

研究終了報告書

「How to cut a discrete cake fairly? (不可分財の公平な分け方)」

研究期間: 2019 年 10 月～2021 年 3 月

研究者: 五十嵐 歩美

1. 研究のねらい

学生への講義配分, 会社でのタスク配分, 研究室へのオフィス配分など, 日常の様々な場面で, 公平な配分が求められる. 公平分割理論とは, 複数の財を異なる選好を持つ人々にどのように公平に分ければよいかを数理的に解析する理論である. 古典的な理論では, お金や土地などの可分的な財(可分財)の公平配分が研究の中心であった. しかし現実には, 例えば学生への講義割り当てなどのように, 財の可分性を仮定できない場合が多々ある. そこで近年, 不可分財, すなわち整数単位でしか量れない複数の財を公平に配分するにはどうすればよいか, 広く研究が行われるようになった. 可分財の配分とは異なり, 不可分財の配分では無羨望配分の存在が保証されない. そのため, 完全な公平性は保証できないが, できるだけ近似的な公平性を担保できるかどうか重要な課題となる. 本研究では, そのような近似的な公平性と配分の効率性がどのような数理的な構造で達成できるのかを明らかにする.

2. 研究成果

(1)概要

不可分財の配分の場合, 可分財の配分と異なり, 妬みのない状態を保証できるとは限らない. そこで, 2011 年に Eric Budish は近似的な公平性の概念として, Envy-freeness up to 1 good (EF1) を提案した. EF1 を満たす配分では, 妬みがあるかもしれないが, その度合いが財一つ分で抑えられる. 各配分の参加者の効用関数が単調であれば, EF1 を満たす配分は常に存在し, かつ効率的に計算できるということが知られている. 一方, 何も配分しないという配分もある意味公平であり, 現実には公平性と効率性の両立が求められる. すなわち, 公平性を満たしつつ, できるだけ全ての人々を幸せにするような配分が望ましい. それぞれのエージェントが対称的であり, かつ各エージェントのアイテムの組合せに関する効用が財に関して独立に決まる場合, 近似的な公平性である EF1 と効率性の尺度であるパレート最適性が両立することが知られている. しかし, より一般に, エージェント間に非対称性がある場合や, アイテムの組合せ方によって効用が異なる場合, EF1 とパレート最適性が両立するか, またそのような性質を満たす配分を効率的に計算できるかどうかは, 未解決であった. 本研究では, この問題の解決に向けて, 特に次の 2 つの実用上重要な状況に着目した.

1. 「各エージェントの効用関数がマトロイドのランク関数で表現できる.」
2. 「各エージェントの非対称性が重みベクトルによって表現できる.」

これらの場合について, 公平かつ効率的な配分方法が存在することを示し, さらにそのような配分を効率的に計算するアルゴリズムも与えた. これらの成果は, ACM Transactions on Economics and Computation などのアルゴリズム的ゲーム理論のジャーナルに出版予定である.

(2) 詳細

研究テーマ A 「エージェントの効用関数がマトロイドのランク関数となる場合の公平分割問題」

各エージェントの効用関数が加法的になる場合、EF1 とパレート最適性を同時に満たす配分が存在することが知られていた (EC 2016). しかし、例えば「コーヒーと紅茶はどちらか一方で良い」などの財の代替性がある状況で、近似的な公平性と効率性が両立するかどうかは未解決問題であった. 本研究では、効用関数がそのような財の代替性を持つ場合において、EF1 とパレート最適性が両立可能であり、構造的な特徴づけも与えた. 具体的には、各エージェントの効用がマトロイドという離散構造によって記述できる場合、すなわち、効用関数がマトロイドのランク関数になる場合、効用の和を最大化し、かつ近似的な公平性を満たす配分が存在し、さらにそのような配分は任意の対称凸関数の最小化によって効率的に得られることを示した. マトロイドのランク関数は、劣モジユラ関数の解析において、基礎となる重要な部分クラスであり、現実的な応用例も数多く持つ. 例えば、シフト割り当てなどにおいて、雇用者の効用がある制約下における望ましいシフトの個数を最大値と設定した場合、そのような効用関数はマトロイドのランク関数となる. また、シンガポールなどで行われている公宿舍の割当において、各エスニックグループに公平な割当を求めたい時、各グループの効用をグループのメンバーとグループに割当られた宿舍の集合のマッチングのサイズとすると、マトロイドのランク関数における公平分割問題として記述できる.

研究テーマ B 「各配分の参加者が、非対称である場合の公平分割問題」

本研究では、各配分の参加者が、非対称である場合の公平分割問題について解析を行った. 例えば、複数のグループに財を配分する際に、構成員がたった 1 人のグループと 100 人のグループを同等に扱うのは、無理がある. そこで、各参加者に、重みが与えられているとして、重みを考慮した公平性の概念を定義した. 本研究では、重みを考慮した場合も、加法的な効用関数の下では、近似的な公平性を満たす配分が存在し、かつ効率的に計算できることを示した. さらに、近似的な公平性とパレート最適性を同時に満たす配分が存在することを示した. 具体的には、Fisher market と呼ばれる仮想的な市場での均衡の存在から、そのような解が存在することを証明し、さらに、公平かつ効率的な配分を計算する擬多項式時間アルゴリズムも与えた.

3. 今後の展開

今後は、タスク割り当てなどのエージェントが負の効用関数を持つ場合において、公平性と効率性のトレードオフを解明することが最重要課題となる. エージェントが非負の加法的な効用関数を持つ場合、可分財の公平かつ効率的な配分は、凸関数の最小化問題に帰着できることが知られている. 一方、非負性が成立しない場合、非凸関数最適化問題の鞍点を計算する問題と等価であることが知られている. 従って、不可分財の場合においても、技術的に非常に挑戦的な問題であることが予想される. また、アイテムを逐次的に配分する設定において、公平性かつ効率性

を保証するようなオンラインアルゴリズムが設計できるか、についても今後精力的に研究したい。

4. 自己評価

不可分財の配分における公平性と効率性の両立可能性は、アルゴリズム的ゲーム理論分野で非常に高い関心を集めており、多くの研究者が取り組んでいる問題である。また、実際に、これまでの理論に基づいた応用研究も進んでおり、2014 年 11 月にカーネギーメロン大学の Procaccia 教授らのグループが開発した一般向けサービスの Spliddi は、米国で大きな成功を収めている。Spliddit は、公平な家賃の決め方などの身近な問題に対するウェブサービスであり、開発されて以来 12 万人を超す一般の人々に活用されている。これらの具体的な制度設計は、紙とペンによる最新の理論的成果に基づいている。本研究で得られた成果により、今まで理論的な保証のなかった非加法的な効用関数における公平配分問題について、その適用範囲を大幅に拡大するための第一歩になった。

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数: 5件

1. Mithun Chakraborty, Ayumi Igarashi, Warut Suksompong, Yair Zick, Weighted Envy-Freeness in Indivisible Item Allocation, ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC), in press.

上記の論文では、各エージェントの重要度を正の実数としてモデル化し、重みを考慮した資源配分の公平性の概念を提案した。各配分の参加者が非負の加法的な効用関数を持つと時、重みを考慮した EF1 性を満たす配分が存在することを示した。またそのような公平性の概念がパレート最適性と同時に達成できることも示した。しかし、エージェントが対称な場合とは異なり、一般の単調劣モジユラ関数では、重みつき EF1 を満たす配分は存在しないことも示した。

2. Nawal Benabbou, Mithun Chakraborty, Ayumi Igarashi, Yair Zick, Finding Fair and Efficient Allocations When Valuations Don't Add Up. Proceedings of the 13th International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT), pages 32-46, 2020

各プレイヤーが非負の加法的な効用関数を持つ限定的な状況において、パレート最適性と近似的な公平性である EF1 を満たす不可分財の配分が常に存在することが知られているが、より一般の劣モジユラ性を満たす効用関数で、上記の性質が満たされるかは重要な未解決問題の一つとなっている。劣モジユラ性は、財の限界効用逓減性に対応する自然な仮定である。上記の論文では、効用関数がマトロイドのランク関数となる場合、EF1 を満たし、かつ効用の和を最大化するような割当が存在することを示した。さらに、そのような配分を計算する効率的なアルゴリズムも与えた。

3. Hadi Hosseini, Ayumi Igarashi, Andrew Searns, Fair Division of Time: Multi-layered Cake Cutting, Proceedings of the 29th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), AAAI Press, 2020 (採択率: 592/4717=12.6%).

本研究では、スケジューリングなどの、複数の時間区画を分割する問題について考察した。例えば、セミナーを行うための会議室を研究室に割り当てる際に、同じ時間帯に複数の会議室を1つの研究室に割り当てても資源の無駄である。本研究では、このような時間的な制約下における公平分割問題を提案し、無羨望/比例配分の存在と効率的な解法を示した。

(2)特許出願

特になし。

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

1. Fair and Efficient Allocation: Moving Beyond Additivity, 2nd Games, Agents, and Incentives Workshop (GAIW@AAMAS 2020), 2020 年 5 月(招待講演)。
2. Fair division of graphs and of tangled cakes, Online Social Choice Seminar Series, 2020 年 6 月(招待講演)。
3. Consensus Halving for Sets of Items, JCCA2020(離散数学とその応用研究集会), 2020 年 8 月(招待講演)。
4. 「公平分割問題とその進展」, FIT 情報科学技術フォーラム 2020, 2020 年 9 月(招待講演)。
5. 「公平分割問題とその進展」, OR 学会 2021 春季シンポジウム, 2021 年 3 月(招待講演)。