

「数学と諸分野の協働によるブレイクスルーの探索」
平成21年度採択研究代表者

コハツ-ヒガ アルトゥーロ

大阪大学大学院基礎工学研究科・准教授

複雑な金融商品の数学的構造と無限次元解析

§ 1. 研究実施の概要

本研究プロジェクトは、仕組商品と呼ばれる商品について数学的観点から解析を行うことが目的である。特に高次元シミュレーション方法とデータ解析について研究する。

キックオフ会議が10月初めに行われ、その結果、信用リスクを内包する金融商品について深く研究を行うこととなり、特に CDO という商品に関して、シミュレーションや文献の評価をすることとなった。

ジャンプ型確率微分方程式の近似方法について、新しいシミュレーション方法が研究されている。その結果から新しい方法を提案し、今後シミュレーションを行う予定である。また、経路に依存する商品や停止時間の近似方法に関する研究を開始した。

また、パラメータ推定を行うためにいくつかの方向で研究を進め、特にモデル選択問題、具体的なモデルでの推定、非エルゴード確率微分方程式のパラメータ推定、microstructure ノイズの認識道具、ジャンプの検定について研究を行った。次年度で、株価データで応用する予定である。その結果を元に高次元ジャンプ型確率微分方程式のシミュレーションやそのデータ解析を行い、信用リスク商品への応用を考えている。

§ 2. 研究実施体制

(1)コハツグループ(大阪大学)

①研究分担グループ長:コハツ-ヒガ アルトゥーロ(大阪大学、准教授)

②研究項目

- ・ 連続確率微分方程式を基本にした強度モデルに関してシミュレーションを行い、その結果ジャンプ型モデルについてシミュレーションや統計的な推定を行う。

- ・ ジャンプ型確率微分方程式のシミュレーションを行う。
- ・ データ解析を行う前の理論的準備に関して、データにジャンプの存在判別ができる仮説検定を作り、モデル選択問題、microstructure noise などについて研究を行う。

§ 3. 研究実施内容

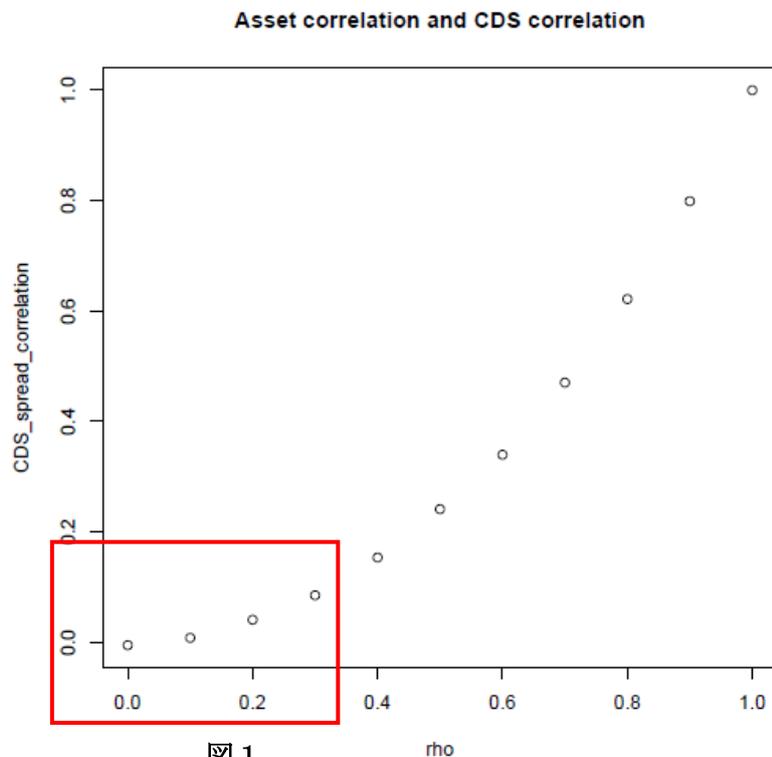
(文中に番号がある場合は(4-1)に対応する)

複雑に設計された金融デリバティブは仕組商品と呼ばれ、近年盛んに取引されているものの、その未熟な取扱いが最近の金融危機の一因となったと指摘されている。そこで、仕組商品の価格付け・リスク管理の構造解析のために、数学的観点から高次元または無限次元の問題として捉え、その解析、シミュレーション方法とデータ解析を考えている。そのために2つのサブグループに分けて研究を行っている。

今年度は、仕組商品の中からCDOと呼ばれる商品について研究を行うことを決定した。CDOに関して、シミュレーションや文献の評価をした上で高次元ジャンプ型モデルを利用する必要があることが判明した。また、データ解析を行うために統計的な技術を提案した。

シミュレーションサブグループ:

キックオフ会議が10月初めに行われ、信用リスクの商品について深く研究を行うことになった。特にCDOという商品に関して、シミュレーションや文献の評価をすることになり、そのためのM2の学生を2人:田中章博、中野良則をRAとして採用した。田中がCDSやCDOの定義とその数学的な問題を説明し、論文でまとめて作成した(この文書は、HPで公表予定)。特に相関に関して重点的に説明、基本的なモデルであるCopulaモデルの弱みについて説



明している。中野が構造モデルや強度モデルに関するシミュレーションを行い、その結果から問題点や研究課題が見える形にまとめた(この結果についても HP で公表予定)。ここで、その中の一つの例を紹介する。本研究は、野村証券金融工学研究センターの研究者との共同研究である。通常は連続過程を使って、強度モデルを構成する。そのシミュレーションの結果に基づいてみると、相関と呼ばれるパラメータが小さい値をとる時に仕組み商品の spread があまり変化しないことが判明した。この結果によりモデルとして使う際にキャリブレーションが不安定であることが分かる。

図1の縦軸は、2つの CDS の相関であり、横軸は、それらの CDS の企業資産価値を連続モデルとして考え、相関 (ρ) がモデルのパラメータである。この図で分かるように CDS の間の相関 (ρ) が大きくない場合、CDS_spread_correlation の理論値ほとんど変わらないことが分かる。市場では CDS_spread_correlation をデータとして用い、相関 (ρ) を計る作業を行うことが金融実務では重要な計算である。相関 (ρ) が小さい値をとる時、CDS_spread_correlation の値がほとんど変わらないため、逆関数の計算が難しい。この性質が企業の資産価値が連続モデルである限り、同現象が起りえるのではないかと考えられる。したがって、信用リスクモデルでは連続モデルではなく、ジャンプ型モデルを導入する必要があることが分かる。

そこで本研究では、一般のジャンプ型モデルのシミュレーションを行うために、作用素分解方法と呼ばれる方法を利用することで、新しい近似法を提案し(H. Tanaka and A. Kohatsu-Higa, Annals of Applied Probability 2009, Vol. 19, No. 3, 1026-1062, DOI:10.1214/08-AAP568)、そのシミュレーション実験を予定。これについては、まず Gamma 過程に関してシミュレーションを行うが、この時、「どのぐらいのジャンプの大きさを分解すればいいのか」という疑問が残る。現在、このことについて議論を重ね、この実験は、来年度も引き続き行う予定にしている。また、上記で記した作用素分解を使う時、時間の刻みを固定し、その空間でジャンプが起こったかどうかシミュレーションを行う予定である。

Prof.コハツと Prof.Tankov の共同研究では、この時刻の刻みをランダムにとった時(例えば、ジャンプが起こる時刻)、良い近似方法が得られるかどうか検討している。この共同研究では、新しい近似方法を構成し、収束の速度について証明し現在、金融商品に関するシミュレーションを行っている。本研究では、Levy 過程のモーメントが存在すると仮定しているが、多くの応用では安定過程が使われており、この場合、モーメントが発散することがある。このことについては、Prof.コハツと Prof.Ortiz の共同研究で検討している。

また、信用リスク商品では、倒産時間というランダムな変数が含まれており(数学的に停止時間と呼ばれる)、そのシミュレーションについても行う必要がある。これについては、モンテカルロ法では良い方法がほとんど考案されていないので、本研究では、作用素分解法を利用した新しい近似方法を検討している。現在、連続過程の最大値に関する新しい近似方法を構成し、その数学的な性質の証明を行っているところである。また、Greeks の計算方法に関しても検討している^{1), 5), 6)}。そのために無限次元解析の展開¹⁾とその応用について研究を行った^{2), 4)}。

さらに、信用リスク商品のリスクプロファイルについて研究を行っており、本研究では無限次元解析の手法を使用している。現在、信用リスクの感応度を表す指標の一つである「Vega」を計算できるようにすることを研究目標としている。

信用リスクデータについて、現在のところまだ検討中であり、統計技術がどの程度適用できるか検討する必要がある。そのために、株価の高頻度観測データを使い、モデルの選択問題やボラティリティ推定や相関推定を行うことにし、それと同時に理論について研究を行うことにした。信用リスクデータに関して、Prof.田村及び野村証券金融工学センターのメンバーと共に様々な検証を行い、データの質や性質についての情報を収集している。

統計サブグループ:

金融モデルでは確率微分方程式がよく使われていて、特に信用リスクモデルではジャンプ型確率微分方程式が現れる。一方、金融データからパラメータ推定を行うことは容易ではない。多くの理論結果ではモデルが設定されていて、データがエルゴード性を持つ以外、他のノイズが入っていないことが常の仮定である。その中でデータ解析サブグループでは信用リスク問題への応用を可能にするために、確率微分方程式のパラメータ推定問題の結果の拡張を行っている。今年度は、以下の課題について結果が得られた。

モデル選択問題、データノイズ分析、エルゴード性、ジャンプ判定と具体的なモデルの推定である。エルゴード的拡散過程のドリフトパラメータとボラティリティパラメータの最尤型推定量が漸近正規性を有することを証明した。特に、ボラティリティが misspecified な場合(モデル選択問題)に、推定量の収束率が従来のパラメトリックモデルのものと異なるという知見を得た⁵⁾。

株価データが microstructure noise の影響で解析することが困難であることを踏まえ、バイアス補正した推定量を提案し、その有限標本での推定誤差は既存研究で提案されているものより小さいことを数値実験により確認した。

また、確率積分の Riemann 和による離散化の近似誤差について、その漸近分布について研究を行った。確率積分で表現された統計量を株価等資産価格観測データによって近似した場合、その誤差がデータの時間間隔の確率構造に依存し、その漸近分布が収益率の条件付尖度・歪度によって決定されることを示した。またヘッジ戦略を効率的に離散化する分割アルゴリズムを提案した。

データがエルゴード性を持たない時、マルコフ型確率微分方程式を考え、その離散観測推定について考察した。ドリフトとボラティリティパラメータが同時推定可能で、かつ、データから陽に表現可能な推定関数を提案し、そのM-推定量が自然な収束率を持つための十分条件を与えた。信用リスクモデルではジャンプ確率微分方程式を使う際、データにはジャンプが存在するかどうか統計的な判定を作ることが重要である。

そのために判別するための漸近フィルターを用いるが、ジャンプ判別のために Threshold Estimation(閾値推定法)を使い判定を提案した。閾値が漸近理論では一意に決定できないため、実データへの応用を困難にしていたが、実データに基づくフィルターの構成方法を提案し、閾値

推定法の実用化を可能にした⁶⁾。OU過程が具体的なモデルでありながら、様々な金融モデルで使われているので、このモデルに対して離散観測尤度の局所漸近混合正規性(LAMN)を証明し、離散観測に基づくドリフト・ボラティリティパラメータの同時推定とその漸近分布、及び漸近有効性について研究を行った。

§ 4. 成果発表等

(4-1) 原著論文発表

● 論文詳細情報

1. R. Kawai and A. Kohatsu-Higa
Computation of Greek and multidimensional density estimation for asset price models with time-changed Brownian Motion
Applied Mathematical Finance, (2009)
DOI: 10.1080/13504860903336429
2. A. Kohatsu-Higa and S. Ortiz.
Weak Kyle-Back equilibrium models for Max and ArgMax
SIAM Journal on Financial Mathematics, Volume 1, pp. 179-211 (2010)
DOI: 10.1137/080739768
3. A. Kohatsu-Higa, K. Yasuda,
Simulation on multidimensional density functions through the Malliavin-Thalmaier formula and its application to finance
Proceedings of the 40th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, to appear.
DOI:-
4. J.M. Corcuera and A. Kohatsu-Higa
Statistical Inference and Malliavin Calculus
To appear in Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V
5. Uchida, M. and Yoshida N.
Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations, to appear in European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics.
6. Shimizu, Y.
Threshold estimation for semimartingales with jumps and its practical approaches, to appear in Statist. Methods and Appl.