

日比 孝之

大阪大学大学院情報科学研究科・教授

現代の産業社会とグレブナー基底の調和

## §1. 研究実施体制

### (1) 理論系第1グループ

- ① (研究代表者) 日比孝之 (大阪大学大学院情報科学研究科、教授)
- ② 研究項目 「先端科学技術に現れるグレブナー基底の代数的理論の探究」

### (2) 理論系第2グループ

- ① (主たる共同研究者) 大杉英史 (立教大学理学部、教授)
- ② 研究項目 「先端科学技術に現れるグレブナー基底の代数的理論の探究」

### (3) 応用系第1グループ

- ① (主たる共同研究者) 竹村彰通 (東京大学大学院情報理工学系研究科、教授)
- ② 研究項目 「グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究」

### (4) 応用系第2グループ

- ① (主たる共同研究者) 青木 敏 (鹿児島大学理学部、准教授)
- ② 研究項目 「グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究」

### (5) 計算系第1グループ

- ① (主たる共同研究者) 高山信毅 (神戸大学大学院理学研究科、教授)
- (主たる共同研究者) 野呂正行 (神戸大学大学院理学研究科、教授)
- ② 研究項目 「グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発」

### (6) 計算系第2グループ

- ① (主たる共同研究者) 濱田龍義 (福岡大学理学部、助教)
- ② 研究項目 「グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発」

## § 2. 研究実施内容

平成24年度は、人件費で雇用しているポスドク(特任助教を含む)等の内、4名が国公立大学(九州大学、信州大学、福岡教育大学、静岡県立大学)のパーマネントのポストを得ることができた。従って、プロジェクトの研究開始から、既に、6名のポスドク等が国公立大学のパーマネントのポストに就いたことになる。チームの若手研究者育成は、全体研究計画書に記載している以上の成果を挙げており、人件費の効率的な使途を反映している。

平成24年度の研究は、研究実施計画書に従い、(戦略a)、(戦略d)、(戦略e)、(戦略g)を展開した。何れの戦略も研究実施計画書に沿った成果を十分に挙げる事ができた。以下、それぞれの戦略の具体的な研究実施内容を記す。

### (戦略 a) 分割表などのマルコフ基底の具象的探究

統計学における2元分割表解析においては、独立性のモデルが基本的なモデルであるが、これに特殊な交互作用項を加えたモデルも、応用上重要である。特に、一部の部分表に効果が加わる部分表問題は、グレブナー基底の観点からも興味深い。論文[1]では、複数の部分表に効果を加えたブロック効果型のモデルに対するマルコフ基底を得ることに成功している。

2元分割表の独立モデルは、有限グラフとして解釈すると、二部グラフに対応する。これに対して、一般の有限グラフに対応するモデルはランダムグラフのベータモデルである。特に、グラフの辺の頻度を0か1に制約した場合、統計への応用のためには頻度の制約されたファイバーの連結性を保証する必要がある。このように頻度が制約された問題においても、Graver 基底を使うことができればマルコフ連鎖の連結性を保証することができる。論文[10]では、ランダムグラフのベータモデルに対する Graver 基底の特徴付けを与え、それを駆使することから、ベータモデルの正確検定が遂行できることを示している。

分割表のモデルにおいて、最も簡単なモデルでありながら、対応するグレブナー基底が複雑になるものは、3元分割表の無3因子交互作用モデルである。このモデルでは水準数が増えるに従い、グレブナー基底が複雑となるが、その複雑性の評価のために「Graver 複雑性」と呼ばれる概念を使うことができる。既存の文献では、一つの要因の水準数が3と制限された場合に限り Graver 複雑性の下限が知られていたが、論文[8]ではこれを任意の水準数に一般化し、Graver 複雑性の下限を評価している。

グレブナー基底の統計への応用に加えて、応用系グループでは、格子点の集合の超平面による分離に関する結果([4])、ランキングモデルに対する超平面配置理論の応用に関する幾つかの結果([3, 5, 7])を得ている。

### (戦略 d) Risa/Asir の進化とグレブナー基底の高速計算

有理関数体上の微分作用素環  $R_n$  における0次元左イデアルが表す微分方程式系の解の部分多様体への制限が満たす方程式系を、グレブナー基底の項順序変換を高速に行う FGLM ア

ルゴリズムを応用して求める方法を考案した。この方法はまだ理論的には不完全ではあるが、得られる方程式系が解を annihilate することは保証されている。この方法を Wishart 分布に関する累積分布関数の計算に必要な matrix 1F1 の対角領域への制限に適用し、8変数までのすべての対角領域の configuration に対する微分方程式系を求めることに成功している。これにより、対角領域でもホロノミック勾配法が適用可能になる。

#### (戦略 e) D加群の積分アルゴリズムの実装とその応用

一般的な積分(制限)アルゴリズムは万能ではあるが、実在するコンピューターで解ける問題のサイズは一般に小さい。従来、SO(3) の Fisher 分布の満たす微分方程式系の制限の計算を実際に遂行することは懸案であったが、理論的な考察と未定係数法等を駆使することにより、上記の微分方程式系の対角への制限の計算に成功している([9])。更に、Fisher 分布の正規化定数を高速に計算できるようになり、最尤推定への応用も可能となった。これらの成果は、論文[9]とともに、統計システム R のパッケージとして一般に公開した。方程式系の特異点集合の計算問題も同種の困難があるが、論文[14]では SO(3) の場合と同様に理論的考察を駆使することから、グレブナー基底を決定し、Lauricella Fc について特異点集合を決定することに成功している。

#### (戦略 g) ``素手``で計算できるグレブナー基底の「辞書」の作成

有限グラフの切断イデアルの生成系が、或る種の2水準実験に対するマルコフ連鎖モンテカルロ法に必要なマルコフ基底であることを発見した。これにより、切断イデアルの既存の「辞書」を活用して、一部の2水準実験に対して、マルコフ連鎖モンテカルロ法に必要なマルコフ基底の「辞書」を作成することが可能になった。特に、高々2個の方程式で定義される2水準実験は、必ず或る有限グラフの切断イデアルに対応することが証明できたため、切断イデアルに関する「辞書」を活用し、二次のムーブから成るマルコフ基底を理論的に構成することに成功している。

更に、algebroid curve の研究([6, 13])、中心的対称配置の研究([15])に加え、いわゆる adjacent 2-minor の研究([17, 18])を継承し、計算代数統計への応用を考慮しながら、計算可換代数と凸多面体の研究([11, 12, 19, 20])を推進するとともに、トーリックイデアルがスクエアフリーな項を持つサーキットで生成されるための条件についての研究([16])を展開している。

特に、論文[12]では、単体的複体の facet に付随する minor が生成するイデアルの準素イデアル分解、グレブナー基底などに関する具象的な研究を展開し、その計算代数統計への応用を議論しており、計算代数の観点からも、豊富な研究課題を提供する論文である。

他方、hgm パッケージは KNOPPIX/Math の後継である MathLibre へ、今後、統合する計画であるが、その初代である MathLibre 2013 を発表した。この開発の別の動機として、[2]において複素双曲空間内の Lie 実超曲面の内在的不変量を決定したことが挙げられる。Lie 実超曲面は Lie 環の変形という視点からも興味深く、LiE 等のソフトウェアの活用が今後期待される。

### §3. 成果発表等

#### (3-1) 原著論文発表

##### ●論文詳細情報

- [1] M. Ogawa and A. Takemura, Markov bases for typical block effect models of two-way contingency tables, *Journal of Multivariate Analysis* 112 (2012), 219--229. (doi:10.1016/j.jmva.2012.06.007)
- [2] T. Hamada, Y. Hoshikawa and H. Tamaru, Curvatures properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, *Journal of Geometry* 103 (2012), 247--261. (doi:10.1007/s00022-012-0127-1)
- [3] H. Kamiya, A. Takemura and N. Tokushige, Application of arrangement theory to unfolding models, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 62 (2012), 399--415.
- [4] T. Kashimura, Y. Numata and A. Takemura, Separation of integer points by a hyperplane under some weak notions of discrete convexity, *Discrete Mathematics* 313 (2013), 8--18. (doi:10.1016/j.disc.20120.09.018)
- [5] H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Arrangements stable under the Coxeter groups, ``Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology'' (A. Björner, et al., Eds.), *Scuola Normale Superiore Pisa*, pp.327--354, 2012.
- [6] T. Shibuta, Gröbner bases of contraction ideals, *Journal of Algebraic Combinatorics* 36 (2012), 1--19. (doi:10.1007/s10801-011-0320-6)
- [7] H. Koizumi, Y. Numata and A. Takemura, On intersection lattices of hyperplane arrangements generated by generic points, *Annals of Combinatoris* 16 (2012), 789--813. (doi:10.1007/s00026-012-0161-6)
- [8] T. Kudo and A. Takemura, A lower bound for the Graver complexity of the incidence matrix of a complete bipartite graph, *Journal of Combinatorics* 3 (2012), 695--708.
- [9] T. Sei, H. Shibata, A. Takemura, K. Ohara and N. Takayama, Properties and applications of Fisher distribution on the rotation group, *Journal of Multivariate Analysis* 116 (2013), 440--455. (doi:10.1016/j.jmva.2013.01.010)
- [10] M. Ogawa, H. Hara and A. Takemura, Graver basis for an undirected graph and its application to testing the beta model of random graphs, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 65 (2013), 191--212. (doi:10.1007/s10463-012-0367-8)
- [11] T. Hibi, N. Li and Y. X. Zhang, Separating hyperplanes of edge polytopes, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120 (2013), 218--231. (doi:10.1016/j.jcta.2012.08.002)
- [12] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and F. Mohammadi, Determinantal facet ideals,

- Michigan Mathematical Journal 62 (2013) 39--57. (doi:10.1307/mmj/1363958240)
- [13] T. Shibuta, Irreducibility criterion for algebroid curves, *Mathematics of Computation* 82 (2013), 531--554. (doi:10.1090/S0025-5718-2012-02607-X)
  - [14] R. Hattori, N. Takayama, The singular locus of Lauricella's  $F_C$ , *Journal of Mathematical Society of Japan*, to appear.
  - [15] H. Ohsugi and T. Hibi, Centrally symmetric configurations of integer matrices, *Nagoya Mathematical Journal*, to appear.
  - [16] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals and their circuits, *Journal of Commutative Algebra*, to appear.
  - [17] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals of finite graphs and adjacent 2-minors, *Mathematica Scandinavica*, to appear.
  - [18] J. Herzog and T. Hibi, Ideals generated by adjacent 2-minors, *Journal of Commutative Algebra*, in press.
  - [19] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, and A. Qureshi, The binomial edge ideal of a pair of graphs, *Nagoya Mathematical Journal*, to appear.
  - [20] V. Ene and T. Hibi, the join-meet ideals of a finite lattice, *Journal of Commutative Algebra*, to appear.