

「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」  
平成21年度採択研究代表者

大石 進一

早稲田大学理工学術院基幹理工学部・教授

非線形系の精度保証付き数値計算法の基盤と  
エラーフリーな計算工学アルゴリズムの探求

## § 1. 研究実施の概要

本研究では大きく次の2つを目標に研究を行っている。

- I. 100万次元の連立非線形方程式を精度保証付き数値計算によって解く方式を設計する。
- II. 計算工学における広範な応用に鑑みて計算幾何学アルゴリズムの高速かつ完全精度保証化を中心的に取り上げ、重要な凸包の計算アルゴリズムなどについて、近似計算に対して完全精度保証化(必ず成功するアルゴリズム)を平均的な計算量を2倍以内で達成する。

これらを達成するために、平成 21 年度は、本 CREST 研究の初年度につき、今後の精度保証付き数値計算の基礎となる下記の2つを主な研究目標とした。

- (A) 区間演算の汎用性が高く、かつ高速な計算法に関する研究
- (B) 悪条件問題に関する高信頼な計算法に関する研究

この研究目標において、平成21年度の目標分は十分に達成された。したがって、当初の予定通り研究は進捗している。

具体的に実施した研究とその成果は、以下の通りである。

- (A1) 行列積に関する高速な区間演算方式を確立するための検討
- (B1) 悪条件問題に対する高精度なアルゴリズムを開発
- (B2) 計算幾何学のアルゴリズムの基本となる点と直線の位置関係における高速なフィルターについて検討

また、非線形系に対する精度保証法の基盤として、下記の研究も実施した。

- (C1) 非線形偏微分方程式に関する新しい精度保証法の検討
- (C2) 数値積分に関する精度保証法を開発

以上の平成21年度の成果を基に、今後も全体計画に沿って研究が推進できる見込みである。

## § 2. 研究実施体制

### (1)「早稲田大学」グループ

①研究分担グループ長:大石 進一(早稲田大学、教授)

②研究項目

非線形系の精度保証付き数値計算法の基盤とエラーフリーな計算工学アルゴリズムの探求

### (2)「東京女子大学」グループ

①研究分担グループ長:荻田 武史(東京女子大学、専任講師)

②研究項目

悪条件問題に関する高速かつ高精度な数値計算法の確立

## § 3. 研究実施内容

本研究全体では、100万次元の連立非線形方程式を精度保証付き数値計算によって解く方法の開発と、計算工学における精度保証アルゴリズムの基盤として計算幾何学アルゴリズムの高速かつ完全精度保証化を目標としている(図1)。

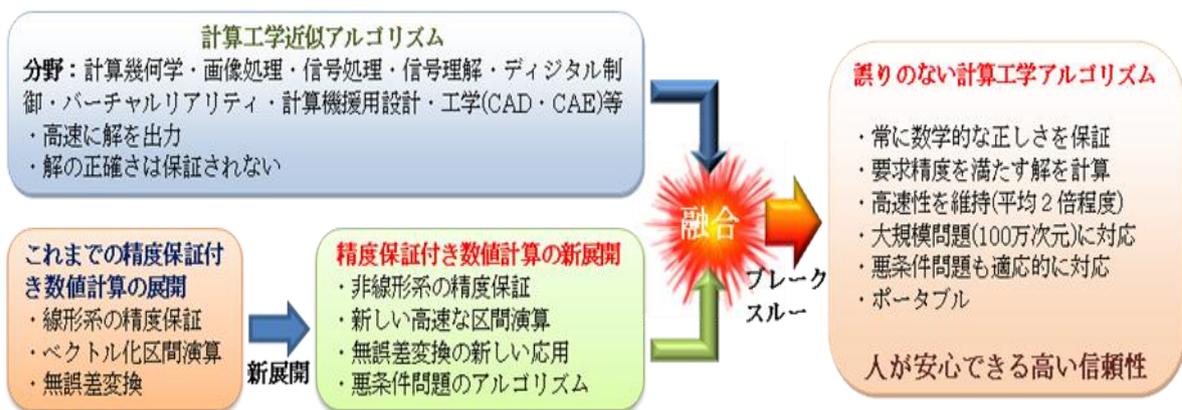


図1. 本研究の目標と戦略

本年度は、この基盤となる研究を実施し、以下の成果を得た。

(A1) 行列積に関する高速な区間演算方式を確立するための基礎検討を行った。現在よく利用されている方式は行列積を4回必要とするが、問題によってはそれよりも少ない回数で、得られる区間幅が先行研究とほぼ同等である手法を開発した。このアイデアは丸めモ

ードを用いない区間演算に対しても応用できる。

- (B1) 悪条件な行列に対する高精度な行列分解アルゴリズムとして、高精度なコレスキー分解、特異値分解などを研究した。新しいアルゴリズムの特徴としては、通常の BLAS がサポートする関数と、行列積に対する多倍長精度計算関数のみがあれば実装できる高速な方式であり、通常の多倍長精度のライブラリを用いた計算よりも数倍から数十倍高速であることを示した。また既存の高速な行列積関数を用いて、行列積を高精度に計算する手法を開発した。これは悪条件問題に対するアルゴリズムに応用可能である。
- (B2) 誤りのない計算幾何学アルゴリズム構築のために、計算幾何学の初等判定問題である点と直線の位置関係の判定問題に対する高速なフィルターについて研究をした。オーバーフロー、アンダーフローなどの例外発生も考慮しつつ、計算速度が先行研究による結果と変わらないフィルターを開発できた。また提案したフィルターを凸包に対して適用した場合のパフォーマンスを示し、良条件の際には近似計算の1.2倍程度の手間で、正しい凸包の出力を保証できた。
- (C1) 偏微分方程式の解の計算機援用証明について、先行研究より適用範囲が広い一般的な理論研究を行った。常微分方程式の2点境界値問題の解の(局所)一意存在を計算機援用証明する方法を開発し、Newton-Kantorovich の定理を基にした理論を非線形2点境界値問題に適用した。この理論を偏微分方程式に拡張し、実際の境界値問題に対しての適用を行った。そして楕円型非線形偏微分方程式の境界値問題に対して解の(局所)一意性の計算機援用証明方法を確立した。
- (C2) 数値積分を精度保証付きでかつ高速に計算するために、様々な数値自動積分についての研究を行なった。ある程度自由な積分領域の端に可積分な特異点を持つ累次積分に対し、累次積分を一次元の問題とみなし二重指数関数型積分公式を適用した際の誤差上限を明らかにし、また同手法による近似計算と速度面で変わらない精度保証付き自動積分アルゴリズムを提案した。また、複素平面上の周回積分に対して、台形則で近似した際の誤差上限を明らかにし精度保証付きで高速に計算できることも示した。さらに提案した精度保証付き自動積分アルゴリズムを基に、境界要素法を利用した常微分方程式の解の計算アルゴリズムを提案した。

結論として、平成 21 年度の目標は当初の予定通り達成できている。さらに、非線形系の精度保証法についての研究も進展した。今後は論文発表も積極的に行い、さらに本研究全体の目的を達成するために革新的なアイデアを生みながら研究を推進していきたい。