

数学と情報科学で解き明かす多様な対象の数理構造と活用  
2020 年度採択研究者

2021 年度 年次報告書
------------------

山田 俊皓

一橋大学 大学院経済学研究科  
准教授

マリアバン解析と深層学習による高次元偏微分方程式の新しい計算技術

## § 1. 研究成果の概要

2021年度は本さがけ研究の中心となる数値計算法を考案し、重要な結果をいくつか得た。

1. 近年登場した高次元非線形偏微分方程式の数値解法である Deep BSDE をさらに効率的に計算するために、漸近展開による制御変数法を用いた新しい Deep BSDE の研究を進め、アルゴリズム開発・理論・応用ともに有用な結果を得た。特に、現実の設定で想定され得る様々な摂動モデルの下で漸近展開と深層学習を用いた近似アルゴリズムを考案し、近似の理論的誤差評価を与えた。高次元の物理モデルや数理ファイナンスモデルに対して数値検証を行い、数値結果が理論と整合していること及び高次元偏微分方程式に対して有効な近似を与えることを確認した。本研究の結果は、数値解析・応用数学の主要ジャーナルである *Journal of Computational Physics*<sup>1)</sup> に掲載されている。
2. 有限要素法や有限差分法などの偏微分方程式の解の空間近似法は「次元の呪い」の影響を受けるため高次元モデルの計算に応用することはできないが、本研究ではマリアバン解析を用いた確率微分方程式の高次弱近似法(高次離散化法)とディープニューラルネットワークの万能近似定理を応用し「次元の呪い」の影響を受けずに高速に高次元偏微分方程式の解を計算する空間近似法を考案した。さらに、この方法を発展させて、非線形偏微分方程式に対してマリアバン解析を用いた作用素分解法と深層学習を用いた高速計算法を提案した。本研究の成果は、*International Journal of Computational Methods*<sup>2)</sup>, *IEEE CSDE 2021*<sup>3)</sup>, *IEEE CIFEr 2022*<sup>4)</sup> にアクセプトされた。
3. 深層学習を用いた高次元偏微分方程式の計算に応用可能な数値計算法の研究を行い、(i) 深層学習計算と相性の良い楠岡近似、(ii) 準楕円拡散過程の期待値の高速計算、(iii) ジャンプ過程に対する効率的な計算法、(iv) McKean-Vlasov 型非線形確率微分方程式に対する高次離散化法、(v) 超関数に対する確率微分方程式の弱近似、などを構成した。これらの研究成果は、*SIAM Journal on Financial Mathematics*<sup>5)</sup> や *BIT Numerical Mathematics*<sup>6)</sup> などにアクセプトされた。

### 【代表的な原著論文情報】

- 1) “A new efficient approximation scheme for solving high-dimensional semilinear PDEs: control variate method for Deep BSDE solver”, *Journal of Computational Physics*, vol. 454, No. 1, 2022
- 2) “Deep weak approximation of SDEs: a spatial approximation scheme for solving Kolmogorov equations”, *International Journal of Computational Methods* (online first) 2022
- 3) “Deep Asymptotic Expansion: application to financial mathematics”, *IEEE CSDE 2021* (10.1109/CSDE53843.2021.9718463), 2022
- 4) “A deep learning-based high-order operator splitting method for high-dimensional nonlinear parabolic PDEs via Malliavin calculus: application to CVA computation”, *IEEE CIFEr* (10.1109/CIFEr52523.2022.9776096), 2022

5) “A Gaussian Kusuoka–approximation without solving random ODEs”, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 13(1), SC1–11 2022

6) “A higher order weak approximation of McKean–Vlasov type SDEs”, *BIT Numerical Mathematics*, vol. 62, 521–559, 2022