

「数学と諸分野の協働によるブレイクスルーの探索」  
平成21年度採択研究代表者

柴田 良弘

早稲田大学理工学術院基幹理工学部・教授

## 現代数学解析による流体力学の未解決問題への挑戦

### § 1. 研究実施の概要

本研究では、流体数学の分野で卓越した実績をもつ数学者のグループと第一線の流体力学者のグループとの協働で、流体力学の未解決問題に対して厳密な定式化と解の挙動の解析手法を開発し、それを社会的に重要な課題に適用し精密な実験により検証することによってその有効性を実証することを目標としている。

本年度は、5年間の研究の準備として、流体力学における非平行流れの安定性理論の研究動向を調査し、数学者と流体力学者で議論を行いながら、その現状の数学的な内容をまとめた。これにより今後の研究の基礎を固めるとともに、数学者と流体力学者の間で安定性理論に対する知識および認識の共有を進めることができた。今後は、さらに議論を深めることによって両者の関係を密にし、次年度より具体的に非平行流れの安定性に関する数学解析に着手する予定である。また同様に、混相流のモデル化・定式化についても研究動向を調査し、その数学的内容を抽出して詳細を検討した。これにより数学者と流体力学者の間で混相流に対する知識および認識の共有を進めることができ、さらに次年度以降の研究の方向を定めることができた。今後は、関連研究の動向調査をさらに進めるとともに、次年度からミクロスコピックとマクロスコピックの解析に着手する予定である。

### § 2. 研究実施体制

#### (1)「理論研究」グループ

①研究分担グループ長:柴田 良弘(早稲田大学、教授)

②研究項目

流体力学の未解決問題に対する数学理論の構築:

- ・変数係数偏微分方程式の解の漸近挙動を解析する方法を開発し、非平行流れの安定性を支配する一般的な数学理論を構築する。
- ・自由表面を有する気液二相流の素過程に対する数学的に正しい定式化を開発する。
- ・実験研究グループと協働で空力騒音の発生メカニズムの解明、境界層乱流遷移制御技術の開発および高速水噴流と管内気泡流の諸現象の解明を行う。

## (2)「混相流実験研究」グループ

①研究分担グループ長:山本 勝弘(早稲田大学、教授)

②研究項目

混相流の未解決問題における現象の解明

- ・理論研究グループと協働で自由界面を有する気液二相流の数学的定式化を実験および数値シミュレーションにより検証する。
- ・高速水噴流と管内気泡流の諸現象の解明を行い、その理論を実験および数値シミュレーションにより検証する。

## (3)「流れの安定性実験研究」グループ(研究機関別)

①研究分担グループ長:高木 正平(室蘭工業大学、教授)

②研究項目

流れの安定性の未解決問題における現象の解明

- ・理論研究グループと協働で非平行流れの安定性に対する数学理論を実験および数値シミュレーションにより検証する。
- ・空力騒音の発生メカニズムの解明、境界層乱流遷移制御技術の開発を行い、その理論を実験および数値シミュレーションにより検証する。

## § 3. 研究実施内容

(文中に番号がある場合は(4-1)に対応する)

### (1) 理論研究グループ

本年度は、5年間の研究の準備として、数学者と流体力学者で議論を行いながらお互いの知識および認識の共有を進め、今後の研究の基盤を築くことを目標とした。

まず、流体力学における安定性理論の研究動向調査と、数学者と流体力学者の議論の場を設けることを目的として、流体数学セミナー4回(第5回～第8回)と流れの安定性理論の集中講義(全8回)を主催した。流体数学セミナーは第一線の流体力学者を招いて研究の現状を紹介していただいたもので、流れの安定性理論の集中講義は流体力学における流れの安定性理論の第一人者により理論の全容を解説していただいたものである。これらの内容を検討し、その結果として得られた流れの安定性理論の数学的な概略は以下の通りである。

流体力学における流れの安定性理論は、平行流の場合には常微分方程式である Orr-Sommerfeld 方程式の固有値問題として数学的に定式化される。ただし Navier-Stokes 方程式の定常解は Poiseuille 流、Cuette 流など極端に単純な流れ以外は平行流ではない。流体力学では現実の平行に近い流れを平行流として近似することにより、その安定性解析が行われている。特に、固定境界がある場合、Reynolds 数が無限大の極限における特異摂動展開の初項として Prandtl の境界層方程式が得られるが、その相似解の特定位置における速度分布をもつ平行流を考え、その安定性解析によって境界層の“局所的な”安定性を評価している。さらに、境界層のある特殊な場合には偏微分方程式で記述される線型攪乱方程式を常微分方程式によって漸近近似することが可能であり、また非平行の3次元境界層も近似的に安定性解析が可能になっているとのことである。これらの理論を Navier-Stokes 方程式の解の安定性として数学的に記述するには未だ大きな隔りがあるが、今後さらに議論を続けることによってお互いの接点を探っていく予定である。

また、混相流のモデル化とそれに関連した数学研究動向を調査することも目的として、流体数学の国際研究集会を主催した。この活動から得られた情報も合せて、混相流の数学的解析の現状を調査・検討した。その結果の概略は以下の通りである。

確率 Navier-Stokes 方程式に関しては、代表的な参考文献として

- G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- F. Flandoli, *An introduction to 3D-stochastic fluid dynamics*, in: SPDE in hydrodynamic: recent progress and prospects, Springer, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1942, 2008.
- C. Prevot, M. Röckner, *A concise course on Stochastic Partial Differential Equations*, Springer, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1905, 2007.

などが挙げられる。現在までのところ、Navier-Stokes 方程式にホワイトノイズなどの確率過程を考慮した外力をつけた方程式に関するマルティンゲール弱解の存在が研究されている。決定論的な場合と同様、空間次元が3の場合は解の存在は示されているが、一意性は示されていない。我々の目的である、メゾ視点からの方程式の導出という観点からの研究は、現時点ではなされていない。国際研究集会では W. Stannat (TU Darmstadt) より確率 Navier-Stokes 方程式に関するレビューを受けた。そこでは Hilbert 空間上での Gaussian measure, Wiener Process, Banach 空間上での Martingales などの基本的な概念からはじまり、Hilbert 空間上での確率偏微分方程式の解説、そして確率 Navier-Stokes 方程式への応用などが解説された。しかし議論は始まったばかりであり、今後は関数解析などに確率過程を導入するような方向からの研究を進め、Banach 空間上での確率 Navier-Stokes 方程式の考察へと展開する必要があると考えられる。これはメゾ視点からの Navier-Stokes 方程式が導出された場合にその可解性を論じるのに重要となる。

マクロな混相流に関する数学的理論に関しては、V. A. Solonnikov による一連の研究 (Lectures on Evolution Free Boundary Problems: Classical Solutions, L. Ambrosio et

al: LNM 1812, 2003, Springer-Verlag)に端を発する、最大正則性原理を用いた理論研究が近年盛んである。我々のグループでは、自由境界面の曲率の効果を考えた問題の時間局所的な可解性を、線形化問題の  $L_p$ - $L_q$  最大正則性原理を用いて導出した(文献3)。そこでは、自由境界の状況は、大気中水滴が落下するような場合をモデルとする有界領域、界面の運動をモデルとする摂動半空間などを含む幾つかの異なる状況が統一的に扱われている。また国際研究集会では J. Prüss (Halle Univ.)より Navier-Stokes 方程式の相転移を含む場合の2相問題の定式化と、定常解の安定性に将来使える可能性の高い発展方程式の定常解の安定性に関する一般論についてのレビューを受けた。まず sectorial operator と  $R$ -sectorial operator の定義と基本性質の解説から始まり、J. Prüss 自身により開発された作用素値の  $H^\infty$ -calculus による抽象的理論の紹介と表面張力を伴う2相問題の定常解の安定性への応用が解説された。これらは混相流のベンチマーク的なモデルの解析の基本となる数学的な方法を与えるものである。

## (2) 混相流実験研究グループ

混相流の研究で用いられる基礎方程式とその数値解法をレビューし、空気中と水中それぞれにおける高速水噴流に関して予備研究を行った。また分子動力学を用いた表面現象に関する研究例をレビューし、混相流問題における分子動力学の有効性を検討した。

## (3) 流れの安定性実験研究グループ

風洞実験設備を整備し、来年度以降の実験計画について検討した。特に円柱と翼型の後流における絶対・全体不安定の特徴を明らかにすることを目指す幾つかの実験を考案した。これらの実験結果から流れの安定性に対する数学理論の構築に有益な情報を得ることができると期待される。

## § 4. 成果発表等

### (4-1) 原著論文発表

#### ●論文詳細情報

1. Takagi, S. and Konishi, Y., “Suppression of Trailing-Edge Noise Emitted by Two-Dimensional Airfoils”, *Transactions of Japan Society of Aeronautical and Space Sciences*, Vol.53, No.179 (2010), in press.
2. 吉村浩明、“力学の幾何学的理論と方法 —マルチボディダイナミクスが提起した問題—”、*シミュレーション学会誌*、第29巻第2号 (2010)、pp.1-12, in press.
3. Shibata, Y. and Shimizu, S., “Report on a local in time solvability of free surface problems for the Navier-Stokes equations with surface tension”, *Applicable Analysis*, to appear.