

コハツ・ヒガ アルトゥーロ

大阪大学大学院基礎工学研究科・准教授

複雑な金融商品の数学的構造と無限次元解析

§1. 研究実施の概要

22年度では高次元ジャンプ型確率微分方程式を信用リスクモデルとして考え、理論的な展開とシミュレーションの実験を行った。提案したシミュレーションの方法では、ジャンプが少ない複合ポアソン過程を用いて確率微分方程式の解の近似を行う。21年度の研究では、固定した時間分割を用いたのに対し、このシミュレーション方法では、ランダムな時間分解を用いた。近似に現れる複合ポアソン過程のジャンプの最適な構造についても研究を行っている。また、シミュレーション関係の理論展開として最大値に対しての Malliavin 解析(無限次元空間上での微積分論)や、BSDE (backward stochastic differential equations) に対するシミュレーションの方法を提案した。現在も引き続き、滑らかでない汎関数のマリアバン解析の研究を行っている。作用素分解を用いたシミュレーション方法については安定過程にも拡張し、今後シミュレーションを行っていく予定である。これに基づいた複雑な金融商品の研究も検討している。これらの技術を使い、複雑な金融商品のモデルに基づいてリスク量の計算をより高速で精度の高いものにし、投資家が、今より正確な判断ができるようになるのではないかと考えている。

データ解析サブグループでは、実際のデータに基づいて、株価データの理論応用への解析準備を行った。その解析(一般にキャリブレーションと呼ばれる)のためにマイクロストラクチャーノイズからのバイアス補正法を提案した。モデル選択方法と adaptive estimator についてのパフォーマンスについて研究を行い、ジャンプの存在についての検定論の提案準備を行っている。また、より現実の市場データに近づけるようにキャリブレーションの道具についても研究を行っている。本年度株価データを購入し、次年度から準備した統計道具を使い実際のデータ解析を行う予定である。その結果で、モデルを想定しシミュレーショングループが、より正確なリスク量の計算に使用する。

§2. 研究実施体制

(1)「シミュレーション」サブグループ

① サブグループ長:コハツ・ヒガ アルトゥーロ (大阪大学大学院基礎工学研究科、准教授)

② 研究項目

▼ジャンプ型 SDE の近似

理論的な側面からみたランダムな刻みに関する作用素分解法

- ・モーメントが存在する場合
- ・モーメントが存在しない場合(安定過程)

▼Malliavin 解析

- ・確率微分方程式の最大値
- ・Greeks の計算
- ・ジャンプ型確率微分方程式の Greeks の新しい計算手法の開発

▼BSDE の解の新しい計算手法の開発

(2)「データ解析」サブグループ

① サブグループ長:内田 雅之 (大阪大学大学院基礎工学研究科、教授)

② 研究項目

▼マイクロストラクチャーノイズを含んだ高頻度データのボラティリティ推定量に対するバイアス補正法

▼エルゴード的拡散過程のモデルの **adaptive estimator** の構成

▼非エルゴードの場合:パラメータの同時推定

▼倒産確率の推定

▼キャリブレーション:インプライドボラティリティの構造

(3) 研究アドバイザー

大西 匡光

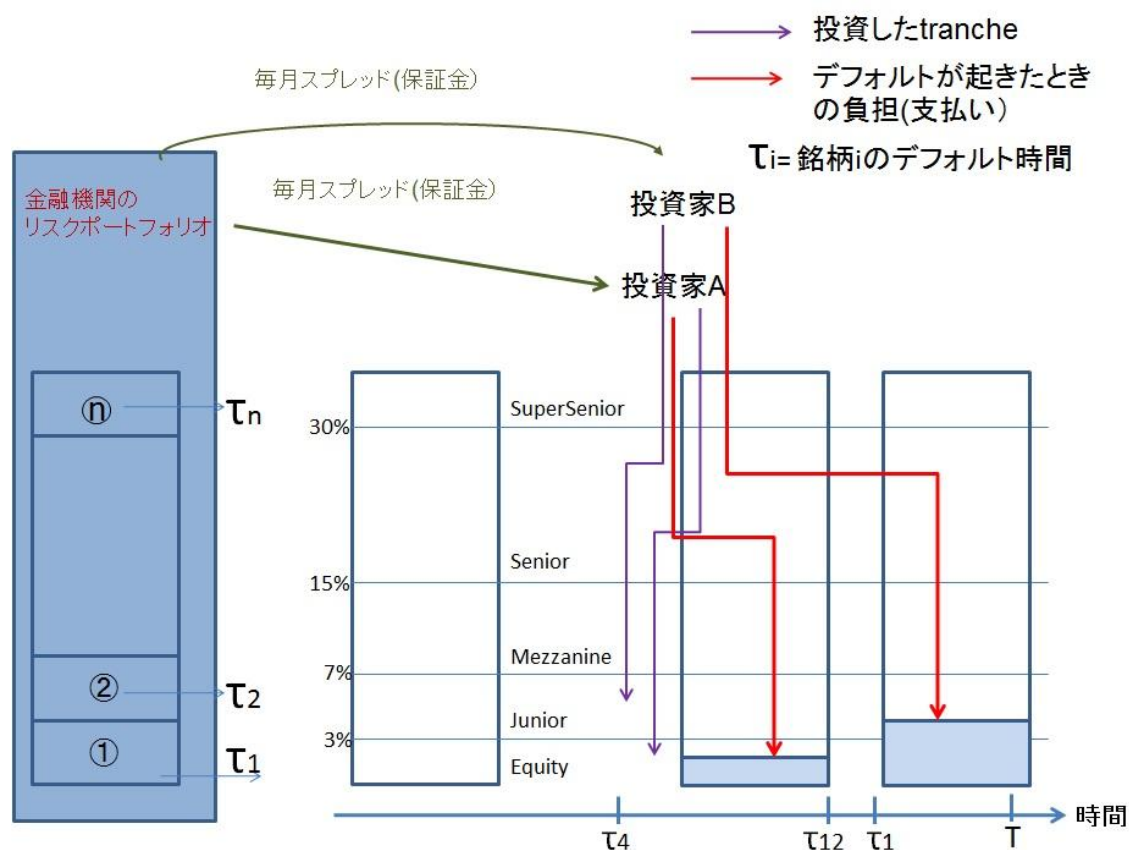
田村 隆志

§3. 研究実施内容

(文中に番号がある場合は(4-1)に対応する)

シミュレーションサブグループ

複雑な金融商品について CDO(collateralized debt obligation: 貸付債権や債券などからなる金融商品を担保とする金融商品)を用いて簡単に説明する。



ある金融機関が銘柄 1,...,n (例えば、銘柄 i が会社 i の債権である) の集まりを所有している。この金融機関はデフォルトリスクを避けるために、CDO という複雑な金融商品を構成する。金融機関は銘柄をリスククラス(金融業界では、各クラスのことを 'tranche' と呼ぶ)に分ける(上の図では5つの tranche に区分している: Equity (高リスク高リターン) から SuperSenior (低リスク低リターン) まで)。

投資家(信託銀行等)はこれらの各 tranche のリスク量を計算し投資する(この投資額は、担保として預ける)。保証金(スプレッド)を毎月もらうことができるが、スプレッドはリスク tranche により異なる(Equity tranche のスプレッドの方が高くなることが通用である)。デフォルトが起きると、投資した金額(担保)が Equity tranche から順に金融機関に支払われるので投資金額は消えていく。上の図では Equity tranche に投資した、投資家 A の時刻 T での投資額は完全に消えている。

Junior tranche 投資した投資家 B のある部分も消えている。

この金融商品をモデル化するために、銘柄 i の価格指数を $X_i(t)$ ($0 \leq t \leq T$) とする。この価格指数 $X_i(t)$ が、ジャンプ型確率微分方程式に従うものとする。さらにデフォルトの定義として「 X_i がある値 K_i を下回るときにデフォルトが起こる」とする。このようなモデルで、スプレッドの評価、リスク量などの計算を行いたい。21年度に、複雑な金融商品の議論を行った結果、数学的な性質についての今後の研究の進め方として、以下の主な方針をたてた。

1. 高次元ジャンプ型確率微分方程式を扱う。
2. 1. のシミュレーション方法に関する研究を行う。
3. データの解析を行うために、統計学的な新しい技術の開発を行う。

以下に、上記3つの方針に沿って実施した、22年度の研究実施内容について詳しく説明する。ジャンプ型確率微分方程式(脚注1)のシミュレーション方法について新しい手法を提案し、理論的な側面の結果を得た(現在、論文を作成中)。ファイナンスで扱うジャンプ型確率過程が主に無限ジャンプ Lévy 過程であるため(脚注1)、Lévy 過程に限定してシミュレーションの方法を考えた。21年度に、確率微分方程式の解の近似を構成するために固定した時間分割を使い、数学的な近似誤差について研究を行った。これに対して本年度はランダムな時間分割を使った近似方法を考えた(参考文献:8) 9) 12))。また、この近似方法が具体的に適用できることを証明し、さらに数学的な近似誤差についての評価を得た(参考文献: 1))。しかし、ブラウン運動を含めた Lévy 過程の場合は、この近似方法は適用することができない。そのため、作用素解析法を用い、ブラウン運動を含めた Lévy 過程の場合での数学的な近似誤差の評価を行った(現在、論文を作成中)。また、近似方法として複合ポアソン過程を用いるため、近似誤差の評価だけではなく、近似過程のジャンプの構成についての研究も可能となり、特に最適なジャンプをもつ近似過程の構成をすることが可能になった。これによって、複雑な Lévy 過程を簡単な複合ポアソン過程で近似することができ、確率微分方程式の解のシミュレーションが容易になった。

この手法はモーメントを持つ Lévy 過程の場合に適用することができる。ところが、モーメントを持たない Lévy 過程にも安定過程など重要なものがあり、シミュレーション方法を考える必要がある。その中で、安定過程の場合は近似について上述シミュレーション方法と同様の結果を得られるのではないかと考えられる。この研究は、S. Ortiz (Imperial College)と、P. Tankov (Ecole Polytechnique)との共同研究である。

デフォルトの重要な要素として、デフォルト時間(価格指数 X_i がある値 K_i を下回った時間)について

1 ファイナンスで扱うジャンプ型確率過程は、主に Lévy 過程である。Lévy 過程のうちジャンプの頻度が少ないもの(有限時間内に有限回のジャンプしかおこらない)は複合ポアソン型ジャンプ過程と呼ばれ、一方で、バリアンスガンマ過程など有限時間内で無限回ジャンプをするものは無限ジャンプの Lévy 過程と呼ばれる。確率微分方程式のノイズに Lévy 過程を使うとき、ジャンプ型確率微分方程式と呼ぶ。

て研究を行いたい。そのため、Malliavin 解析理論(無限次元空間上での微積分論)を用いて、 X_t の最大値、最小値の密度関数の存在と滑らかさについての研究を行っている。現在のところ、既に知られている Malliavin 解析理論を用いて、どこまで解析を進めることができるのかを検討している(林 正史 CREST 特任助教)。現在までに知られている Malliavin 解析では、解析道具として十分とは言えず、別の方法を考える必要がある。そこで、「弱 Malliavin 解析」という方法を提案している。この研究から、ランダムに変動している価格指数 X_t の最大値、最小値に対しても、Taylor の定理のような近似方法を得られるのではないかと考えている。

BSDE (後退確率微分方程式)について研究も行っている。このタイプの確率微分方程式では、初期値を設定するのではなく最終値問題として確率微分方程式を扱う。この問題は様々な分野に応用があり、特に商品の価格付けの方法に応用されている。複雑な金融商品においては、最終値における価格の分布から商品の性質を調べることになる。理論上、BSDE も通常の確率微分方程式と同様に無限次元問題であるが、BSDE は最終値問題であるため、通常の確率微分方程式のシミュレーション方法よりも、複雑なシミュレーション方法しか存在しない。そこで、簡単なシミュレーション方法を提案する必要がある。近年、いくつかのシミュレーション方法が提案されているが高速な方法とは言えない。そのため、Splitting を用いた新しいシミュレーション方法を提案することを目的としている。現在、(A. Makhlof CREST 特任助教が)この問題について研究を行っている。

データ解析サブグループ:

複雑な金融商品のモデルの研究のために、高頻度データ(金融商品の各取引の売買記録)を利用したパラメータ推定を行う必要がある。そのため、今年度12月に TAQ データを購入し、データ解析に向けた準備を行った。

パラメータ推定の基本的な問題としてボラティリティ(脚注2)の推定があげられる。高頻度データを利用したモデル推定の場合、マイクロストラクチャーノイズ(金融市場のマイクロ構造に起因するノイズ)の影響を無視すると、ボラティリティ推定量はバイアスを持つことが知られている。しかし、ノイズの影響を考慮した推定量の多くは、そのノイズの時系列特性を所与とするものであり、効率性の面で理論的には優れていても、実用に際してはその理論的優位性は必ずしも保たれない。提案した推定量はそのようなノイズの時系列特性をデータから推定する方法であり、数値実験においてもその頑健性が示されている(参考文献:3)。

高頻度データからマイクロストラクチャーノイズの影響を取り除いた後に、データからパラメータ推定を行うことができる。データからパラメータ推定を行う場合、エルゴード的(前記脚注 2)拡散過程であることを仮定することが通用である。エルゴード的拡散過程のモデル評価及び、ボラティリティの推定を効率よく行うための adaptive estimation について、研究を行った。具体的には、エル

2 ボラティリティとは、ある金融銘柄に対する価格変動の大きさを表すパラメータのこと。

エルゴード性とは、大数の法則が成立するために必要な条件のこと。

ゴード的拡散過程のドリフト推定量とボラティリティ推定量の収束率の違いに着目して、初期推定量として、シンプルなボラティリティ推定量を用いて、ドリフト推定量を導出し、そのドリフト推定量を用いて、新たなボラティリティ推定量を導出する。これを必要回数繰り返すことによって得られる **adaptive estimator** の漸近正規性および、モーメントの収束を示した。さらに、シミュレーションにより、従来の **(joint) estimator** よりも良いパフォーマンスを有することが確認された。特に、推定量を導出する時間が速くなったことは実装という意味で、非常に有益であると思われる。

ある複雑な金融商品のモデルでは、エルゴード性を満たさない(非エルゴード性)データが現れる場合もある。それらのパラメータ推定も、モデル選択等の統計的手続きを行う際に不可欠である。非エルゴード的な拡散過程をいくつかのクラスに分類し、ドリフトとボラティリティパラメータの同時推定に対して、それらの明示的な推定量を提案し、現実的な条件の下での収束率を調べた(参考文献: 2) 4) 6))。いくつかの場合には、ある種の漸近有効性が達成されることも示した。

ボラティリティは重要なリスク量であるが、複雑な金融商品を研究する場合にはインプライドボラティリティという概念も重要になる。インプライドボラティリティは対象資産の将来の価格分布に対する市場の予想を反映したものであり、特に企業の倒産確率なども織り込まれている。信用リスクモデルに対するキャリブレーションを念頭に、インプライドボラティリティの構造について研究を進め、インプライドボラティリティとその対象資産価格分布(状態価格密度)を直接的に関係付ける新しい公式を発見した。特にバリアンススワップとガンマスワップの理論行使価格間に、ある双対性が成立することを示した(参考文献: 10) 11))。

また、ジャンプ型モデルの推定を行う必要もある。その一つとして、無限ジャンプの Lévy 過程に対する破産確率の推定について研究した。これは、信用リスク評価との関連で重要な問題である。提案した推定量は、ある種の“正則化ラプラス逆変換”によるもので、統計的一致性をもち、明示的に計算可能なものである。ただし、数値計算に関する難点があり、他のラプラス逆変換法による推測法についても研究を進めている(参考文献: 5) 7))。

§4. 成果発表等

(4-1) 原著論文発表

●論文詳細情報

1. A. Kohatsu-Higa and P. Tankov. Jump-adapted discretization schemes for Lévy-driven SDEs. *Stochastic Processes and Their Applications*, 120, 2010, 2258-2285 (DOI:10.1016/j.spa.2010.07.001)
2. Yasutaka Shimizu, “Threshold selection in jump-discriminant filter for discretely

observed jump processes” Statistical Methods & Applications, vol.19, no.3, pp. 355-378, 2010. (DOI: 10.1007/s10260-010-0134-z)

3. Kosuke Oya, "Bias Corrected Realized Variance under Dependent Microstructure Noise", Mathematics and Computers in Simulation, (in press), (DOI:10.1016/j.matcom.2010.04.017.)

4. Yasutaka Shimizu, “Local asymptotic mixed normality for discretely observed non-recurrent Ornstein-Uhlenbeck processes”, Annals of the Institute of Statistical Mathematics. (in press). (DOI: 10.1007/s10463-010-0307-4)

5. Yasutaka Shimizu, “Nonparametric estimation of the Gerber-Shiu function for the Wiener-Poisson risk model”, Scandinavian Actuarial Journal. (in press). (DOI: 10.1080/03461238.2010.523515)

6. Yasutaka Shimizu, “Estimation of parameters for discretely observed diffusion processes with a variety of rates for information”, Annals of the Institute of Statistical Mathematics. (in press). (DOI: 10.1007/s10463-010-0323-4)

7. 清水泰隆, “危険理論における Gerber-Shiu 関数と統計的推測”, “統計数理”, vol.59, no1, 2011. (in press).

8. Masaaki Fukasawa, “Discretization error of stochastic integrals”, Annals of Applied Probability (in press)

9. Masaaki Fukasawa, “Asymptotically efficient discrete hedging”, Stochastic Analysis with Financial Applications (in press)

10. Masaaki Fukasawa, “The normalizing transformation of the implied volatility smile”, Mathematical Finance (in press)

11. Masaaki Fukasawa, Isao Ishida, Nabil Maghrebi, Kosuke Oya, Masato Ubukata and Kazutoshi Yamazaki, “Model-free implied volatility: from surface to index”, International Journal of Theoretical and Applied Finance (in press)

12. Emmanuel Gobet and Azmi Makhoul, “The tracking error rate of the

Delta-Gamma hedging” strategy. *Mathematical Finance* (in press)
(DOI: 10.1111/j.1467-9965.2010.00466.x)

13. Masayuki Uchida and Nakahiro Yoshida, “Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations”, *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics*. (in press)
(DOI: 10.1051/ps/2010001)