

「シミュレーション技術の革新と実用化基盤の構築」
平成 16 年度採択研究代表者

大石 進一

早稲田大学理工学術院基幹理工学部応用数理学科・教授

数値線形シミュレーションの精度保証に関する研究

1. 研究実施の概要

本研究では大きく次の2つを目標に研究を行っている：

- (1) 数値線形シミュレーションツールを精度保証付きシミュレータへと性能向上させる理論とアルゴリズムを確立して、主要なシミュレータに実装して有効性を示す。
- (2) 悪条件線形問題の解法アルゴリズムとポータブルかつ高速・高精度な精度保証アルゴリズムを開発し、既存有力シミュレータに実装して有効性を確認する。

以上の研究が達成されることにより、従来取り扱えなかった悪条件な数値線形代数の問題もシミュレータで必要最小限に近い手間で解け(解の存在、一意性の検証を含む)、得られた数値解の精度もほぼ過大評価なしに評価できるようになる。

これらを達成するためには以下の研究が不可欠である。

- (a) 実問題に対して精度保証付きシミュレータを適用するために大規模な線形問題を高速に精度保証付きで解く方法の開発
- (b) 悪条件な問題も取り扱えるようにするために高速・高精度な内積演算アルゴリズムの開発
- (c) 上記で開発した手法にスケーラビリティ・ポータビリティを持たせるための枠組みの提案

本年度は、昨年度に引き続きこれらの課題に関する研究及びその応用についての研究を行い、それぞれについて次の成果を得た：

- (a) 悪条件線形問題に対する残差反復法の収束証明(論文[9])。連立一次方程式の近似解の誤差に対するシャープな評価法の開発(論文[5])。線形計画問題における最適点の精度保証(論文[6])。
- (b) 高速かつ結果精度の保証された内積計算アルゴリズムの開発(論文[3,4])。任意計算精度を達成する内積計算アルゴリズムの効率的な並列化に関する研究(論文[1])。
- (c) Matlab などに適した BLAS level3 を利用した高精度行列乗算法の開発(口頭講演[17,28,36])。

今後は、(a)及び(b)に関する基礎的な研究及び精度保証理論の確立と共に、(c)に関してそれらの主要シミュレータへの応用をさらに推進することにより、上記の目標は十分に達成されるものと

思われる。

2. 研究実施内容(文中にある参照番号は 4.(1)に対応する)

本研究全体では、数値線形シミュレーションツールを精度保証付きシミュレータへと性能向上させる理論とアルゴリズムを確立することを目的としている。

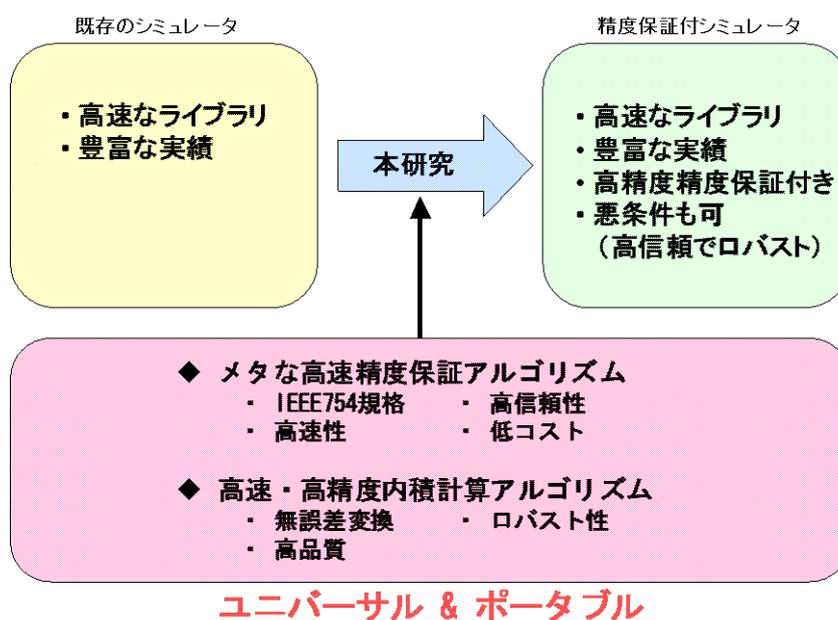


図1

そのために、(a)実問題に適用可能な精度保証付きシミュレータの開発、(b)悪条件な問題にも対応できるロバストな計算アルゴリズムの開発、(c)シミュレータにスケーラビリティ・ポータビリティを持たせるための枠組みの提案、を具体的な目標とする。

これらの目標に対して、平成 20 年度の研究成果について、代表的な成果を以下で説明する。

- (a) 悪条件線形問題に対し、残差反復による解の反復改良法に対する収束証明をおこなった(論文[9])。従来、比較的良条件な問題に対しては前進安定性、後退安定性の証明がなされていたが、悪条件な問題に対しても、高精度な内積計算を用いることによってそれらの証明が可能となることを示した。また、連立一次方程式の近似解に対する誤差評価そのものに対するシャープな評価法を提案した(論文[5])。これにより、得られた誤差評価が妥当なものであるかが評価可能となった。さらに、線形計画問題の最適点に対する精度保証法を提案した(論文[6])。従来、線形計画問題の最適値については様々な精度保証法が提案されてきたが、本研究ではカントロピッチの定理と連続型ニュートン法を用いて最適点そのものの存在範囲を保証可能となった。
- (b) 任意の結果精度を保証する総和・内積計算アルゴリズムを開発し、それらが計算量と計算時間の両面において非常に高速であることを示した(論文[3,4])。本アルゴリズムは、結果の

精度を保証するという条件のもとで、現在、世界最高速であり、IEEE における区間演算の標準化の中に組み込まれることも検討されている。さらに、任意計算精度を達成する内積計算アルゴリズムの効率的な並列化方法を考案した(論文[1])。これらは、固有値計算や特異値計算等に有効であることも知られており、様々な応用が期待できる。

- (c) 密行列の乗算に対し、BLAS level3 を利用した高速かつ高精度な計算法を開発し、さらにその改良をおこなった(口頭講演[17,28,36])。これは、特に Matlab のようなインタプリタ向きの方法であり、精度保証付きシミュレータの基本アイデアのひとつとなる可能性がある。

結論として、平成 20 年度の目標は当初の予定通り達成できている。平成 21 年度も、本研究全体の目的を達成するために革新的なアイデアを生みながら研究を推進していくとともに、本研究課題の最終年度となるため、まとめをおこなう。

3. 研究実施体制

(1)「早稲田大学」グループ

①研究分担グループ長： 大石 進一 (早稲田大学 教授)

②研究項目

大規模線形問題の精度保証付き数値計算法の開発とシミュレータへの適用

(2)「東京女子大学」グループ

①研究分担グループ長： 荻田 武史(東京女子大学 専任講師)

②研究項目

悪条件線形問題の解法アルゴリズムの開発

4. 研究成果の発表等

(1) 論文発表 (原著論文)

1. N. Yamanaka, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: A Parallel Algorithm for Accurate Dot Product, *Parallel Computing*, 34:6-8 (2008), 392-410.
2. T. Nishi, T. Ogita, S. Oishi, S. M. Rump: A Method for the Generation of a Class of Ill-Conditioned Matrices, *Proceedings of 2008 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, Budapest, Republic of Hungary, 2008, 53-56.
3. S. M. Rump, T. Ogita, S. Oishi: Accurate Floating-Point Summation Part I: Faithful Rounding, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31:1 (2008), 189-224.
4. S. M. Rump, T. Ogita, S. Oishi: Accurate Floating-Point Summation Part II: Sign, K-fold Faithful and Rounding to Nearest, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31:2 (2008), 1269-1302.
5. T. Ogita, S. Oishi: Tight Enclosures of Solutions of Linear Systems, *International Series of Numerical Mathematics*, 157 (2009), 167-178 (*Inequalities and Applications*, C. Bandle,

- A. Gilanyi, L. Losonczy, Z. Pales, M. Plum eds., Birkhauser Verlag).
6. S. Oishi, K. Tanabe: Numerical Inclusion of Optimum Point for Linear Programming, JSIAM Letters, 1 (2009), 5–8.
 7. Y. Nakaya, T. Nishi, S. Oishi and M. Claus: Numerical Verification of Five Solutions in Two-transistor Circuits, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, accepted for publication.
 8. T. Ogita, S. Oishi: Fast Verified Solutions of Linear Systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, accepted for publication.
 9. S. Oishi, T. Ogita, S. M. Rump: Iterative Refinement for Ill-conditioned Linear Systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, accepted for publication, Nov. 2008.
 10. K. Ozaki, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Adaptive and Efficient Algorithm for 2D Orientation Problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, accepted for publication.
 11. S. Miyajima, T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Fast Verification for All Eigenpairs in Symmetric Positive Definite Generalized Eigenvalue Problem, Reliable Computing, accepted for publication.

(2) 特許出願

平成 20 年度 国内特許出願件数 : 0 件 (CREST 研究期間累積件数 : 0 件)