

「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」
平成 20 年度採択研究代表者

日比 孝之

大阪大学大学院情報科学研究科・教授

現代の産業社会とグレブナー基底の調和

1. 研究実施の概要

理論系と応用系では、基本的な遺伝のモデルである Hardy-Weinberg モデルの多遺伝子への拡張などの重要な検定問題を統括する「グループ毎の選択問題」という統計モデルの定式化を提唱し、そのマルコフ基底を明示的に得ることを目標に掲げた。そのために、計算可換代数における従来からの研究対象である Segre-Veronese 配置という著名な類を含む nested 配置の基礎理論の構築を推進し、その具体的なグレブナー基底を得ることに成功した。その結果、「グループ毎の選択問題」の明示的なマルコフ基底が得られ、加えて、数値計算によってそのマルコフ基底の有効性を示した。今後は、大学入試センター試験の科目選択問題、臨床試験などの現場において、その実践的な応用を議論する。

計算系の研究では、統計／学習分野への応用を念頭に置き、パラメータ付き定積分の満たすホロミックな微分方程式系を計算するアルゴリズムの研究を展開した。具体的には、標数0で動作する効率の優れた syzygy 計算プログラム、自由加群の部分加群のグレブナー基底計算プログラムの実装研究を Risa/Asir 上で実行し、既存のシステムを越える実装を得ることに成功した。今後、応用系グループの研究成果も踏まえ、統計的正確検定および統計の実験計画法に有効なソフトの開発を強力に推進し、Risa/Asir におけるグレブナー基底の計算の高速化を一層促進するとともに、超幾何積分解析のアルゴリズムを使って学習モデルの解析に有効なソフトの開発に着手する。

2. 研究実施内容(文中にある参照番号は 4.(1)に対応する)

採択年度である平成20年度(平成20年10月～平成21年3月)は、全体計画に沿って(戦略a)(戦略e)(戦略g)の研究を開始した。(戦略a)は、計算代数統計の代数的基礎理論の構築を、(戦略e)は微分作用素のグレブナー基底の計算アルゴリズムの探究を、(戦略g)は理論と計算の両面の展開からのグレブナー基底の計算の高速化の促進を、それぞれ、攻略目標に掲げている。以下、理論系、応用系、計算系における研究実施内容を具体的に記載する。それぞれの系における研究成果をお互いに共有することを主たる目的とし、研究打ち合わせ会、情報交換会などを

定期的に開催するとともに、公開研究集會も平成21年2月に鹿児島大学に於いて組織した。

理論系グループでは、分割表の検定に重要な役割を果たすマルコフ基底の代数的な側面の研究として、トーリックイデアルのグレブナー基底についての従来からの準備的な研究を踏襲し、(戦略 g)を推進した。統計学の観点からみると、Hardy-Weinberg モデルなど、応用上、基本的かつ重要な類に付随するマルコフ基底は二次の move から成ることが多い。加えて、二次のグレブナー基底を持つトーリックイデアルは、可換代数と代数幾何の観点からもきわめて重宝である。採択年度においては、二次のグレブナー基底を持つ類に限定し、重点的な研究を進めた。具体的には、(1) Segre-Veronese 配置の一般化になっている、nested 配置のトーリックイデアル、(2) 2 way subtable sum 問題に付随するトーリックイデアル、(3) unmixed な二部グラフの極小被覆に付随するトーリックイデアル、(4) chordal graph の極小被覆に付随するトーリックイデアル、などを研究の対象とし、二次のグレブナー基底の存在定理の証明などの部分的な結果が得られた。

次に、(戦略 a)に属する研究の一つとして、分割表を分析する重要な手法の一つである sequential importance sampling に関連し、計算代数統計への応用に際し、重要となる配置のトーリック環についての正規性および very ample 性を検証した。従来、2 way subtable sum 問題に付随するトーリック環が正規となるための必要十分条件を決定することに成功していたが、採択年度においては、多元分割表に付随するトーリック環の very ample 性についての結果([H. Ohsugi and T. Hibi, Very ample configurations arising from contingency tables, arXiv:0904.3681.])に加え、上記の nested 配置の正規性および very ample 性についての具象的な結果が得られ、後者については、現在、論文を執筆するための準備をしている。

他方、グレブナー基底の理論と可換代数の接点の一つとして、componentwise linear ideal の研究を遂行し、古典的な可換代数の煩雑なテクニックを駆使し、componentwise linear ideal のすべてのベキが componentwise linear となるための理論的な必要十分条件を得ることに成功した。加えて、莫大な計算機実験を遂行することを経て、その条件を満たすイデアルの類についての幾つかの予想を提唱した。興味深い予想の一つは、chordal graph の極小被覆イデアルのすべてのベキが componentwise linear となる、というものである。その予想の完全解決は、次年度の研究に踏襲するが、部分的な結果として、星グラフと呼ばれる chordal graph の特別な類については、その予想が肯定的であることを証明した([J. Herzog, T. Hibi, and H. Ohsugi, Powers of componentwise linear ideals, arXiv:0904.4233.])。

応用系グループの研究の現在の主要なテーマとしては、(1) 正確検定のためのマルコフ連鎖モンテカルロ法の基礎となるマルコフ基底の研究、および(2) 統計的実験計画法の設計と解析のための代数的方法の開発、という二つのテーマがある。何れも、理論系グループと応用系グループの研究成果と融合し、(戦略 a)を完成に導くものである。加えて、グラフィカルモデルの代数的側面の研究とともに、超平面配置理論の統計への応用においても研究が進行中である。

マルコフ基底の研究においては、具体的にマルコフ基底が必要とされる幾つかの検定問題について、新たにマルコフ基底が明示的に求められたことが顕著な成果である。具体的には、2変量ロジスティック回帰分析において各水準の組合せにおける観測数が正であるファイバーに関する明示的なマルコフ基底を導出し、数値計算の結果も与え、正確検定の有効性を示した([H.

Hara, A. Takemura and R. Yoshida, On connectivity of fibers with positive marginals in multiple logistic regression, arXiv:0810.1793v1.]). 他方、大学入試センター試験の統計データ([5, 6])を使った科目選択問題、あるいは、遺伝のモデルとして基本的な Hardy-Weinberg モデルの多遺伝子への拡張などの重要な問題に対して、「グループ毎の選択問題」という定式化を与え、そのもとで明示的なグレブナー基底を与えることに成功し、数値計算によってグレブナー基底の有効性を示した。

実験計画法に関して、現状では、実験数を任意に設定したい場合に必要とされる非正則な実験計画の理論の整備が遅れているのが現状であるが、これについては Pistone-Wynn らのグレブナー基底を用いた解析が有効である。Aoki and Takemura[1]では Pistone や Rogantin によって提唱されている indicator function の手法に基づいて、“affinely full-dimensional factorial design”とよばれる新たな非正則な実験計画のクラスを提案している。そして実験数によっては、最適な実験計画がこのクラスに含まれることを示している。

その他、暗号関係([3, 4])や超平面配置理論の統計学への応用、分解可能モデルに基づく比例反復法の改良などにおいても有益な研究結果が得られている。

計算系グループでは、統計/学習分野への応用を念頭に(戦略e)の研究を推進した。特に、パラメータ付き定積分の満たすホロノミックな微分方程式系を計算するアルゴリズムの研究は、本年度の重点テーマの一つである。このアルゴリズムは cohomology 群の計算アルゴリズムと共通部分を持ち、二次元の logarithmic cohomology 群を計算するアルゴリズムは積分の問題にも適用可能であり、アルゴリズムの面での大きな進展である。しかし、 n 次元の logarithmic cohomology 群の計算アルゴリズムの開発はいまだ未解決である。

標数0で動作する効率のよい syzygy 計算プログラム、自由加群の部分加群のグレブナー基底計算プログラムの実装研究を Risa/Asir 上で実行し、既存のシステムを越える優れた実装を得ることに成功した。標数0でのこれらの計算は、従来あまり重要視されていなかったが、上記のパラメータ付き定積分の満たすホロノミックな微分方程式系を計算するには、標数0での計算が必須であるから、きわめて重要な進展であると言える。なおこれらの成果物を含んだ KnoppixMath 2009 を 2009 年 3 月末にリリースした。計算系グループでは上記重点テーマを共有問題意識としつつ、微分差分方程式([Y. Komori, M. Noumi and J. Shiraishi, Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications, arXiv:0812.0279.]), 最適化と学習([J. Gotoh and A. Takeda, On the Role of the Norm Constraint in Portfolio Selection, Optimization Online Eprint, February 2009.]), 微分幾何([2]), 局所環のアルゴリズムなど、様々な方向での研究を精力的に推進している。今後、そのような様々な方向の研究が上記重点テーマと相乗的な研究の進展を育むことが期待される。そのような一例として、グレブナー基底計算の最適な重みベクトルの最適化の手法による導出の研究を開始している。

3. 研究実施体制

(1)「理論系」グループ

- 理論系第1グループ

①研究分担グループ長: 日比 孝之(大阪大学・大学院、教授)

②研究項目

- ・先端科学技術に現れるグレブナー基底の代数的理論の探究

●理論系第2グループ

①研究分担グループ長: 大杉 英史(立教大学、准教授)

②研究項目

- ・先端科学技術に現れるグレブナー基底の代数的理論の探究

(2)「応用系」グループ

●応用系第1グループ

①研究分担グループ長: 竹村 彰通(東京大学・大学院、教授)

②研究項目

- ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

●応用系第2グループ

①研究分担グループ長: 青木 敏(鹿児島大学、准教授)

②研究項目

- ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

●応用系第3グループ

①研究分担グループ長: 栗木 哲(情報・システム研究機構、教授)

②研究項目

- ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

●応用系第4グループ

①研究分担グループ長: 大津 起夫((独)大学入試センター、教授)

②研究項目

- ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

●応用系第5グループ

①研究分担グループ長: 只木 孝太郎(中央大学研究開発機構、機構准教授)

②研究項目

- ・グレブナー基底の先端科学技術への実践的応用の探究

(3)「計算系」グループ

●計算系第1グループ

①研究分担グループ長: 高山 信毅(神戸大学・大学院、教授)

研究者名: 野呂 正行(神戸大学・大学院、教授)

研究者名: 野海 正俊(神戸大学・大学院、教授)

②研究項目

- ・グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発

●計算系第2グループ

①研究分担グループ長: 武田 朗子(慶應義塾大学、講師)

②研究項目

- ・グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発

●計算系第3グループ

①研究分担グループ長: 濱田 龍義(福岡大学、助教)

②研究項目

- ・グレブナー基底の計算の高速化とソフトウェアの開発

4. 研究成果の発表等

(1) 論文発表 (原著論文)

1. S. Aoki and A. Takemura, Some characterizations of affinely full-dimensional factorial designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, to appear.
2. T. Hamada and K. Shiohama, Complete real hypersurfaces in compact rank one symmetric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.
3. K. Tadaki, Chaitin Ω numbers and halting problems, *Proceedings of the Computability in Europe 2009 (CiE 2009)*, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, to appear.
4. S. Tsujii, K. Tadaki, R. Fujita, M. Gotaishi, and T. Kaneko, Security enhancement of various MPKCs by 2-layer nonlinear piece in hand method, *IEICE Trans. Fundamentals*, to appear.
5. 大津起夫・石岡恒憲・橋本貴充、試験問題統計情報データベースの整備、*大学入試研究ジャーナル* 19(印刷中)
6. 大津起夫・石岡恒憲・橋本貴充、試験問題統計情報のデータベース化と利用環境の整備、*大学入試センター研究紀要* 38(印刷中)

(2) 特許出願

平成 20 年度 国内特許出願件数 : 0 件 (CREST 研究期間累積件数 : 0 件)