

「数学と諸分野の協働によるブレイクスルーの探索」
平成21年度採択研究代表者

H24 年度 実績報告

コハツ-ヒガ アルトゥーロ

立命館大学大学院理工学研究科・教授

複雑な金融商品の数学的構造と無限次元解析

§1. 研究実施体制

(1)「シミュレーション」グループ

① 研究代表者:コハツ-ヒガ アルトゥーロ (立命館大学大学院理工学研究科、教授)

② 研究項目

「ジャンプ型高次元確率微分方程式:無限次元解析とシミュレーション方法」

- ・最大値に依存する複雑金融派生商品のリスク解析
- ・ジャンプ型確率微分方程式の新シミュレーション方法
- ・漸近統計のための無限次元解析
- ・BSDE の数値解析
- ・状態スイッチングモデルに関して

(2)「データ解析」グループ

① 主たる共同研究者:内田 雅之 (大阪大学大学院基礎工学研究科、教授)

② 研究項目

「確率微分方程式の統計的モデリングと複雑金融商品の解析への応用」

- ・未知パラメータの統計的推定や統計的検定
- ・統計的モデル評価・選択問題
- ・金融・保険数理への応用

§ 2. 研究実施内容

【シミュレーショングループ】

本年度、シミュレーショングループは次のテーマで研究を行った。

1. 最大値に依存する複雑金融派生商品のリスク解析

最大値に依存する複雑金融派生商品のリスクに関して数学的な側面とシミュレーション的な側面での評価を行った。[S-4、S-5] 論文を作成し、現在評価中である。この論文では最大値に依存する複雑金融派生商品ではモデルやパラメータリスクが非常に大きくなる可能性があるため、数学的な結果である *mimicking* と呼ばれる議論を用いた。そのため最大値に依存する確率微分方程式の解析が必要であることが判明し、現在中津氏がこの場合の確率微分方程式に関して無限次元解析の研究を行っている。[S-R-1]

2. ジャンプ型確率微分方程式の新シミュレーション方法

ジャンプ型確率微分方程式の解のシミュレーションに関して次元圧縮方法により、様々な成果が得られた。[S-R-2,S-R-4]EPFL(スイス連邦工科大学)で特別講義を行った。[S-R-3]この成果については、他の国内外の研究者からの興味を引き、その方法の評価をしたいという依頼が多く寄せられた。また、最近MLMC(Multi level Monte Carlo)という新しいシミュレーション方法についてもジャンプ型確率微分方程式のシミュレーションのための応用が可能であるため、本研究で構築した方法と比較する必要がある。また、次元圧縮方法を使う際に無限次元との関係が明確でないため次年度より無限次元の表現から射影作用素として理解できるかどうか検討する。このために V. Bally 氏を招聘し、数学的な観点から共同研究を始め、この作用素の具体化により圧縮する次元の最適選択の可能性が高まると予想される。

複雑金融商品のジャンプ型モデルに関してリスク評価の研究が終盤となり、最終的な結論をまとめている。新たな展開として数学的の観点から使った議論の拡張に関しても考え始めた。

3. 漸近統計のための無限次元解析

現在の無限次元解析の展開がデータ解析グループの理論問題でも適応できる段階になり、その準備を行っている。まず、簡単なジャンプ型確率過程に関する推定量に関して漸近的な性質を証明した。今後、ジャンプ型確率微分方程式に関する拡張について検討する。[S-3]

4. BSDE の数値解析

複雑金融派生商品のヘッジや価格の解析のためにはBSDE(後退確率微分方程式)が非常に一般的となっている。またリスク評価のために将来的に用いる可能性があるが、シミュレーションの観点からいくつかの問題がある。特にこの方程式の解が時間と共に変化するモデルであり、各時間では条件付き平均を計算すべきであるため、シミュレーションの観点からは非常に難しい問題である。このため、現状では条件付き平均を計算するために回帰分析のような方法を使う論文が多いが、その数値解析が非常に複雑になっている。本年度は、次

元を圧縮するために Makhlouf 氏が基底を定め、各時間にその基底での展開係数を計算する方法を考え、その数値計算法を完成させ論文にまとめた。(現在、評価中) また、田中氏が数値解析のために新しい方法を構築した。この方法の拡張性を見せるために無限次元確率微分方程式の設定で展開している。このことは、編確率微分方程式の分野でも影響し、解析方法として提案する。

5. 状態スイッチングモデルに関して

結城氏[S-1]が、ドリフト係数が滑らかでない場合の解の密度関数の存在と Holder 連続性に関して調べ、このようなモデルのシミュレーションを行い、いくつかの推測ができた。例えば、弱近似として行う際にドリフト係数が滑らかでない場合であっても Euler-丸山近似の精度が落ちないが、理論的な証明は存在しない。この目的を達成するために結城氏が証明した性質が役にたつと思われる。また、強近似では精度が低下する可能性があることが最近の Gyongy-Rasonyi で理論的な結果から分かった。[S-2, S-6]

【データ解析グループ】

1. [D-3]は、ファイナンスで重要となる拡散過程モデルの特殊ケースである、自己回帰的な過程 (Ornstein-Uhlenbeck 過程)を考察し、さらに非エルゴード的な状況でのデータに基づく推定理論を述べたものである。金利等の効果を考えた経済モデルはこのようなプロセスに従うことがあり、データ解析における一つの重要なツールと考えられる。[D-4]は上記[D-3]の一般化であり、ドリフト係数が非線形で、拡散係数も状態に依存するような一般の拡散過程に関する離散観測推定をエルゴード性に頼ることなく行ったものである。実際に用いられる拡散過程モデルはしばしば非エルゴード的であり、このような一般論を論ずる必要がある。[D-7]では一般のレヴィ過程によって駆動される確率微分方程式において、離散観測に基づくドリフトパラメータの推定を行っている。推定量は最小二乗型で、サンプル数の増加に加えて、ジャンプ項が漸的に消滅するという漸近理論を用いて推定量を正当化している。また、ノイズとなるレヴィ過程は、一般のセミマルチンゲールにまで拡張可能であることも示した。[D-9]では、ドリフトとジャンプで変動する確率過程に関するノンパラメトリック推定問題に取り組んだ。このような確率過程における局所時間の確率積分表現を導出し、この結果をもとに定常密度および強度関数に対する一致推定量を構成することに成功した。[D-R-1]では、金融高頻度観測データで生じる統計分析上の問題の一つである”非同期観測”の問題に関連し、非同期観測された拡散過程に対する最尤型・ベイズ型推定量を構築し、その一致性、漸近混合正規性や高次モーメントの収束などの漸近的性質を証明した。
2. [D-1]では、エルゴード的拡散過程から得られる高頻度データを用いて、ドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適合的最尤型推定量を 3 種類提案し、それらの漸近正規性やモーメント収束などの漸近的性質を証明した。これにより、確率微分方程式に出現する未知パラメータに対して、計算効率がよく、かつ高精度な推定が可能となった。更に、拡散過程パラメトリックモデルに対して、adaptive estimator を用いて モデル選択規準を構成し、その漸近不

偏性を証明した(論文投稿中)。また、この結果を金融時系列データ解析へと応用するため、ニューヨーク証券取引所の TAQ データベースを整備・構築し、解析で必要となる統計ソフト R によるプログラム開発を進めた。

3. [D-10]では、株式市場で取引される株式の買い注文、売り注文での約定数の不均衡から、取引参加者間の情報の非対称性の程度を計測する方法に関して考察を行った。日次観測データを利用する場合、時間帯ごとの不均衡が集約されることにより、本来そこで観察されるべき非対称性を見えにくくしていることを、5分ごとの観測区分を推定に用いることで明らかにしている。[D-8]では、オプション市場価格、CDS 市場価格が定める原資産価格分布の性質を研究した。ある特定のペイオフに対するエキゾチックオプション価格が一意に定まり、それが一般のヨーロッパ型オプション価格の漸近展開係数を決定することを見いだした。この事実を応用した市場リスクの効率的な計測法を提案し、日経平均オプション価格データを解析した。[D-2]では、保険クレームが複合ポアソンの、かつ微小なブラウン摂動がある場合に、保険サープラスのリスク関数として近年注目されている Gerber-Shiu 関数のデータに基づくノンパラメトリック推定について議論し、ある種の一致推定量を得た。[D-5]では、保険ポートフォリオの破産時刻を、サープラスのある定数境界への初期到達時刻と広義に解釈することにより、ファイナンスにおけるある種のデフォルト(倒産)の概念を含むように拡張し、そのデフォルトに関するリスク関数に対していくつかの解析的表現を、保険数理(リスク理論)の観点と、レヴィ変動理論(fluctuation theory)の2つの観点から導出したものである。[D-6]は古典的なレヴィ型の保険リスクモデルの下での破産確率評価法の一つである。一般には陽な表現を持たない破産(確率)関数に対して、保険会社が保険料に課す付加率が小さい状況における近似の表現を与えており、競合的な状況における保険会社のリスク管理に有用である。

§3. 成果発表等

(3-1) 原著論文発表

●論文詳細情報

【シミュレーショングループ】

- [S-1]. M. Hayashi, A. Kohatsu-Higa and G. Yuki, “Local Holder continuity property of the density of solutions of SDE’s with singular coefficients”. *Journal of Theoretical Probability*, 2012. (DOI:10.1007/s10959-012-0430-7), Vol. 22(2), pp.277-309, 2012
- [S-2]. Kohatsu-Higa A. and A. Tanaka. “A Malliavin Calculus method to study densities of additive functionals of SDE’s with irregular drifts.” *Annales de l’Institut Henri Poincare*, volume 48, 2012, 871-883.
- [S-3]. Hoang-Long Ngo, “An estimation of integrated cross volatility for

high-frequency asynchronous data”, *Journal of Non-parametric Statistics*, article, 2012 *Journal of Nonparametric Statistics*, 24:2, 465-480 (DOI:10.1080/10485252.2011.647696)

- [S-4]. Emmanuel Gobet and Azmi Makhlouf, “The tracking error rate of the Delta-Gamma hedging” strategy. *Mathematical Finance* (DOI: 10.1111) Vol. 22(2), pp.277-309, 2012.
- [S-5]. M. Hayashi and A. Kohatsu-Higa., “Smoothness of the distribution of the supremum of a multi-dimensional diffusion process.” *Potential Analysis* Volume 38/ 1, 57-77, 2013.
- [S-6]. Arturo Kohatsu-Higa and Azmi Makhlouf., “Estimates for the density of functionals of SDE's with irregular drift.” *Stochastic Processes and their Applications*. To appear 2013
<http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2013.01.006>, Volume 123, Issue 5, May 2013, Pages 1716–1728

【データ解析グループ】

- [D-1]. Masayuki Uchida and Nakahiro Yoshida, “Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data”, *Stochastic Processes and their Applications*, 122, no. 8, pp.2885-2924, 2012 (DOI: 10.1016/j.spa.2012.04.001).
- [D-2]. Yasutaka Shimizu, “Nonparametric estimation of the Gerber-Shiu function for the Wiener-Poisson risk model”, *Scandinavian Actuarial Journal*, Issue1, pp.56-69, 2012 (DOI: 10.1080/03461238.2010.523515).
- [D-3]. Yasutaka Shimizu, “Local asymptotic mixed normality for discretely observed non-recurrent Ornstein-Uhlenbeck processes”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 64, No. 1, pp.193-211, 2012 (DOI: 10.1007/s10463-010-0307-4).
- [D-4]. Yasutaka Shimizu, “Estimation of parameters for discretely observed diffusion processes with a variety of rates for information”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol.64, No.3, pp.545-575, 2012 (DOI: 10.1007/s10463-010-0323-4).
- [D-5]. Runhuan Feng and Yasutaka Shimizu, “On a generalization from ruin to default in a Lévy insurance risk model”, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2012 (DOI: 10.1007/s11009-012-9282-y).
- [D-6]. Yasutaka Shimizu, “Edgeworth type expansion of ruin probability under Lévy risk processes in the small loading asymptotics”, *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012.

- [D-7]. Long Hongwei, Yasutaka Shimizu and Wei Sun, “Least squares estimator for discretely observed stochastic processes driven by small Lévy noises”, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol 116, pp. 422-439, January, 2013
(DOI: 10.1016/j.jmva.2013.01.012)
- [D-8]. Masaaki Fukasawa (2012): The normalizing transformation of the implied volatility smile, *Mathematical Finance* 22, No.4, 753-762.
- [D-9]. Takayuki Fujii and Yoichi Nishiyama, “Some problems in nonparametric inference for the stress release process related to the local time”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. vol. 64, pp 991-1007, 2012 (DOI: 10.1007/s10463-011-0344-7)
- [D-10]. 大屋 幸輔 (2012)「日中データによる情報の非対称性の計測」,『先物・オプションレポート』, 大阪証券取引所, Vol.24 No. 7.

【シミュレーショングループ】

- [S-R-1]. Kohatsu-Higa, A. and Nakatsu, T. “Calculation of vega for Lookback type options”, in preparation
- [S-R-2]. Kohatsu-Higa, A. and Ngo, L. “Weak approximations for SDE’s driven by Levy processes.” To appear in the proceedings of the Ascona conference, 2012.
- [S-R-3]. A. Kohatsu-Higa, “A short course on weak approximations for Lévy driven SDE's.” *Proceedings of the Bernoulli short course at EPFL, 2012.*, To appear 2013.
- [S-R-4]. Arturo Kohatsu-Higa Salvador Ortiz-Latorre Peter Tankov, “Optimal simulation schemes for Levy driven stochastic differential equations”, *Mathematics of Computation.*, To appear 2013.

【データ解析グループ】

- [D-R-1]. Teppei Ogihara and Nakahiro Yoshida, “Quasi-Likelihood Analysis for Stochastic Regression Models with Nonsynchronous observations”, arXiv:1212.4911. (2012)