイナミクスを伴っていても(図3)のように角層直下のカルシウムイオン局在を再現することが可能であるか数値計算を行った。その結果、細胞ダイナミクスを伴った場合においてもカルシウムイオン局在化を再現することがわかった(図6)。

(3-2)角層破壊における早期回復機構の再現

空気暴露の有無が角層破壊における回復に与える実験を定性的に再現することができるか数値計算によって調べた。まず、空気暴露条件下での角層の回復現象を再現することができるか調べた結果、構成した数理モデルにおいて角層の回復現象を再現することができた(図7)。また、空気暴露がなくても角層が回復することも数値計算からわかった。次に空気暴露の有無が回復速度に影響するか調べた。その結果、空気暴露がある場合の角層回復時間は空気暴露がない場合と比較して約2倍速く回復することがわかった(図8)。これにより、我々が構成した数理モデルは、空気暴露が角層回復時間を早めることができるという実験結果を定性的に再現していることがわかった。

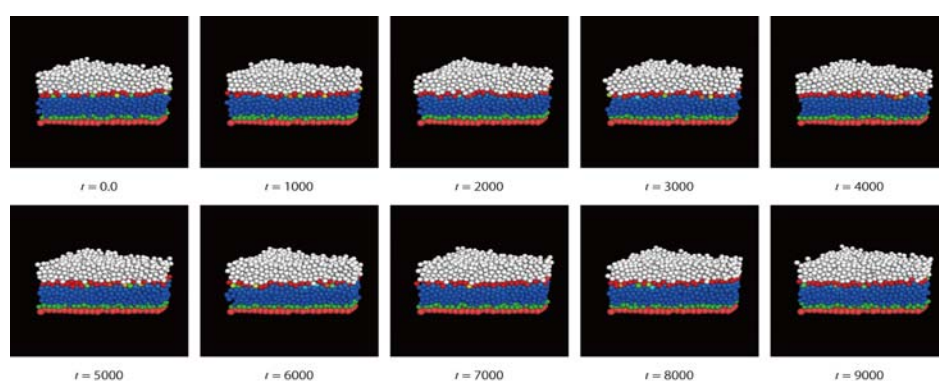


図6：細胞ダイナミクスを伴った角層直下におけるカルシウムイオン局在化現象の再現。

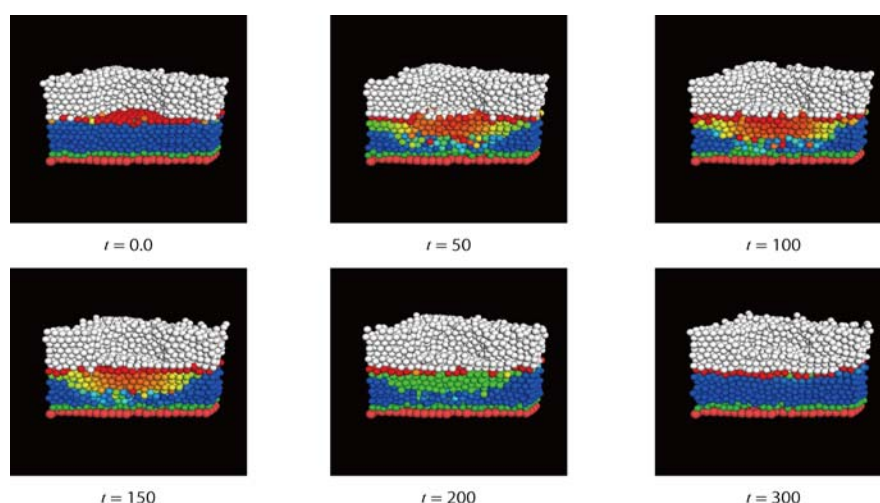


図7：角層破壊からの回復現象の数値計算(空気暴露あり)。

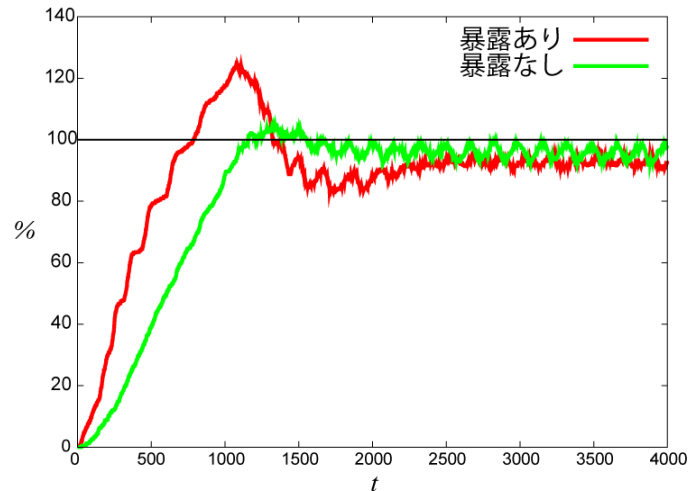


図8：角層回復率の時間変化，角層破壊部分での破壊前の角質化細胞数に対する新たに角質化細胞となった細胞数の比，100%になった時点で角層が回復したとみなす。

(3-3) 異常分裂，異常分化の数値計算

基底層ある一つの幹細胞が異常(分裂速度が速く，その細胞から分化する細胞の分化速度も速い)であると仮定した数値計算を行った。その結果，皮膚疾患の一つである「鶏眼(うおのめ)」に似た現象を再現することができた(図9)。この結果から，細胞内部での生化学反応等を省略した比較的簡単な数理モデルにおいても皮膚疾患機構を解明する手がかりになる可能性を示唆することができた。



図9：鶏眼形成の数値計算，角質化細胞が表皮細胞中に徐々に潜り込む時系列。

3. 今後の展開

本研究に対しては次の3つの方面から研究を遂行していく。

(1) 数理モデル化における仮定や数値実験から予想される現象に対する実験

本研究で構成した数理モデルの正当化を行うためには，カルシウムイオン局在を再現するために仮定した「角質化時に何らかの刺激物質の放出」や数値計算結果から得られた「空気暴露時に見られるカルシウムイオン伝播現象」の予測に対して，実験グループとともにこれらの事実の可否を実験によって示す必要がある。今後は実験グループと一緒に数理モデルと実験の間にあるギャップを埋めていく研究を展開していく。

(2) 細胞間脂質形成のモデル化

本来のバリア機能には角層形成のほかに角質間脂質生成とその形成が必要である。今回の研究では角層形成に的を絞って数理モデル化を行ってきたが，今後は脂質生成と形成に対する数理モデルも構築し，最終的なバリア機能形成に対する数理モデルを構成していく。

(3) 角層形成の数理解析

数理モデルによって構成した3次元皮膚構造での角層形成に対する数学的描像を与える。そのためには，これまでの研究成果は定義されていない言葉を多く使っており，それらの言葉に数

学的な定義を与えることが必要である。現時点で明らかなことは、3次元皮膚構造が安定であるという意味を数学として定義していないことである。図6のような構造が維持されるということは「図6の構造が安定である」と言いたい。その定義を与えていないので評価することができない。皮膚科学に必要な数学的定義を与え、数理的視点から角層形成がなされる機構を理解していく。これによってバリア機能が低下している皮膚疾患に対する数理解析を与え、皮膚疾患機構に対する数理解析を行っていく。

4. 自己評価

この研究では、傳田光洋氏(資生堂)の研究グループからの全面的な協力を得て、実験事実とそこから予測される現象を仮定し、その仮定に基づいて数理モデルを構成した。その数理モデルから角層形成の再現には成功した。しかし、角層直下のカルシウムイオン局在を再現する数理モデルの構成に時間を要したこともあり、本来この研究期間に展開する予定であった数理的視点からの角層形成機構の理解まで研究を進めることができなかった。現時点では現象の再現はできたが、計算結果に対する他方面から評価が全くできていない。今後の展開にも記したが、実験グループとともに実験からの検証を行うことや数理科学からのバリア機構の理解を進めていく必要性を強く感じている。また、本研究成果に対する論文出版をなす事がほとんどできなかったことは大きく反省する点である。

5. 研究総括の見解

(1)細胞間カルシウムイオン伝播モデルの構成と局在化の再現、(2)細胞ダイナミクスモデルの構成、(3)統合モデルの構成と数値シミュレーション、により角層形成の数理モデル化を行なった。数理モデル化と実験グループとの協働により、数理科学的視点からカルシウムイオンの局在化とその伝播が角層の恒常性維持機構と角層破壊からの早期回復機構の本質的であることが明らかにされた。皮膚科学への数理からの貢献の第一歩として期待される。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	M.Tsutsumi, H.Kitahata, S.Nakata, Y.Sanno, M.Nagayama and M.Denda, "Mathematical analysis of intercellular calcium propagation induced by adenosine triphosphate", Skin Research and Technology, 16(2010) 146-150.
2.	M.Yadome, K.-I.Ueda, T.Teramoto, M.Nagayama and Y.Nishiura, "Periodic transition sequences of scattering patterns in a three-component reaction-diffusion system", Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica New Series, 3(4)(2008) 585-602.
3.	M.Nagayama, M.Yadome, N.Kato, J.Kirisaka, M.Murakami and S.Nakata, "Bifurcation of self-motion depending on the reaction order", Physical Chemistry Chemical Physics, 11(2009) 1085-1090.
4.	H.Kitahata, J.Taguchi, M.Nagayama, T.Sakurai, Y.Ikura, A.Osa, Y.Sumino, M.Tanaka, E.Yokoyama and H.Miike, "Oscillation and synchronization in combustion of candles: Radiation coupling could induce synchronization of oscillatory combustion", Journal of Physical Chemistry (A), 113(29) (2009) 8164-8168.
5.	M.Nagayama, K.-I.Ueda and M.Yadome, "Numerical approach for transient dynamics of periodic pulse solutions in a bistable reaction-diffusion system", Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 27(2) (2010) 295-322.

(2)特許出願

研究期間累積件数: 1件

(3) その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

学会発表

- 1) 角層形成の数理解モデル, 日本応用数理学会, 明治大学, 2010 年 9 月 8 日
- 2) 表皮細胞間カルシウムイオン伝播の数理解モデル, 定量生物の会, 大阪大学, 2010 年 1 月 11 日(招待講演)

受賞: なし

著作物

- 1) 長山雅晴, 角層形成の数理解モデル, 数学セミナー 7 月号, 2010, p14-18.
- 2) 長山雅晴, 参納由実, 傳田光洋, 堤も絵, 新妻真紀子, 中田聡, 北畑裕之, 機械刺激による表皮細胞間カルシウムイオン伝播の数理解モデルについて, p206-211, 数理解析研究所講究録 1662.

研 究 報 告 書

「輸送と渋滞に関する諸現象の統一的解析と渋滞解消」

研究期間：平成19年10月～平成23年3月

研究者：西成 活裕

1. 研究のねらい

現代の車社会において交通渋滞は大きな社会問題であり、年間の経済損失は国家予算の約7分の1に相当する。また近年、大災害時やイベントでの群集の殺到やパニックに対する安全性確保に関心が高まっている。さらに、企業では収益性を向上させるため、製造工場における在庫削減や物流の効率化などに真剣に取り組みはじめている。これらは全て「渋滞」という言葉で統一的に捉えることのできる社会問題であり、この広い意味での渋滞のメカニズムを数理科学的な手法で解析し、そしてその緩和や解消方法を社会へ提言することが研究のねらいである。

流れや輸送に伴う渋滞はこのように車だけのものではなく、人やアリ、インターネット、そして我々の体内にも存在する。これらを最新の数理科学を用いて抽象化し統合的に研究することで、車や人、在庫の渋滞緩和に役立つ新しい知見を探す分野横断型の研究を進める。また同時に現実のデータを詳細に分析し、新たに実験も行なうことで、現実をきちんと見据え理論と現実の両面からバランス良く研究してゆく。このように、厳密な数理を用いた解析により、結果の信頼性や高精度化を図り、また様々な渋滞データの分析により実際の現象の本質を見極めることで、具体的な「車・人・在庫物流」の諸問題について渋滞予測や解消方法を考える。そして最終的に社会での実践を目指し、関係機関に提言しながら数理を基盤に渋滞解消へのブレークスルーをめざす。

2. 研究成果

●高速道路における車の渋滞について、渋滞発生直後にその領域への車の流入を上流から抑制することで、渋滞を緩和する社会実験に成功した。これは車間距離で渋滞を吸収するためにペースメーカー車を走らせ、また速度を徐々に落とすことで流量を調整し、さらに車間距離を動的にコントロールすることで2次渋滞を防ぐものである。実際に相模湖バス停付近で時速50km近くまで落ち込んだ流れを時速80km近くまで回復することに成功した(図1)。

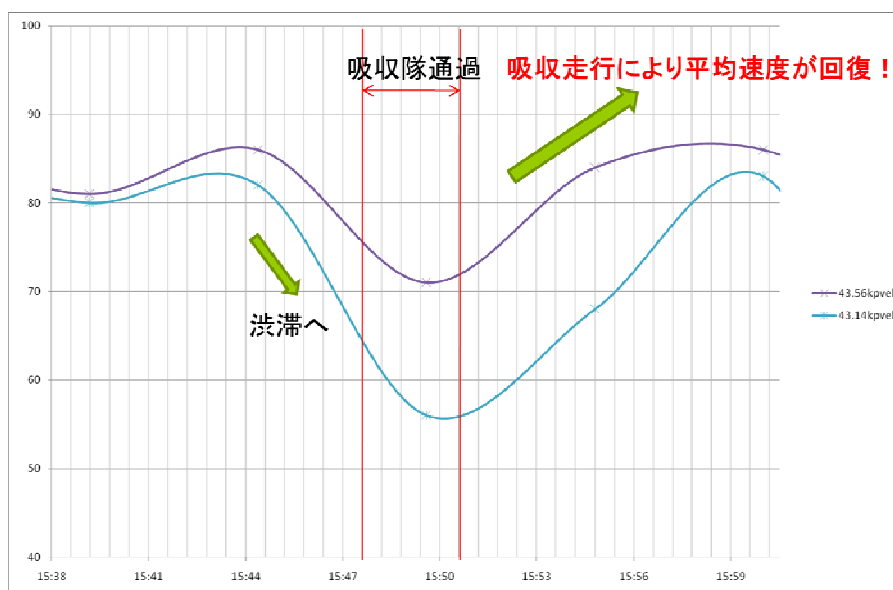


図1: 相模湖バス停付近の速度データ(縦軸: 速度、横軸: 時刻)。午後15時44分ごろに渋滞が発生したが、その後渋滞吸収車が通過することで速度が回復した。

● 渋滞形成実験をすることで、ボトルネック無しでも自然渋滞が発生することを示した。しかも渋滞発生直前に、メタ安定の様流れができ、それが崩壊する様子を観測することができた(図2)。これは車の追従モデルの理論による渋滞形成を支持する重要な結果となった。

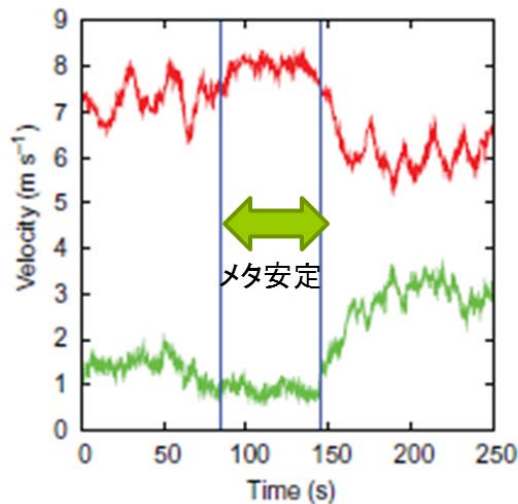


図2: 円周上を走行する車群の平均速度(赤)と速度の分散(緑)。渋滞直前に平均速度が上昇して分散が低くなることが分かる。

● 群衆が扉などのボトルネックから退出する際に、ポールなどの障害物を置くことで逆に流出がスムーズになることを実験的に検証した(図3)。さらに平均場近似による理論を構築し、障害物の条件について明らかにした。さらにこの人の密集状態と粉粒体の流れを比較するために、粉粒体の実験を行った。粉粒体の場合には、障害物による流量上昇はみられなかった。



図3: ボトルネックからの人の流出実験。障害物としてポールを設置した方が、流動係数(単位時間、単位幅当たりの流量)が上昇した。

● アリの流量と密度を詳細に観測し、自然環境でアリは渋滞しないことを見出した。自然環境では、密度は約0.7以上上昇することはない、また速度も密度の上昇があってもほとんど低下しないことが示された(図4)。

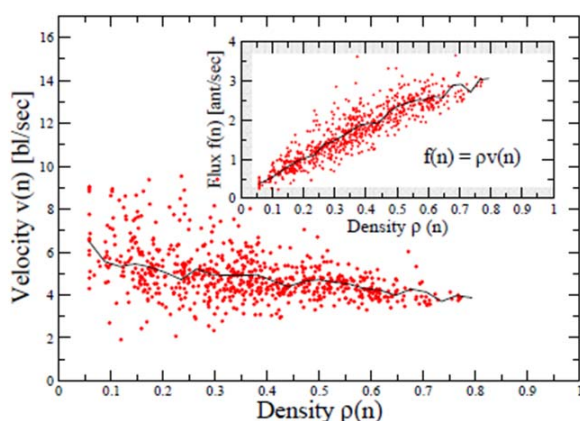


図4: アリの速度—密度図と、流量—密度図。渋滞相が存在しないことが分かる。

3. 今後の展開

単純な流れの基礎モデルは完成したため、今後は目的に応じてより車らしく、そして人らしくモデルのルールを拡張していくことが必要になる。例えば、複数車線ある場合の車両挙動、サグ部やトンネルでの運転特性、また大型車や小型車での加速性能の違いなど、車のモデルのより現実に近い拡張が課題である。そして道路のネットワーク構造を加味した大域的なモデル化も重要だろう。人のモデルに関しても、これまでは単純で均一な群衆を考えていたが、実際はグループを形成し、また年齢や文化背景、そして感情状態の違いによる行動変化がある。こうした特性を加味したモデルはこれまでほとんど研究がなされておらず、今後発展が期待できる分野である。

そして近年は観測機器の発達により、高精度のデータが取得可能になってきた。特に、GPSや加速度計など、様々なデバイスを使って行動を追跡できるようになった。こうした機器により、これまでのモデルの検証を精緻に行うとともに、新しい行動特性の発見も期待できる。

そして研究成果を社会に還元していくことが今後の展開として最も重要であると考えている。既にこれまでいくつかの社会実験を行い、高速道路での渋滞緩和が成功している。また、人の混雑に関しても、障害物の設計方法などに関して実用上有益な知見が得られている。物流に関しても、混流生産時の最適なロットサイズが計算できる場合が分かってきており、こうした結果を実際に関係機関と協力して社会還元をしていきたい。

4. 自己評価

3つの研究の柱、つまり車、人、モノの流れについて、その統一的な数理モデルの作成、及びその結果の社会実践を行う、という当初の目標は十分に達成されたといえる。車の新しいモデルの作成とそれによる交通流の数理解析は実車を用いた実験と高精度で合うことが分かった。そして渋滞を相転移現象として捉え、渋滞領域への流量を抑制することで渋滞解消が可能であることを実験により示すことができた。さらにその実験映像が実際に本年2月より阪神高速道路のSA等で流されることが決まり、数理的手法による渋滞緩和方法が社会的に認知されるようになってきた。また、昨年10月から供用開始した羽田国際空港の物流ターミナルの出入り口設計に渋滞理論が取り入れられ、現在入場ゲートの運用に使われている。このように理論だけでなく社会貢献を進めることができ、応用面では当初の目標をはるかに上回る成果を上げることができた。

理論面では、人のボトルネック流れでの障害物効果による流量上昇について、新たに数理モデルを構築して理論解析を行い、それが実験結果を十分再現するものであることが分かった。この成果により日本応用数理学会論文賞を受賞することができた。さらに製造工場での混流

生産時におけるロットの決定について、渋滞理論から最適なロット組み合わせについて評価基準を作成することができた。これは現在関係企業と実験に向けて調整中である。以上、車、人、モノの流れについて理論および実践とも期間内に満足のいく結果を得ることができた。

5. 研究総括の見解

車だけではなく、人やアリ、インターネットなど「流れや輸送に伴う渋滞」を最新の数理科学を用いて抽象化し統合的な研究を行なった。現実のデータや新たな実験結果を厳密な数理を用いて解析することにより、結果の信頼性や高精度化を図るとともに、具体的な「車・人・在庫物流」の諸問題について渋滞予測や解消方法を提案することに成功した。より広く社会システムの数理的デザインという立場から今後の発展が期待される。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	Katsuhiro Nishinari, Mitsuru Iwamura, Yukiko Umeno Saito and Tsutomu Watanabe, "The bursting of housing bubble as jamming phase transition", Journal of Physics: Conference Series vol.221 (2010) p.012006
2.	Daichi Yanagisawa, Ayako Kimura, Akiyasu Tomoeda, Ryosuke Nishi, Yushi Suma, Kazumichi Ohtsuka, and Katsuhiro Nishinari, "Introduction of frictional and turning function for pedestrian outflow with an obstacle", Phys. Rev. E, vol.80(3), (2009) p.036110
3.	Ryosuke Nishi, Hiroshi Miki, Akiyasu Tomoeda and Katsuhiro Nishinari, "Achievement of alternative configurations of vehicles on multiple lanes", Phys. Rev. E vol.79, (2009) p.066119
4.	Alexander John, Andreas Schadschneider, Debashish Chowdhury and Katsuhiro Nishinari, "Trafficlike Collective Movement of Ants on Trails: Absence of a Jammed Phase", Phys.Rev.Lett., vo.102 (2009) p.108001
5.	Y. Sugiyama, M. Fukui, M. Kikuchi, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nishinari, S. Tadaki and S. Yukawa, "Traffic jam without bottleneck – Experimental evidence for the physical mechanism of forming a jam" New Journal of Physics vol.10 (2008) p.033001

(2)特許出願

研究期間累積件数:3 件

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

国際会議での招待講演

1. Transport and Crowd Management Workshop 2010(2010年5月2日、サウジアラビ, Jeddah)
"Mega-scale crowd management for safety and efficiency"
2. THE CROWD, A COLLECTIVE AGGREGATION AS DYNAMICAL PHENOMENON 2010 (2010 年 4 月 1 日、イタリア, Milano-Biccoca 大学)
"Toward smooth motion of crowd: theory and experiments"
3. COMPLEX09(2009 年 11 月 4 日, 中央大学)
"Physics of self-driven particles"
4. DARSシンポジウム(2008 年 11 月 18 日, 筑波大学)
"Jamology –physics of self-driven particles–"
5. PED2008(2008 年 2 月 29 日、ドイツ, Wuppertal 大学)
"Toward smooth motion of Crowd"

受賞

平成 22 年度日本応用数理学会論文賞(応用部門), 2010/09/07

柳澤大地, 木村紋子, 友枝明保, 西遼佑, 須摩悠史, 大塚一路, 西成活裕,
“Analysis on an Impact of Conflict, Turning, and an Obstacle on
Pedestrian Outflow”, 日本応用数理学会論文誌, 19(3), pp. 279–292, 2009

著作

1. “Stochastic Transport in Complex Systems: From Molecules to Vehicles”,
Andreas Schadschneider, Debashish Chowdhury, Katsuhiro Nishinari,
Elsevier Science (2010/12/8)
2. 「渋滞」の先頭は何をしているのか? (単著、宝島社新書, 2009 年6月10日)
3. 図解雑学シリーズ「よくわかる渋滞学」(単著、ナツメ社, 2009 年7月21日)

報道

1. Nature Japan <http://www.natureasia.com/japan/jobs/tokushu/detail.php?id=197>
2. NHK テレビ「ワンダー×ワンダー」(2009/9/19)
3. 日経新聞夕刊一面「拓くひと: 壁を越えて」(2009/5/13)
4. NHK テレビ NHKニュース(19時)(2009/5/3)
5. 日本テレビ「世界一受けたい授業」(2008/11/15)

研 究 報 告 書

「「計算機システムの科学」のための数学」

研究期間：平成 19 年 10 月～平成 23 年 3 月

研 究 者：蓮尾 一郎

1. 研究のねらい

計算機システム(＝計算機を用いた情報処理システム)を正しく設計することはとても難しく、その欠陥が大きな社会的、経済的損害を与える例は枚挙に暇がありません。本研究では、物理学におけるデカルト直交座標のような、「計算機システムの科学」における数学的基礎を構築することを目指しました。その成果により、正しい計算機システムの設計が容易になると同時に、抽象数学の研究の対象たりうる新たな構造が発見されることを期待しました。

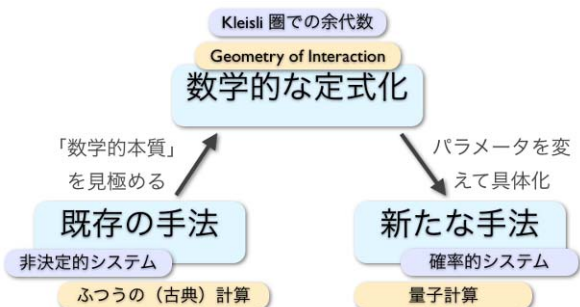
2. 研究成果

上に述べた目標に対して、圏論(数学の異なる分野に共通して現れる性質・構成を一括して記述するために現れた抽象的フォーマリズム)を用いて定式化した代数・余代数の理論を主に用いて研究を行い、以下の成果を得ました。

● 数学による抽象化と、新たな設計・検証手法の創発

数学(特に圏論)の抽象性・一般性を活かすことで、計算機システムの設計・検証手法に対して以下のようなシナリオが可能になります。

1. 既存の手法の数学的定式化を試みる。この際、その手法の数学的本質が明らかになる。
2. 得られた数学的定式化は一般的・抽象的なものになっている。この一般性を活かしパラメータを他のものに取り替えることで、新たな設計・検証手法が得られる。

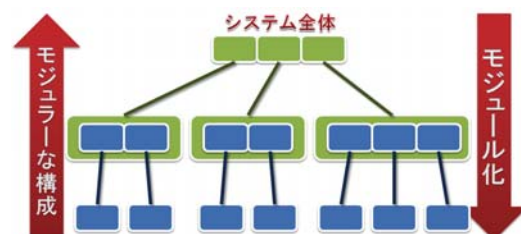


実際、論文[3,4]において、既存の非決定的システム(Aという動作をするかもしれないし、Bという動作をするかもしれない)に対する検証手法の一つを、Kleisli圏の余代数を用いて数学的に定式化し、さらにパラメータを取り替えることで確率的システム(たとえば、Aという動作をする確率は 1/3、Bは 2/3)に対する手法に移転しました。より具体的に論文[4]では、確率的システムに対する既存のアドホックな検証手法に対して、数学的裏付けと一般化を与えました。また論文[3]では、このようにして得られた検証手法をネットワーク・プロトコルに応用し、ネットワーク匿名性を検証するための工学的手法を得ました。

さらに投稿中の論文[Hasuo&Hoshino,2011]では同じシナリオを量子計算(量子力学の原理を用いた新たな計算パラダイム)に対して試んでいます。具体的には、量子計算のための関数型プログラミング言語の意味論(プログラムの「意味」を定める枠組み、プログラム検証やプログラム変換の基礎となる。量子計算に対するそれについてはこれまで部分的な成果しかなかった)を、普通の計算のための数学的手法(Girard の Geometry of InteractionのAbramsky et. alによる定式化)を一般化して適用することで与えました。やはりこの際、圏論の一般性・抽象性がフル活用されています。

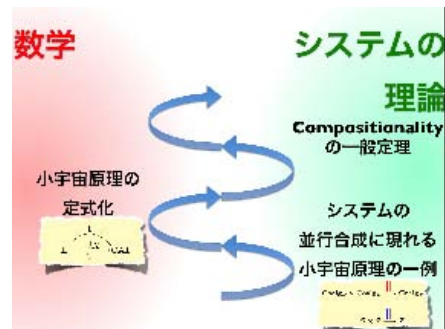
● システムのモジュラーな設計・検証に対する、数学的基礎付けと新展開

近年の計算機システムの複雑さは文字通り天文学的ですが、その対処法として「全体のシステムをいくつかの構成要素システム(モジュール)に分割し、それぞれを正しく



設計した後に組み合わせる」というモジュラーな設計・検証パラダイムが注目されています。

本研究では論文[1]において、このモジュラーな設計の背後にある数学的構造を同定しました。ここでは、モジュール(あるいはシステム)を余代数として表現し、それらの組み合わせオペレータが余代数の圏における代数構造をなします。さらにシステムの「振る舞い」を考えることにより終余代数における代数構造が現れ、さきの代数構造と合わせて2重入れ子の代数構造(Baez&Dolanの小宇宙原理)がたち現れます。



この観察を元に、まず数学的な結果として小宇宙原理の高次元圏を用いた定式化を得て、さらにこれを再度システムの理論に引き戻すことでモジュラーな設計・検証において基本的なcompositionalityの一般定理を得ました。これは数学とシステムの理論との間の相互刺激、上向きスパイラルの一例になっています。

この結果を受けて論文[3]では、システムの組み合わせ方としてフィードバックも許される場合のcompositionalityについて考察しました。特にこの結果から、ゲームにおけるメモリ付き戦略(resumption)の圏がJoyal-Street-Verityの意味でのtrace operatorを持つという一般定理を導きました。

- その他の数学的構造に対する結果移転

数学的な研究アプローチをとっていると、得られた知見が思わぬ一般性を獲得することがあります。この一般性を活かして、計算機科学・数学にまたがるさまざまなトピックに挑戦しました。たとえば、論文[5]では前層の圏の余代数を用いて、自己相似図形の各点を記号の無限列の同値類で一对一に表現するフラクタルの表現定理を得ました。また、代数・余代数的考察の関数型言語の意味論への応用も行いました。

3. 今後の展開

- 情報学とともに発展する新たな数学に向けて

そもそも計算機システムのような情報学的対象には、さまざまな自然現象のような物理学の対象と異なり、その動作・時間発展をイメージしにくいという困難があります。たとえば液体の流れはアニメーションで表現できますが、コンピュータの動作はそうはいきません。このような「眼に見えない」現象を記述するために、(特に代数学をはじめとする)現代の抽象数学が果たす役割は大きなものになると考えます。

また計算機システムに関するもうひとつの困難として近似が意味をもたないことがあげられます。これは、物理学的データに対しては連続性から近似が強力な武器になる一方、計算機システムにおけるデータは離散的であり、たとえば数万のパラメータの一つの値がちがうだけでシステム全体の振る舞いがまったく変わってしまうことがあります。現代数学の大きな部分は物理学との両輪で発展してきましたが、このような情報学的応用は新たな数学の萌芽の可能性を導くものだと考えます。

以上をふまえ、今後も情報学・数学の互惠関係、上向きスパイラルを引き起こすべく研究を進めていきます。具体的には、まず抽象数学の諸結果が計算機システムに対して導く知見の再検討を行います。たとえば幾何学を起源とし現代数学のあらゆる場面に現れるホモロジー代数の応用について研究を進めていきます。また同時に、計算機システムの応用例から数学的構造を抽出することを、(論文[1]の小宇宙原理の定式化にひき続いて)進めていきます。

- 社会にインパクトを与える工学的成果に向けて

これまで得られた、またはこれから得られる理論的・数学的成果について、その工学的・社会的インパクトをさらに追求していきます。たとえば小宇宙原理から導かれるcompositionalityの結果(論文[1])の既存の商用フレームワークに対する移転や、論文

[4]の検証手法に基づいた実用的な検証ツールなどです。

また、本研究を通じて明らかになったのは、量子計算をはじめとする新たな計算パラダイム(動作原理が新しいゆえに直感的にその動作をイメージしにくい)に対する、数学的手法の有効性です。特に自動車業界をはじめ産業界で注目されるハイブリッド・システム(離散データだけでなくセンサーからの連続的データも扱うシステム)の検証手法について、現在研究を進めています。

5. 自己評価

当初目標に挙げた「計算機システムの(デカルト座標に匹敵する)基礎理論」に関しては、本研究、特に同僚のさきがけ研究者との議論を通じて「そもそも不可能だったのではないか」という結論に至りました。というのは、(たとえばTuring機械に還元して理解できる「計算」に対して)「計算機システム」においてはその複雑さ・内部の相互作用の重要さゆえに、基本法則に立ち戻ってボトム・アップに現象を理解する要素還元主義が通用しないのです。これは物理現象における複雑系とおなじ状況です。このような状況においては、さまざまな理論は(複雑な対象に対して)それぞれ独自の「切り口」を提供し、理論間ではその切り口の鋭さを競うことになります。

ただし計算機システムが物理的・生物的・社会的複雑系と異なるのは、人工物であるがゆえに要素還元主義が通用するように「作る」ことができるという点です(たとえばモジュラーな設計)。この際、数学的(特に代数・余代数的)「切り口」は自然な(カノニカルな)作り方を提供します。このような、計算機システムに対する数学的アプローチの有用性の実証・発展に対して、本研究の成果を通じて貢献できたと考えます。

6. 研究総括の見解

主に圏論を用いて定式化した代数・余代数の理論を用いた研究を行い、数学による抽象化と新たな設計・検証手法の創発、およびシステムのモジュラーな設計・検証に対する数学的基礎付けと新展開を得ることができた。これにより、計算機システムに対する数学的アプローチの有用性における実証・発展に貢献した。

7. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	Ichiro Hasuo, Bart Jacobs and Ana Sokolova. The Microcosm Principle and Concurrency in Coalgebra. <i>Proc. Foundations of Software Science and Computation Structures (FoSSaCS 2008)</i> . Lect. Notes Comp. Sci. 4962, p. 246–260. Springer-Verlag. 2008.
2.	Ichiro Hasuo and Bart Jacobs. <i>Traces for Coalgebraic Components</i> . To appear in <i>Mathematical Structures in Computer Science</i> , Cambridge University Press. (採択済)
3.	Ichiro Hasuo, Yoshinobu Kawabe and Hideki Sakurada. <i>Probabilistic Anonymity via Coalgebraic Simulations</i> . <i>Theoretical Computer Science</i> , 411(22–24):2239–2259, 2010. Elsevier.
4.	Ichiro Hasuo. Generic Forward and Backward Simulations II: Probabilistic Simulation. <i>Proc. CONCUR 2010 – Concurrency Theory</i> . Lect. Notes Comp. Sci. 6269, p. 447–461. Springer-Verlag. 2010.
5.	Ichiro Hasuo, Bart Jacobs, and Milad Niqui. Coalgebraic Representation Theory of Fractals (Extended Abstract). <i>Proc. Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS XXV)</i> . <i>Electr. Notes Comp. Sci.</i> 265:351–368, 2010. Elsevier.

(2)特許出願

研究期間累積件数:0件

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

➤ 学会発表

1. The Microcosm Principle and Concurrency in Coalgebra. FoSSaCS 2008, Budapest, Hungary. March 2008
2. Coalgebraic Components in a Many-Sorted Microcosm. CALCO 2009, Udine, Italy. September 2009
3. Coalgebraic Representation Theory of Fractals. MFPS XXVI, Ottawa, Canada. May 2010.
4. Generic forward and backward simulations II: Probabilistic simulation. CONCUR 2010, Paris, France. September 2010

研 究 報 告 書

「(研究課題名)」

研究期間：平成19年10月～平成23年3月

研究者：牧野 和久

1. 研究のねらい

近年の情報化社会において、ソフトウェア(アルゴリズム)の品質保証の重要性は言うまでもない。例えば、通信ネットワークサービス分野では、どのように QoS (Quality of Service)を保証するかということが最重要な課題である。現実社会のシステムや産業経済活動などに関連して現れる多くの離散(最適化)問題においては、本質的に計算困難であるため、経験的に良いが、精度、品質保証がされていない遺伝的アルゴリズム、タブー探索、アニーリング法などのメタヒューリスティクス(メタ戦略)を基本にしたアルゴリズムが広く用いられている。もちろん、これらのアルゴリズムは一定の成果を収めており、ある程度満足できるものである。しかしながら、避難誘導などの安心・安全に関連する分野においては、高精度、高信頼度が要求され、必ずしも満足できる状況にない。また、ソフトウェア産業界で国際競争に勝ち抜くためには、次世代のソフトウェア技術として「アルゴリズム品質保証技術」は必要不可欠である。

本研究では、離散アルゴリズムに対する汎用的な品質保証技術を開発すると同時に、その品質保証技術に重要な役割を果たす離散構造の解明と品質保証のための解析手法の確立を行うことで離散数学、アルゴリズム分野の新しい基礎理論の構築を目指す。また、この研究に直接的に関連する計算可能性に関する重大な未解決問題の解決を試みる。

2. 研究成果

オンラインナップサック問題 (min,max,分数)、施設配置問題 (有向, 無向)、ロバスト最適化 (マッチング)、列挙アルゴリズム、ホーン推論 (演繹推論, 論理和)、充足可能性問題の解の連結性、確率ゲームに対するアルゴリズム、など離散アルゴリズム分野において重要な課題に取り込み、多くの成果を出した。ここでは、

1. 単調論理関数の双対化に関する成果
2. オンラインナップサック問題に関する成果

の2点に絞り報告する。

1. 単調論理関数の双対化に関する成果

単調論理関数の双対化とは、単調な論理関数を表現する論理積形からそれと等価な論理和形を求める問題である。この双対化は、非常に基礎的な問題であり、それゆえ、人工知能、データマイニング、計算幾何、数理計画など様々な分野に幅広い応用をもつ。ここで、入力として与えられた論理積形が一般の場合は、NP 困難な問題であることに注意されたい。

この単調論理関数の双対化問題は、長い間、計算量の上界が指数より小さくなるかどうか未解決であった。1996 年に初めてFredman とKhachiyanにより、擬多項式時間アルゴリズムが開発されたが、未だに多項式時間アルゴリズムがあるかどうかは分かっていない。

本研究では、この単調論理関数の双対化問題に対して様々な成果を得たが、ここでは以下の3つを記す。

1. 1. まず、列挙分野において重要な未解決問題の多くが、単調論理関数の双対化問題と多項式時間あるいは擬多項式時間の意味で等価であることを示した。このことにより、単調

論理関数に対して、実用的に効率なアルゴリズムが等価な問題にも適用可能であることを示したことになる。

1. 2. 本研究では、単調論理関数の双対化問題に対する Berge アルゴリズムの性能評価を行った。Berge アルゴリズムとは、入力の論理積形(節の論理積)の節を順序付けし、その順番に従って順次論理輪形を求める、すなわち、 k 番目までの節からなる論理積形と等価な論理和形と $k+1$ 番目の節から $k+1$ 番目までの節からなる論理積形と等価な論理和形を順次求めていくというアルゴリズムである。この Berge アルゴリズムはそのままでは実用的ではないのであるが、様々な発見的なアイデアを盛り込んだアルゴリズムは実用的にいいとして様々な分野で用いられている。

今研究では以下の3つの成果を得た。

I. 実問題としてよく現れる問題例(論理積形)の性質、例えば、節サイズ、次数、共通節サイズなどのいずれかが定数であれば、Berge アルゴリズムが多項式時間で動くための節の順序付けを多項式時間で求められることを示した。

II. 入力の論理積形が次数1の論理表現をもつ、あるいは、定数の共形性をもつならば、Berge アルゴリズムが擬多項式時間で動くための節の順序付けを多項式時間で求められることを示した。

III. 一般の論理積形に対して、Berge アルゴリズムが準多項式時間で動くための節の順序付けを多項式時間で求められることを示した。

これら I. II. III. により、Berge アルゴリズム+発見的解法がなぜ実用的であるかを解析的に説明するとともに、実用的な節順序を与えることに成功した。

1. 3. 本研究では、単調論理関数の双対性判定問題に対する効率的な並列アルゴリズムの開発に成功した。双対化問題は、双対性判定問題と多項式時間の意味で等価であることが知られている。この成果をより正確にいうと、

I. 双対性判定問題が擬多項式個のプロセッサを用いて、対数多項式時間で解けることを示した。

II. 実問題としてよく現れる問題例(論理積形)の性質、例えば、節サイズ、次数などのいずれかが定数であれば、双対性判定が NC に属すること、すなわち、多項式個のプロセッサを用いて、対数多項式時間で解けることを示した。

2. オンラインナップザック問題に関する成果

(最大)ナップザック問題とは、入力として重みとサイズをもつアイテムの集合が与えられたとき、サイズ和が1以下になるという条件の下で重み和を最大にするアイテム部分集合を求める問題である。また、最小ナップザック問題とは、入力として重みとサイズをもつアイテムの集合が与えられたとき、サイズ和が1以上になるという条件の下で重み和を最小にするアイテム部分集合を求める問題である。これらの問題は、線形不等式1つから成る制約の下で、線形関数を最大化あるいは最小化するという基礎的でかつ重要な最適化問題である。これらの問題はともに、有理問題、すなわち、アイテムを選ぶ、選ばないという二者択一ではなく、0.3用いるなどを許せば、簡単な貪欲算法で多項式時間で計算可能であることが知られている。整数性を考えると、NP困難ではあるが、全多項式時間近似スキーム(FPTAS)をもつ、計算量的に比較的(NP 困難ではあるが)近似的には簡単な問題であることが知られている。

本研究では、オンラインという状況下でのナップザック問題を考察した。すなわち、アイテムが

一つ一つ逐次的にやってきて、その時点でそのアイテムを選ぶか、選ばないかを決めなければならないという状況設定の下で問題を考察した。本研究では以下の2つの成果を得た。

I. オンライン最小ナップザック問題:

I. I. 重みとサイズが比例する場合においても定数競合比をもたないことを示した。

I. II. 一度選んだアイテムを削除できるという状況下においては、一般に、

決定的な競合比の上界 8
確率的な競合比の上界 $2e$
決定的な競合比の下界 2

であることを示した。

I. III. 一度選んだアイテムを削除でき、かつ重みがサイズに比例する場合について、決定的な競合比が1.618であることを示した。

I. I. の結果は、2002年の Iwama, Taketomi のオンライン最大ナップザック問題の結果と同じであるが、I. II. の結果は、オンライン最大ナップザック問題の結果と異なり、オフライン環境下では、最大化問題と最小化問題にまったく違いがないにもかかわらず、オンライン環境下では違いが現れ、非常に興味深い結果となっている。

II. オンライン最大ナップザック問題:

本研究ではアイテムを k 回までカットしてよいという条件下においてオンライン最大ナップザック問題を考察した。我々はこの問題に対して、競合比が $k+1/k$ であるアルゴリズムの開発に成功した。また、この競合比が下界とも一致することを示すことで、最適なアルゴリズムであることを示した。また、資源増大モデルにおいても最適なアルゴリズムの開発に成功した。また、最小ナップザック問題に対しては、定数競合比をもつアルゴリズムが存在しないことを示した。

3. 今後の展開

本研究で得られた成果をさらに発展させること、具体的には、列挙アルゴリズム分野の更なる整備、メタ戦略などにおいて重要な役割を果たすランダムウォークの脱乱化の研究、不確実性を考慮したロバスト最適化のさらなる研究が必要である。

4. 自己評価

3. に示すように多くの成果を得たことから分かるように、アルゴリズム分野の基礎理論の発展に大きく貢献したと考える。特に、列挙アルゴリズム分野の理論的な貢献は世界的にも大きな評価を得ている。ただ、重大な未解決問題のいくつかは解決したが、もっとも大きな P vs NP 問題、単調論理関数の双対化問題や平均閉路ゲームの多項式性などいまだ解決には至っていない状況でもある。

5. 研究総括の見解

(1)単調論理関数の双対化(2)オンラインナップザック問題等の重要な課題に対して大きく進展させた。Berge アルゴリズム+発見的方法の実用性を明らかにし、NP 困難性とも関連している点は興味深い。今後のアルゴリズム分野の基礎理論への貢献が期待される。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

	1. Endre Boros, Khaled M. Elbassioni, Kazuhisa Makino: On Berge Multiplication for Monotone Boolean Dualization. ICALP (1) 2008: 48–59
	2. Endre Boros, Kazuhisa Makino: A Fast and Simple Parallel Algorithm for the Monotone Duality Problem. ICALP (1) 2009: 183–194
	3. R. Fujita, Y. Kobayashi, K. Makino: Robust Matchings and Matroid Intersections. ESA (2) 2010: 123–134
	4. E. Boros, K. Elbassioni, V. Gurvich, K. Makino: A Pumping Algorithm for Ergodic Stochastic Mean Payoff Games with Perfect Information. IPCO 2010: 341–354
	5. M. Chrobak, G. Woeginger, K. Makino, H. Xu: Caching Is Hard – Even in the Fault Model. ESA (1) 2010: 195–206

(2)特許出願

なし

(3)その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

平成 20 年度文部科学大臣表彰 若手科学者賞, 第 9 回 船井学術賞 受賞

研 究 報 告 書

「確率過程の統計推測法の基礎理論およびその実装」

研究期間:平成 19 年 10 月～平成 23 年 3 月

研 究 者:吉田 朋広

1. 研究のねらい

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論、確率数値計算および半解析的方法による期待値の近似、種々の近似法のオプションやリスク評価への応用を課題とし、確率過程の統計推測理論、漸近分布論、保険数理・ファイナンスへの応用を包括的に研究する。さらに、ソフトウェアとしての実装の研究を行う。

2. 研究成果

● 非線形時系列に対する高次統計推測論

ε -マルコフ過程は、離散時間非線形時系列モデル、マルコフ過程、確率微分方程式、マーク付き点過程など、応用に現れる広範な確率過程を含んでいる。 ε -マルコフ過程の汎関数の漸近展開の応用として、推定量の漸近展開、高次有効性、検定問題、情報量規準、情報幾何との関係、ノンパラメトリック推定等に関して多くの結果が導かれる。 ε -マルコフ過程を基礎の過程とし、その加法的汎関数のBhattacharya-Ghosh写像で表現される確率変数の漸近展開を導出し、正当性を証明していたが、この表現は普遍的であるため、ミキシング条件下で確率過程の統計学における多くの統計量が扱える。エルゴード的拡散過程の統計モデルに対する最尤およびM推定量に対して、3次の漸近展開公式を論文として発表した。漸近展開の係数を確率微分方程式の情報で完全に表現している。確率過程によるマーク付き点過程の汎関数のマリアバン共分散の非退化性を調べ、漸近展開を与えた。

● 離散観測下での確率微分方程式の推定問題

拡散過程のパラメータを離散的な観測に基づいて推定する問題はサンプリング問題と呼ばれ、今日一つの研究分野を形成している。エルゴード的な、ジャンプのある確率微分方程式に対して、以前、擬似最尤推定型推定量を提案し、その一致性、漸近正規性、漸近有効性を証明した。この場合の難しさは、観測の増分がジャンプ項によるのか拡散項によるのか未知であることで、その判別を行う漸近的なフィルタの導入が鍵となっている。多項式型大偏差不等式論によって、確率微分方程式に対する離散観測下のベイズ型推定量の漸近挙動を明らかにした（次項参照）。

離散観測下での拡散過程の推定で、さらにある閾値以下の値は観測されないという意味で欠測のあるサンプリングの問題がある。そのときに擬似最尤型推定量を与え、その漸近挙動を明らかにした。

有限時間離散観測下での確率微分方程式のなす確率回帰モデルに含まれるボラティリティパラメータの変化点問題を研究した。疑似尤度比確率場はある種のウイナー汎関数のランダムな混合に確率場として収束し、変化点推定量の漸近分布を極限確率場によって特定することができる。変化点推定は典型的な非正則問題であり、統計量の収束もデータ数の $1/2$ 乗とは異なる。推定量の収束にはタイトネスが必要であり、そのために確率場評価に関する新しい不等式を与えた。

● 多項式型大偏差不等式と確率微分方程式に対する擬似尤度解析

局所漸近2次構造(LAQ)をもつ統計的確率場に対して多項式型大偏差不等式を証明し、統計的確率場の強い意味の弱収束を示していた。これによって、非線形時系列モデルに対する尤度比確率場の弱収束と大偏差不等式、最尤型推定量およびベイズ型推定量の漸近挙動、裾確率評価および積率収束の問題が解決した。

統計確率場の大偏差評価は、ベイズ推定量の厳密な扱い、高次統計推測理論における統計量の確率展開の剰余項の厳密評価、情報量規準および予測理論において推定量を代入し期待値をとる操作の正当化など、漸近理論を展開する上で現れる数学的困難を解消するために不可欠なものである。70年代初めにIbragimov-Hasminskii理論が生まれて以来、大偏差不等式の表現が可能な独立観測やガウス時系列に対して理論は適用可能であったが、非線形確率過程に対してそれは課題であった。確率過程の構造自体ではなく尤度比確率場の漸近構造から大偏差評価が一般的に従う。通常の対象ではスコア関数等の加法的汎関数の L_p 評価のみで多項式型大偏差不等式が得られるため、非線形時系列の構造をとくに限定せず尤度解析が可能になった。マルコフ性すら必要としないこともサンプリング問題において有用である。収束率が異なるマルチパラメータの一般的な状況にも適用可能で、ベイズ法に関しては adaptive Bayes estimator の概念も導入し、漸近挙動を明らかにした。マルチスケールリングは、エルゴード的セミマルチンゲールの局所特性量の推定における最適収束率の多様性に対応するため必然的である。この結果から、離散観測ミキシング拡散過程に対して擬似最尤推定量のモーメント収束およびベイズ型推定量の極限定理とモーメント収束、漸近有効性が得られるが、これらは拡散過程に限定しても新しい結果であり、YUIMAパッケージに実装された。さらに、ジャンプ型確率微分方程式の尤度解析が可能となり、ベイズ型推定量の挙動も解明された。また、有限時間離散観測でのボラティリティの最尤型推定量の裾確率評価とベイズ推定量の漸近挙動も明らかになった。これは疑似尤度比確率場が局所漸近混合正規となる非エルゴード的統計であるが、我々の枠組みは適用可能である。統計的確率場のある種の非退化性が本質的になるが、時刻0で完全非分離となる時系列構造が普通にあるので、その検証は重要である。拡散型過程の場合に判定条件を与えた。

● 非同期共分散推定量の提唱と漸近挙動の解明

2つの拡散過程間の共分散構造を推定することはファイナンスデータ解析の基本的な問題である。クレジットリスクの評価にも関係する。売買が成立したときのみ株価が観測されると考えられるが、2つの銘柄の観測時間が同期しないのが普通である。この場合、同期しない離散的なデータからデータの補間によって同期するデータに修正し共分散をもとめる”リアライズド・ボラティリティ”の方法が幾つか提案されているが、それらは、観測の間隔が小さくなるとバイアスが生じることが指摘されている(Epps 効果)。最近我々が提唱した非同期共分散推定量はデータの修正を一切行わない方法で、積分変換等にも基づかないので完全にチューニングパラメータフリー、しかも計算するときの和が実質的に1次元的で計算量の観点でも有利なものである。非同期共分散推定量が一致性、漸近正規性を持つことがHayashi and Yoshida(Bernoulli2005,AISM2008)で証明された。サンプリングの機構が複雑なため、従来の確率解析学の計算法が馴染みにくい問題だが、幾つかの技巧により解決している。また、その後提案された類似の方法の中でも最も漸近分散が小さくなることが報告されている。サンプリング時刻が一般の停止時で、ボラティリティも一般の確率過程の場合に、strong predictability の概念を導入し、非同期共分散推定量の漸近混合正規性と安定収束の証明に成功した。

Dalalyan 氏と、レバレッジなしの場合に推定量の漸近展開を与えた。証明には摂動法と、セミマルチンゲールの安定収束の理論が使われている。主要項の高次の分布近似を決定するキュムラントの計算は、2時間軸のため複雑になる。

HY型の推定関数によって時間の相対化が可能となり、リード・ラグ推定問題においてそのアイデアに基づく確率場を考え、一致推定量を与えることができる。高頻度データから企業のリード・ラグが捉えられた。

● 混合型分布の場合の漸近展開

強可予測核を持つセミマルチンゲールの増分の2次変動過程はボラティリティ・パラメータの推定量として自然に現れる。その誤差分布に対して、混合ガウス過程への安定的収束が起きるが、それに対応する漸近展開は未知であった。通常、ガウス極限や独立増分過程が極限となる場合、確率過程の指数関数に対するポテンシャル(指数関数をマルチンゲールにするような因子の対数)は、極限を記述する決定論的な三つ組みで決まりランダムではなく、そのために期待値との交換が起きる。このことが伝統的な極限定理の証明の一つの本質的な部分であったが、三つ組みがランダムになる混合型極限の場合、この方法が全く使えなくなる。技術的な困難はこのように現れるが、これは混合成分に関する条件つき確率のもとでマルチンゲールがマルチンゲールでなくなるということの裏返しでもある。

混合型極限は統計の文脈では、フィッシャー情報量が極限においてランダムになるいわゆる非エルゴード統計の状況である。そこではマルチンゲールのエネルギーによるスチューデント化が自然な操作であり、それらの結合分布の挙動が重要になる。このように、条件付けする確率変数の値を与えたもとのマルチンゲールの歪みを計算することで、混合型極限の場合の漸近展開が得られる。条件つき確率を扱うことから理解されるように、展開係数の無限次元解析的な表現が現れる。ランダムシンボルを定義し、その随伴によって漸近展開式が与えられる。

● 確率過程の統計解析・シミュレーションのためのソフトウェア開発(YUIMA プロジェクト)

確率過程の統計解析およびシミュレーションのためのソフトウェアの開発を行った。統計科学で標準的な R 上に構築し、オブジェクト指向のプログラミングを行った。確率微分方程式、(非正則)時系列データ、サンプリング法のオブジェクト化を行い、それに対する統計処理とシミュレーションを行う様々な関数を実装、試験、改良を繰り返した。R-forge に開発ページを設け、パッケージを公開している。

3. 今後の展開

非線形時系列に対する高次統計推測論に関して、エルゴード的確率過程の漸近展開は近年ファイナンスの現象を精密に議論するための道具として利用されている。このような研究は応用上有益であろう。離散観測下での確率微分方程式の推定問題は、実装のためにも重要である。許容されるジャンプ構造のアクティビティの一般化、有限時間観測、非正則問題に対する大偏差不等式と疑似尤度解析の確立、サンプリング頻度の低減、推定アルゴリズムの適合化が重要である。非同期共分散推定は数学的に厳密な定式化がなされたのは比較的最近であり、その極限定理は確率統計学の対象としても重要である。非同期従属サンプリング・フィードバックありで共分散推定量が混合型極限となる場合に漸近展開を与えることは当面もっとも挑戦的な課題であろう。ソフトウェアの実装に関して、一連の実験を通して、その大規模化の可能性が見えている。また、

各モジュールの有機的結合とパフォーマンス向上のために、新しいアイデアが多数あり、YUIMA全体の構造変化を伴うため、それは新しいプロジェクトとして行う予定である。

4. 自己評価

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論は、疑似尤度解析の定式化によって成り、ジャンプ型過程にも適用範囲を広げ、ベイズ法の漸近挙動の解明も含めて進展があった。混合型極限における漸近展開法が見出されたことは、非エルゴード的統計学において高次統計推測論が始まるきっかけとなるかもしれない。分散デリバティブ等ファイナンスへの応用も期待している。非同期共分散推定問題は、マイクロストラクチャーも含めて、国際的にも重要性が認識されており、それに関係する論文はすでに多い。“Hayashi-Yoshida 推定量”と呼ばれている推定量の提案に始まり、非同期従属サンプリング下での漸近混合正規性の証明を与えたが、この分野に新しい研究の題材を提供できたものと思う。理論から得られる決定関数の計算やその評価の手段として、ソフトウェアとしての実装は避けられない課題である。本研究では、Rによるオブジェクト指向のシステムを構築し、確率微分方程式の疑似尤度解析、非同期共分散推定、漸近展開、ジャンプ過程の生成、確率微分方程式のシミュレーション等のモジュールを構築し、R-forgeに発表した。本課題におけるシステム構築の実験的試みは成功したと判断する。確率過程の統計推測理論をソフトウェアとして具現することは、多くのモジュールが同時に機能することではじめて可能となる。理論の基礎においても発展中であり、この試みが理論統計学の殆ど全分野にまたがり、したがって、多くの基礎的な問題を解かなければならないが、これは必然であるし、これまで類例がないのも理解される。

5. 研究総括の見解

確率微分方程式に対するデータ解析の基礎理論、確率数値計算および半解析的方法による期待値の近似、種々の近似法のオプションやリスク評価への応用を課題とし、確率過程の統計推測理論、漸近分布論、保険数理・ファイナンスへの応用を包括的に研究するとともに、ソフトウェアの実装研究を行なった。

6. 主要な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1.	Yuji Sakamoto, Nakahiro Yoshida: Asymptotic Expansion for Stochastic Processes: an overview and examples. J. Japan Statistical Society, 38, 173–185 (2008)
2.	林 高樹、吉田 朋広: 高頻度金融データと統計科学、21 世紀の統計科学 1: 社会・経済の統計科学、267–304 (2008)
3.	Takaki Hayashi, Nakahiro Yoshida: Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 60, 367–406 (2008)
4.	Takaki Hayash, Nakahiro Yoshida: Asymptotic normality of a nonsynchronous covariance estimator for diffusion processes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 60, no. 2, 357–396 (2008)
5.	Stefano Iacus, Masayuki Uchida, Nakahiro Yoshida: Parametric estimation for partially hidden diffusion processes sampled at discrete times. Stochastic Processes and their Applications, 119, 1580–1600 (2009)
6.	Yuji Sakamoto, Nakahiro Yoshida: Third-order asymptotic expansion of M-estimators for diffusion processes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 61, 629–661

	(2009)
7.	Stefano Iacus, Nakahiro Yoshida: Estimation for the change point of the volatility in a stochastic differential equation. Theor. Probability and Math. Statist. No. 78, 37–47 (2009)
8.	Yuji Sakamoto, Nakahiro Yoshida: Asymptotic Expansion for Functionals of a Marked Point Process. Communications in Statistics – Theory and Methods, 39, Issue 8 & 9, 1449–1465 (2010)
9.	Stefano Iacus, Nakahiro Yoshida: Numerical Analysis of Volatility Change Point Estimators for Discretely Sampled Stochastic Differential Equations. Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, 39, no. 1/2–2010, 107–127 (2010)

(2) 特許出願

研究期間累積件数: 0 件

(3) その他(主要な学会発表、受賞、著作物等)

1. 第 14 回日本統計学会賞 (2009 年 9 月) <http://www.jss.gr.jp/ja/society/prize.html>
2. Quasi-likelihood analysis and limit theorems for stochastic differential equations(招待) Market Microstructure, Confronting Many Viewpoints, Institut Louis Bachelier, Paris (2010.12.6–10)
3. Inference for Discretely Observed Diffusion Processes(招待) 1st R/ Rmetrics Summer School and 4th User/ Developer Meeting on Computational Finance and Financial Engineering, Meielisalp (2010.6.29)
4. Martingale expansion : mixed normal limit and applications (招待) International conference "DYNSTOCH meeting", Université d'Angers, Angers (2010.6.17)
5. Asymptotic expansion for a martingale with a mixed normal limit distribution(招待) DYNSTOCH Meeting 2009 Humboldt-Universität zu Berlin (2009.10.8)
6. Asymptotic expansion for the asymptotically conditionally normal law(招待, オーガナイザー) Asymptotical Statistics of Stochastic Processes VII, Université du Maine, Le Mans (2009.3.16)