

戦略的創造研究推進事業 CREST  
研究領域「トポロジカル材料科学に基づく革新的機能  
を有する材料・デバイスの創出」  
研究課題「物質のトポロジカル相の理論的探究」

## 研究終了報告書

研究期間 2019年10月～2025年03月

研究代表者:河東 泰之  
(東京大学 大学院数理科学研究科  
教授)

## §1 研究実施の概要

### (1) 実施概要

河東グループでは、物質のトポロジカル相の研究を、作用素環の手法を用いて研究した。その過程で代数的トポロジーとの関係が大いに深まった。まず、河東は 2 次元トポロジカル秩序の研究において、物理学者たちがテンソルネットワークを用いて行っていた研究に現れる 4-テンソルが、作用素環論において 1990 年代から調べられていた、**bi-unitary connection** というものと同じであることを指摘した。これに基づき、テンソルネットワークの研究に現れるハミルトニアン作用するヒルベルト空間が、作用素環論で昔から研究されているものの同一視できること、これに基づいて  $\alpha$  誘導の理論がテンソルネットワークの枠組みで新たに定義できること、またこれらの手法が作用素環論における 1990 年代からの問題の解決に役立つことを示した。さらに緒方は、1 次元 SPT 相、2 次元 SPT 相、また 2 次元トポロジカル相の分類において、物理学者たちの予想を数学的に証明した。一方山下は、これらの研究に現れる数学的な構造、特にある種のコホモロジー理論を、超弦理論の枠組みで研究し、代数的トポロジーの問題を解決した。窪田はこれらの問題を非可換幾何学と関連付け、Kitaev らの予想の数学的研究を進めている。

佐藤グループを中心にトポロジカル超伝導体を中心に分類理論を進めた。特に、対称性指標に基づき 1651 の磁気空間群とそれに付随して現れるクーパーの対称性全てに対してその対称性指標が明らかになり、また超伝導ノード構造の分類も行われた。これは対称性指標によるトポロジカル絶縁体・超伝導体の分類を完成させる仕事であり、チーム全体として進めているトポロジカル絶縁体の研究、新材料の開発の基礎を与える研究である。また、クーパー対自体が結晶対称性に対して不変かつ時間反転対称性も保つ従来型超伝導体が、トポロジカル超伝導性を持ちうる可能性を追求し、230 の空間群のうち、199 個がトポロジカル超伝導性を示しうることを明らかにし、トポロジカル超伝導体の可能性を大きく広げた。また、開放量子系で顕著となる非エルミートトポロジカル相の研究を進め、高次表皮効果など新しい現象を発見するとともに、非エルミート系特有のトポロジカル相である点ギャップトポロジカル相では、表皮効果のため、開放境界条件と周期的境界条件でトポロジカル相の分類が異なることを見出し、それによりバルク・境界対応の確立に成功した。また、非エルミートトポロジカル相に関するレビュー論文を執筆し、広く読まれている。そのほか、メンバーの大山は高次ベリー位相に関する研究で、数学者も巻き込んで共同研究を進めている。

LSM 定理は、通常、系が  $U(1)$  などの連続対称性をもつ一次元量子系に対して証明されてきたが、河東グループの緒方らは離散対称性の場合に対して数学的な証明を与えた。古崎グループではこれに触発されて、並進対称性と離散的な内部対称性をもった量子多体系に対して、研究を進め、2 次元やより高次の空間における量子多体系の基底状態に対して LSM 定理の一般化を論じた。また、古崎グループでは、スピン軌道相互作用の弱い系に対して、トポロジカル相の理論モデルの構成やディラック半金属の物質提案を行った。

### (2) 顕著な成果

<優れた基礎研究としての成果>

#### 1. 1 次元、2 次元の SPT 相の分類におけるコホモロジー群による分類の完成

概要：有限群の作用がある場合の SPT 相の分類は、その群のコホモロジー理論によって記述できると期待されてきた。緒方はこの問題を作用素環論的に研究し、講師の次元が 1 次元、2 次元の場合を数学的に完全な形で証明した。これに先行する量子統計力学の作用素環論的研究と合わせ、緒方は数理論理学最高の国際賞であるアンリ・ポアンカレ賞を受賞し、また、数学において最も格が高く、最も伝統がある国際数学者会議(4 年ごとに開催)で招待講演を行った。

#### 2. 点ギャップトポロジカル相におけるバルク・境界対応の確立

概要：非エルミート系には、複素エネルギーに由来する新しいトポロジカル相である点ギャップトポロジカル相が存在するが、トポロジカル相の中心的性質であるバルク・境界対応が一見

成立せず、大きな問題となっていた。本研究は、点ギャップトポロジカル相では開放境界条件と周期的境界条件でトポロジカルな分類が異なることを指摘し、その新しい分類に基づきバルク・境界対応を確立した。

### 3. 高次非エルミート表皮効果の発見

概要：非エルミート系に特有のトポロジカル現象である非エルミート表皮効果は、物理現象として興味深いだけでなく、超高感度センサーなど未来のテクノロジーにもつながると期待されている。本研究は、空間群など構造に由来する対称性を使うことで、物質の表面でなく、角に表皮モードが現れる新しい非エルミート表皮効果が生じることを明らかにした。Phys. Rev. B 誌の Editor's suggestion に選ばれるなど大きく注目を集めている。

### < 科学技術イノベーションに大きく寄与する成果 >

#### 1. トポロジカル超伝導体の対称性指標による分類の完成

概要：対称性指標はトポロジカル絶縁体に代表されるトポロジカル物質の理論的予測において中心的な役割を果たしているが、超伝導体においては対称性指標の方法が未発展であった。本研究では、トポロジカル超伝導体における対称性指標の方法を完成させるとともに、可能なすべての空間群に対して対称性指標による分類を完成させた。これは今後のトポロジカル超伝導体探索の基礎を与え、トポロジカル物質によるイノベーションに大きく貢献できる研究である。

### < 代表的な論文 >

#### 1. Y. Ogata,

An  $H^3(G,T)$ -valued index of symmetry-protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional quantum spin systems,  
Forum Math. Pi 9 (2021), Paper No. e13, 62 pp.

概要： $d$  次元格子上的量子スピン系の SPT 相について、作用している有限群の  $(d+1)$  次コホモロジー群が、分類のための自然な不変量になるであろうという有名な物理的予想を  $d=2$  の場合に解決した。( $d=1$  の場合は同著者の別の論文で解決済みである。) 3 次コホモロジー群が現れる作用素環論の分類理論の手法を量子スピン系に応用したことが新しいアイデアとして国際的に高く評価されており、数学の最高峰ジャーナルの一つに掲載された。

#### 2. D. Nakamura, T. Bessho, M. Sato,

Bulk-Boundary Correspondence in Point-Gap Topological Phases,  
Phys. Rev. Lett., 132 (2024), 136401.

概要：非エルミート系には、複素エネルギーに由来する新しいトポロジカル相である点ギャップトポロジカル相が存在するが、トポロジカル相の中心的性質であるバルク・境界対応が一見成立せず、大きな問題となっていた。本研究は、点ギャップトポロジカル相では開放境界条件と周期的境界条件でトポロジカルな分類が異なることを指摘し、その新しい分類に基づきバルク・境界対応を確立した。

#### 3. S. Kobayashi and A. Furusaki,

Fragile topological insulators protected by rotation symmetry without spin-orbit coupling,  
Physical Review B 104 (2021) 195114.

概要：時間反転対称性と  $n$  重回転対称性 ( $n=2,4,6$ ) を持つクラス AI の脆弱トポロジカル絶縁体のモデルを提案した。これらのモデルは、 $Fu$  のスピンレスのトポロジカル結晶絶縁体モデルを一般化したもので、擬似スピンとして軌道自由度を使用する。モデルは  $C_n$  対称性に基づく最小の表面ハミルトニアンを検討し、ギャップレス表面状態の可能性を議論した。

## § 2 研究実施体制

### (1) 研究チームの体制について

#### ① 河東グループ

研究代表者: 河東 泰之 (東京大学大学院数理科学研究科 教授)

研究項目

- ・モジュラーテンソル圏と **gapped Hamiltonian** の研究
- ・共形場理論との対比に基づくモジュラーテンソル圏の研究
- ・行列積作用素を用いたモジュラーテンソル圏の研究

#### ② 佐藤グループ

主たる共同研究者: 佐藤 昌利 (京都大学基礎物理学研究所 教授)

研究項目

##### 1. トポロジカル物質の設計理論

- ・トポロジカル結晶絶縁体・超伝導体の分類
- ・対称性によって守られたトポロジカル相の研究
- ・非エルミート・トポロジカル相の解析

##### 2. 物質中のエニオン励起の基礎理論

- ・幾何学的手法による可解モデルの解析
- ・量子ウォークによるトポロジカル相の提案

#### ③ 古崎グループ

主たる共同研究者: 古崎 昭 (理化学研究所開拓研究本部 主任研究員)

研究項目

- ・トポロジカル材料の設計理論
- ・量子多体系のトポロジカル相の理論

### (2) 国内外の研究者や産業界等との連携によるネットワーク形成の状況について

本計画は数学者と物理学者の協同を目指している。本メンバーの数学者が、立川裕二、田崎晴明、米倉和也、深谷英則、松木義幸、大野木哲也、山口哲らの物理学者と共同研究を行い、また本メンバーの物理学者が五味清紀、南和彦、古田幹雄、Max Leinらの数学者と共同研究を行っている。また Microsoft の Zhanghan Wang はこの CREST の正式メンバーではないが、当初よりアドバイザーとして関係を深めている。さらに MIT の Wen とも交流を続けている。

佐藤は、開放系に特有の非エルミート・トポロジカル相の研究の進展に伴い、非エルミート系を含む非平衡系トポロジカル相の研究者とのネットワーク形成を図っている。まず、同 CREST の島野チームの共同研究者である岡隆史氏(東京大・物性研)と基礎物理学研究所において研究会を主催するなど共同で活動を行い、国内外における関連研究の動向の把握に努めるとともに、若手研究者間でのネットワークの形成を図った。また、生命現象の解明に独自のトポロジーの視点から挑戦している望月敦史氏(京都大・医学生研)に協力して、生物物理学会でシンポジウム講演を行うなど、従来の物性物理の枠を超えたより広い分野との連携も模索した。