「現代の数理科学と連携するモデリング手法の構築」
平成26年度採択研究代表者

H28 年度
実績報告書

大石進一

早稲田大学理工学術院
教授

モデリングのための精度保証付き数値計算論の展開

§1. 研究実施体制

(1)「大石」グループ
① 研究代表者:大石 進一 (早稲田大学・理工学術院、教授)
② 研究項目
・モデリングのための精度保証付き数値計算法の開発

(2)「荻田」グループ
① 主たる共同研究者:荻田 武史 (東京女子大学・現代教養学部、准教授)
② 研究項目
・無誤差変換法を用いた高速・高精度な数値線形代数アルゴリズムの開発

(3)「山本」グループ
① 主たる共同研究者:山本 野人 (電気通信大学・情報理工学部、教授)
② 研究項目
・微分方程式に対する精度保証の開発

(4)「高橋」グループ
① 主たる共同研究者:高橋 大輔 (早稲田大学・理工学術院、教授)
② 研究項目
・可積分系研究の厳密解析の展開

(5)「渡部」グループ
① 主たる共同研究者:渡部 善隆 (九州大学・情報基盤研究開発センター、准教授)

② 研究項目

・非線形偏微分方程式に対する計算機援用証明

(6)「小林」グループ

① 主たる共同研究者：小林 健太 （一橋大学・商学研究科、准教授）

② 研究項目

・有限要素法の誤差評価と精度保証付き数値計算への応用

(7)「尾崎」グループ

① 主たる共同研究者：尾崎 克久 （芝浦工業大学・システム理工学部、准教授）

② 研究項目

・線形計算に対する高精度かつ高速なアルゴリズムの開発とその応用

(8)「山中」グループ

① 主たる共同研究者：山中 脩也 （明星大学・情報学部、准教授）

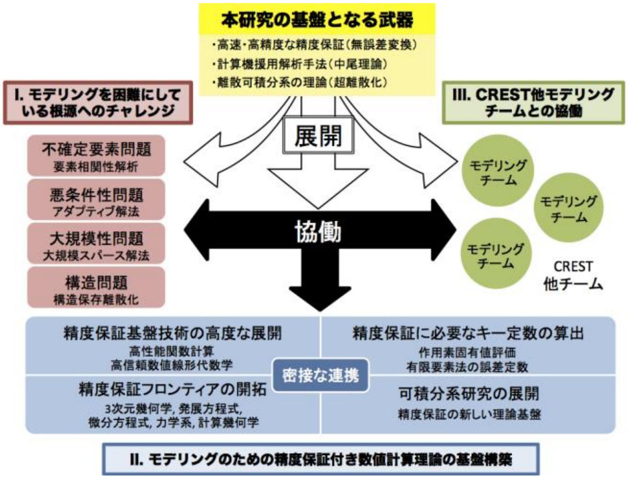
② 研究項目

・精度保証理論に基づく計算基盤技術の高性能化

§2. 研究実施の概要

モデリングのための精度保証付き数値計算の構築のために8本の柱である「不確定要素問題」,「悪条件性問題」,「大規模性問題」,「構造問題」,「精度保証基盤技術の高度な展開」,「精度保証に必要なキー定数の具体的算出」,「精度保証フロンティアの開拓」,「可積分系研究の展開」の研究を行っている.

今年度の研究実施の概要をそれぞれ以下に記述する.



(1)不確定要素問題: ペナルティ関数を導入し, Affine 演算におけるダミー変数の削減するアルゴリズムを検討した. まず, ハウスドルフ距離を用いた最小化問題としてアルゴリズムを定式化した.

(2)悪条件性問題: モデリングにおける悪条件性問題の解決を目指して, 悪条件な連立一次方程式に適用可能な高精度数値計算法を開発した. 通常のアルゴリズムでは, 問題の困難さの指標となる条件数が 10 の 16 乗程度までが解くことができる限界であったが, 我々の提案方式では, 10 の 30 乗程度までの問題を高速に解くことができるようになった.

(3)大規模性問題: 大規模固有値問題に対して多倍長区間演算ライブラリ LILIB を用いた精度保証付き数値計算に取り組んだ.

(4)構造問題: ある種の非線形波動方程式に対する構造保存型差分スキームである自己適合移動格子スキームについて, これまでとは異なるタイプの方程式について自己適合移動格子スキームの構築及び精度の検証を行なった. また, 可積分系で頻繁に現れる q-ベッセル関数の精度保証付き数値計算を行なった.

(5)精度保証基盤技術の高度な展開: 半無限積分により表現される, Gamma 関数や変形 Bessel 関数について, 二重指数関数型積分公式に基づく近似計算法の誤差上限を求め, 精度保証付き数値計算法を構築した. また, 荻田グループが必要な三角行列の積を高速かつ高精度に計算する関数を開発した.

(6)精度保証に必要なキー定数の具体的算出: 四面体について、射影外接半径という幾何学的な量を定義することにより, 四面体上の高次 Lagrange 補間誤差を評価する公式を得た. これにより, 有限要素法を用いた空間 3 次元の偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算への応用が期待できる.

(7)精度保証フロンティアの開拓： 構築したLyapunov関数の精度保証による構成法を応用し，力学系における問題解決のためのツールを開発した．非線形関数方程式に対する無限次元Newton 法による精度保証付き数値計算の基盤を成す線形化作用素に対する可逆性の検証とその逆作用素ノルム評価理論を一般の Hilbert 空間に対して拡張することに成功した．3 次元多様体の精度保証付き体積計算に必要な Lobachevsky 関数の精度保証付き数値計算法を考案した．また，計算幾何の判定問題である2点間の距離に対する浮動小数点フィルタを開発した．

(8)可積分系研究の展開： 可積分系は非線形系の中でも複数の保存量の存在や解の明示的構造が示されるなど，代数解析的に厳密な解析が可能な系である．この特徴を活かして，平成 28 年度は粒子系の確率解析，max-plus 方程式の初期値問題，離散幾何アルゴリズムなどについて，可積分系にまつわる厳密解析を行った．

＜今年度の代表論文＞

[1] M. Mizuguchi, A. Takayasu, T. Kubo, S. Oishi: Numerical verification for existence of a global-in-time solution to semilinear parabolic equations, J. Comput. Appl. Math., Vol. 315, pp. 1-16, 2017.
[2] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao: Norm Bound Computation for Inverses of Linear Operators in Hilbert Spaces, Journal of Differential Equations, Vol. 260, Issue 7, pp. 6363-6374, 2016.
[3] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi: Error-free transformation of matrix multiplication with a posteriori validation, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 23, No. 5, pp. 931-946, 2016.