

日比 孝之

大阪大学大学院情報科学研究科・教授

現代の産業社会とグレブナー基底の調和

§1. 研究実施の概要

グレブナー基底のテクニックを、理論／応用／計算の側面から多角的に進化させ、現代の産業社会における難問の解決に向けての純粋数学の貢献を探ることが本 CREST の基本構想である。平成22年度は、チームの公式行事の一つであるCREST 国際会議「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」(平成22年6月28日～7月2日、ホテル阪急エキスポパーク、大阪府吹田市)を開催した。(すべての講演のビデオ映像を、チームのホームページで公開している。)他方、CREST グレブナースクール(平成21年9月、神戸大学)の講義ノートと演習問題に大幅な加筆を施す作業を進め、目下、単行本『グレブナー道場』(共立出版)の出版(平成23年9月)に向けての執筆活動を展開している。単行本『グレブナー道場』は、非専門家がグレブナー基底を使用する際の貴重な参考文献となる。

本 CREST チームは、理論系、応用系、計算系のグループから構成される。理論系と応用系、理論系と計算系の交流は、CREST 研究開始以前からあったものの、応用系と計算系の交流は、CREST 研究開始以前は皆無であった。その応用系と計算系の交流を芽生えさせ、深化させることから、グレブナー基底の第4のブレークスルーを誕生させる、というのが、研究代表者の思惑である。平成22年度は、その思惑が徐々に功を奏し、応用系と計算系の共同研究の成果として、D加群の積分アルゴリズムが、直接、統計学に応用できることが判明し、指数型分布族の基準化定数の計算や最尤推定量の計算のための全く新しい汎用的な方法に至る見通しが得られた。これは CREST 研究開始時点では全く予想していなかった新展開であり、今後、グレブナー基底の第4のブレークスルーとなる可能性を秘めている。

その他、理論系グループは、グレブナー基底の「辞書」を作成するための代数的基礎理論の研究を展開しつつ、非正規な多元分割表の無 n 因子交互作用モデルは **very ample** ではないことを証明した。応用系グループは、マルコフ基底を用いた正確検定を武器に、大学入試センター試験の科目選択問題の統計学的検証についての詳細なデータ分析を実施した。計算系グループは、微分作用素環のグレブナー基底の応用であるパラメータ付き積分の満たす微分方程式を計算するアルゴリズムの高速化に成功し、そのパッケージを公開した。

§2. 研究実施体制

(1) 理論系第1グループ

- ① 研究分担グループ長: 日比孝之 (大阪大学大学院情報科学研究科、教授)
- ② 研究項目
 - ・先端科学技術に現れるグレブナー基底の代数的理論の探究

(2) 理論系第2グループ

- ① 研究分担グループ長: 大杉英史 (立教大学理学部、准教授)
- ② 研究項目
 - ・先端科学技術に現れるグレブナー基底の代数的理論の探究

(3) 応用系第1グループ

- ① 研究分担グループ長: 竹村彰通 (東京大学大学院情報理工学系研究科、教授)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

(4) 応用系第2グループ

- ① 研究分担グループ長: 青木 敏 (鹿児島大学理学部、准教授)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

(5) 応用系第3グループ

- ① 研究分担グループ長: 栗木 哲 (統計数理研究所数理・推論研究系、教授)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

(6) 応用系第4グループ

- ① 研究分担グループ長: 大津起夫 (大学入試センター研究開発部、教授)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

(7) 応用系第5グループ

- ① 研究分担グループ長: 只木孝太郎 (中央大学研究開発機構、機構准教授)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

(8) 計算系第1グループ

- ① 研究分担グループ長: 高山信毅 (神戸大学大学院理学研究科、教授)
野呂正行 (神戸大学大学院理学研究科、教授)
野海正俊 (神戸大学大学院自然科学系先端融合研究環、教授)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発

(9) 計算系第2グループ

- ① 研究分担グループ長: 武田朗子 (慶應大学理工学部、講師)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発

(10) 計算系第3グループ

- ① 研究分担グループ長: 濱田龍義 (福岡大学理学部、助教)
- ② 研究項目
 - ・グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発

§3. 研究実施内容

(文中に番号がある場合は(4-1)に対応する)

平成22年度の公式行事として、CREST 国際会議「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」(平成22年6月28日～7月2日、ホテル阪急エキスポパーク、大阪府吹田市)を開催した。国際色豊かな盛会であり、参加者総数は75名(内、海外11国から34名)であった。すべての講演はビデオ撮影しており、チームのホームページで公開している。国際会議の報告集は、平成23年12月、World Scientific 出版社から出版し、本 CREST 研究の研究成果の産業社会への公表と、研究成果の将来への継承を円滑に推進する。

平成22年度の研究は、全体研究計画に則った研究スケジュールに沿って、戦略a、b、d、e、gを展開した。以下、それぞれの戦略について、研究成果を列挙する。

(戦略a) 一部要因実験において観測値がポアソン分布あるいは二項分布に従う場合の要因効果の検定のためのマルコフ基底[7]、及び、分割表の頻度が0か1に制限された場合の連結性を保証するためのマルコフ基底[2]を発見した。分割表の分解可能モデルに対しては極小マルコフ基底の特徴づけを得た([5])。

非正規な配置を持つ統計モデルでは、sequential importance sampling と呼ばれる検定手法の障害となるが、その際、hole が有限個(いわゆる very ample)であるか否かが重要である。その very ample 性についての効果的な判定条件を探し、非正規な多元分割表の無n因子交互作用モデルは very ample ではないことを証明した([14])。

非正則一部実施計画においてロバスト性を持つ計画の構成法を示した([4])。計算代数統計に関するその他の研究成果として、大規模グラフィカルモデルの効率的な推定法[3]、ウィシャート分布のモーメントのグラフ理論的特徴付け[16]、展開モデルのランキングの集合の数え上げ[21]、コクセター群の余不変式環の性質の解明[24]、超平面配置の共通部分束の探究[31]などの成果を得た。

(戦略b) 大学入試センター試験の科目選択問題の統計学的検証については、詳細なデータ分析を実施し、背景要因を調整したとしても、大都市圏とその他で科目選択パターンが異なること、また男女で理科の選択傾向が異なること、などを確認した([1])。その際、マルコフ基底を用いた正確検定が非常に有益であったことは特筆に値する。

(戦略d) 微分作用素環のグレブナー基底計算とその応用を研究するのに不可欠である、有理数体の上でのシチジー計算の著しい高速化(関連研究として[10, 11])に成功するとともに、微分作用素環のグレブナー基底の応用であるパラメータ付き積分の満たす微分方程式を計算するアルゴリズムの高速化およびそのパッケージ(nk_restriction)を公開した。これは同等の機能のパッケージのなかでは最高の性能を持つものである([12])。

グレブナー基底の応用に特化した CREST 版 KnoppixMath と CREST 版 Small VM のリリースへ向けて、KnoppixMath 2010 と Small VM's 2010 を開発した。なお、開発には超曲面の

分類研究[9]も動機付けとなっている。今後の検討すべき事項として、ビデオヘルプ、データ変換機能などがある。

(戦略e) 微分作用素環のグレブナー基底の統計学への応用として、ホロミック勾配法アルゴリズムを提案し、実装した。このアルゴリズムはホロミック関数の最小値を近似的に計算するための、代数と数値の融合アルゴリズムである。これにより、非常に広範なクラスの分布に対して、パラメータの最尤推定(学習)が原理的に可能となった。更に、原理的のみならず、微分作用素環のグレブナー基底の高速計算の実装の下、球面上の Fisher-Bingham 分布など空間統計学で問題となるようなパラメータ次元の高い分布でもこの方法が適用可能であることを示すことに成功した。これは計算系、応用系の共同研究の成果であるが、CREST プロジェクト開始時点では全く予想していなかった新展開であり、D加群の積分アルゴリズムが、直接、統計学に応用できることが判明し、指数型分布族の基準化定数の計算や最尤推定量の計算のための全く新しい汎用的な方法に至る見通しが得られた。既に、論文[22]が掲載予定となり、今後、グレブナー基底の第4のブレイクスルーとなる可能性を秘めている。

その他、統計学を含む多くの分野で積分領域がサイクルとは限らない巾関数や指数関数の多重積分が出現する。このような積分の研究の一般的な枠組みを与えるべく不完全A-超幾何方程式の理論を提案した。また上記ホロミック勾配法をロバストな方法に展開していくために[8]の研究との関連の検討も行った。

(戦略g) 応用系グループとの共同研究([6]等)により、nested 配置(Segre-Veronese 配置の一般化)を提唱し、そのグレブナー基底の基礎理論を樹立したが、最近、トーリックイデアルの次数に依存しない一般的論を得るとともに、nested 配置の正規性と元の配置の正規性の関係を解明することに成功した([15])。Segre-Veronese 配置は、大学入試センター試験の科目選択の分析等に対応しているが、一般次数の nested 配置について理論が展開できることから、複雑な group-wise selection problem についても、グレブナー基底を使った統計的分析を実行するための「辞書」作成のツールを得たことになる。

単項式写像の contraction ideal のグレブナー基底について考察し、次数などについての結果を得た([23])。これは nested 配置に関する結果を更に一般化したものであり、懸案であった、グループ間に共通部分がある group-wise selection problem に対しても、適用可能な理論が構築できたことになる。なお、この結果は、Sullivant が提唱した toric fiber product の一般化でもあり、理論的な影響力も強い。

計算可換代数と凸多面体の代数的組合せ論に関連し、単行本[J. Herzog and T. Hibi, "Monomial Ideals," GTM 260, Springer, 2010. (ISBN:978-0-85729-105-9)]を出版するとともに、整凸多面体の Ehrhart 多項式の δ 列の研究[19]、squarefree な単項が生成するイデアルとトーリック環の研究[17、29、30]、componentwise linear ideal の研究[20]、有限グラフに付随する smooth Fano 多面体の研究[18]、Gorenstein Fano 多面体の Ehrhart 多項式の根の実部の探究[27、28]、有限グラフの切断多面体の理論的研究[13]などを展開した。

その他、平成24、25年度に実施する(戦略c)に関連する研究[25、26]も遂行された。

最後に、本 CREST 研究の重点目標の一つである、若手研究者の育成に関して記載する。理論系グループは、平成 21 年 4 月 1 日から、大阪大学特任助教として、鍋島克輔と木村杏子を雇したが、鍋島克輔は平成 22 年 4 月 1 日付けで徳島大学総合科学部准教授として、木村杏子は平成 22 年 10 月 1 日付けで静岡大学理学部助教とし、それぞれ、着任した。鍋島克輔も木村杏子も、教員公募での採用である。応用系グループの沼田泰英らは、インドで開催(平成 22 年 8 月)された ICM 2010 に参加し、ブースを設け、CREST の研究の宣伝活動をするとともに、CREST 版 KnoppixMath を配布した。計算系グループの中山洋将と西山絢太は、グレブナー神戸スクールにおいて Risa/Asir、Macaulay、Singular、R、polymake、4ti2 などのソフトウェアの例題／問題集を作成したが、この例題／問題集を整理したものを、CREST 単行本『グレブナー道場』(共立出版、平成 23 年 9 月出版予定)に収録する作業を進めている。

§4. 成果発表等

(4-1) 原著論文発表

●論文詳細情報

1. 青木敏, 大津起夫, 竹村彰通, 沼田泰英, 「大学入試センター試験科目データの統計解析」
応用統計学 39(2010), 71--100.
2. H. Hara and A. Takemura, Connecting tables with zero-one entries by a subset of a Markov basis, Algebraic Methods in Statistics and Probability II (M. A. G. Viana and H. P. Wynn, Eds.), Contemporary Mathematics, vol. 516, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 199--213.
3. H. Hara and A. Takemura, A localization approach to improve iterative proportional scaling in Gaussian graphical models, Communications in Statistics Theory and Methods 39 (2010), 1643--1654. (doi:10.1080/03610920802238662)
4. S. Aoki, Some optimal criteria of model-robustness for two-level non-regular fractional factorial designs, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 62 (2010) 699--716. (doi: 10.1007/s10463-010-0292-7)
5. H. Hara, S. Aoki and A. Takemura, Minimal and minimal invariant Markov bases of decomposable models for contingency tables, Bernoulli 16 (2010), 208--233. (doi:10.3150.09-BEJ207)

6. S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Markov basis and Grobner basis of Segre-Veronese configuration for testing independence in group-wise selections, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62 (2010) 299--321. (doi:10.1007/s10463-008-0171-7)
7. S. Aoki, and A. Takemura, Markov chain Monte Carlo tests for designed experiments, *Journal of Statistical Planning and Inference* 140 (2010), 817--830. (doi:10.1016/j.jspi.2009.09.010)
8. A. Takeda, S. Taguchi and T. Tanaka, A Relaxation Algorithm with a Probabilistic Guarantee for Robust Deviation Optimization, *Computational Optimization and Applications* 47 (2010), 1--31. (doi: 10.1007/s10589-008-9212-7).
9. J. Cho, T. Hamada, and J. Inoguchi, On three dimensional real hypersurface in complex space form, *Tokyo Journal of Mathematics* 33, (2010), 31--47. (doi:10.3836/tjm/1279719576)
10. K. Nishiyama and M. Noro, Stratification associated with local b-functions, *J. of Symb. Comput.* 45 (2010), 462--480. (doi:10.1016/j.jsc.2010.01.003)
11. M. Noro, New algorithms for computing primary decomposition of polynomial ideals, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 6327, Springer, 2010, pp. 233--244.
12. H. Nakayama and K. Nishiyama, An algorithm of computing inhomogeneous differential equations for definite integrals, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 6327, Springer, 2010, pp. 221--232. (doi: 10.1007/978-3-642-15582-6_39)
13. H. Ohsugi, Normality of cut polytopes of graphs is a minor closed property, *Discrete Mathematics* 310 (2010), 1160--1166. (doi:10.1016/j.disc.2009.11.012)
14. H. Ohsugi and T. Hibi, Non-very ample configurations arising from contingency tables, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 62 (2010), 639--644. (doi:10.1007/s10463-010-0288-3)
15. H. Ohsugi and T. Hibi, Toric rings and ideals of nested configurations, *J. of Comm. Alg.* 2 (2010), 187--208. (doi:10.1216/JCA-2010-2-2-187)[Segre-Veronese]

16. S. Kuriki and Y. Numata, Graph presentations for moments of noncentral Wishart distributions and their applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62 (2010), 645--672. (doi:10.1007/s10463-010-0279-4)
17. K. Kimura, Arithmetical rank of Cohen-Macaulay squarefree monomial ideals of height two, *J. Comm. Alg.* 3 (2011), 31--46. (doi:10.1216/JCA-2011-3-1-31)
18. T. Hibi and A. Higashitani, Smooth Fano polytopes arising from finite partially ordered sets, *Discrete & Comput. Geom.*, in press. (doi:10.1007/s00454-010-9271-2)
19. T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volumes, *European J. Combinatorics*, in press.
20. J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, Powers of componentwise linear ideals, *Combinatorial Aspects of Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, in press.
21. H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, *Adv. in Appl. Math.*, to appear. (doi:10.1016/j.aam.2010.11.002)
22. T. Sei, N. Takayama, A. Takemura, H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro and K. Ohara, Holonomic Gradient Descent and its Application to Fisher-Bingham Integral, *Adv. Appl. Math.*, to appear. (doi:10.1016/j.aam.2011.03.001)
23. T. Shibuta, Toric ideals for high Veronese subrings of toric algebras, *Illinois Journal of Mathematics*, to appear.
24. T. Maeno, Y. Numata and A. Wachi, Strong Lefschetz elements of the coinvariant rings of finite Coxeter groups, *Algebras and Representation Theory*, to appear. (doi:10.1007/s10468-010-9207-9)
25. 只木孝太郎, 辻井重男, 「ランク攻撃の厳密解析 I」日本応用数理学会 論文誌, 第 21 巻 第 1 号(2011 年 3 月 25 日)
26. K. Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information

theory III: Composite systems and fixed points, *Mathematical Structures in Computer Science*, to appear.

- 27. T. Hibi, A. Higashitani and H. Ohsugi, Roots of Ehrhart polynomials of Gorenstein Fano polytopes, *Proceedings of the American Mathematical Society*, in press.
- 28. T. Matsui, A. Higashitani, Y. Nagazawa, H. Ohsugi and T. Hibi, Roots of Ehrhart polynomials arising from graphs, *Journal of Algebraic Combinatorics*, to appear.
- 29. K. Kimura, N. Terai and K. Yoshida, Schmitt-Vogel type lemma for reductions, *Archiv der Mathematik*, to appear.
- 30. T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe, Depth of edge rings arising from finite graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- 31. H. Koizumi, Y. Numata, A. Takemura, On intersection lattices of hyperplane arrangements generated by generic points, *Annals of Combinatorics*, to appear.