

# 研究終了報告書

## 「確率測度の空間上の動的システムの可到達性の解析と深層学習への応用」

研究期間: 2021年10月～2024年3月

研究者: 星野 健太

### 1. 研究のねらい

制御理論は様々なシステムを制御するための数理的な方法論の構築を目指すものであり、所望の動作が実現されるように、システムに与える制御入力を設計することが基礎的な問題となる。近年、状態の遷移が確率的となるシステムである場合を対象とする確率制御と呼ばれる分野において、最適輸送理論や平均場型制御理論に基づき、制御対象の確率分布を陽に制御するような制御問題が研究されるようになってきている。

本課題は、この確率分布を陽に制御する問題に関するものである。既存の研究ではこの問題に対して、確率分布を制御するための手法の開発に重点を置いたものが多く、システムのクラスを線形システムに限定し、確率分布のクラスを正規分布に限定することで具体的な制御手法を示すものが多い。一方で、現実の問題では、制御対象に何らかの非線形性が伴い、かつガウス分布のみでないより一般的な確率分布を対象とした問題を扱うことが要求されることを考慮すれば、非線形かつ一般的な分布を考慮した問題に取り組む必要がある。制御理論では具体的な制御入力の設計に取り組む前に、制御の目的を達成する制御入力が存在するかどうかを判定する問題があり、可制御性や可到達性の解析と呼ばれる問題となっている。非線形なシステムなど複雑なシステムを対象とした場合には、具体的な制御の設計が難しいことが多く、設計にさきがけて制御目的を達成する制御入力の存在条件を明らかにすることが重要な課題となる。本課題は、確率分布を制御する問題に可制御性や可到達性といった性質を拡張し、制御の可能性や動作保証の手法の基礎を構築することを狙いとしたものである。

また、この課題を構想するきっかけとなった背景の一つには、正規化流(Normalizing flow)や拡散モデルと呼ばれる深層学習の生成手法が扱う問題が確率分布を制御する問題と類似していることが挙げられる。本課題ではそのような生成手法の性能保証の手法の創出につながるような結果を制御理論の観点から提供することも目指している。

### 2. 研究成果

#### (1) 概要

本課題実施期間中において、(A) 可制御性および可到達性の解析の基礎として、確率分布の最適制御問題の最適性条件の導出、および(B)確率システムの動作保証のための安全制御手法の開発の2つの成果が得られた。

(A)において最適制御問題に取り組んだ理由は、確率分布の制御問題における可制御性や可到達性の解析という新しい問題にアプローチするために、これらの問題と関係が深い最適制御問題に基づいたアプローチが必要であることがわかったためである。(A)においては確率微分方程式で記述された連続時間非線形確率システムの確率分布を制御する問題を対象として、このシステムの確率分布を制御する最適制御問題を考え、最適制御理論の基礎的な結果であるポントリャーギンの最小原理を拡張する形で最適性条件を導出した。最適性条件は、確

率制御における前進・後退確率微分方程式と最適輸送理論の双対定理を用いることによって得られた。この成果については、制御理論のトップカンファレンスの一つである、IEEE Conference on Decision and Control に採録された。

また、(B)は、本課題の当初の研究計画には含まれなかった課題であるが、確率システムの性能保証についてカーネギーメロン大学の研究者との議論から始まった共同研究である。近年の制御工学の分野では、安全制御と呼ばれる制御問題が注目を集めている。これは、システムが指定された動作を実施している最中に、指定された動作範囲の外で動作することを防ぐように付加的な制御入力を加える問題である。課題(B)では確率微分方程式で記述される連続時間非線形確率システムについて、システムが動作中に指定された動作範囲にとどまる確率を最大化するような制御を行う手法を提案した。この成果については、IEEE Control Systems Letters に採録され、The 2023 American Control Conference にて発表を行った。

## (2)詳細

### 研究テーマ A 「可制御性および可到達性の解析のための確率分布の最適制御問題の研究」

制御問題の多くは、端的に言えば制御の対象を所望の状態となるように制御する問題である。確率分布の制御問題においては、対象の確率分布が所望の確率分布となるように分布を制御する問題となる。本課題の最終的な目標は、所望の分布が実現されるような制御入力存在、つまり可制御性を調べることであった。この問題については、取り組んでいる先行研究がほとんど存在しないため、まずそのためのアプローチを考える必要があった。そこで、確率分布の最適制御問題に基づいてアプローチすることとした。可制御性や可到達性は、指定された状態へ制御対象のシステムの状態を遷移させる制御入力存在を判定するものである。これを調べるためには、所望の状態と制御された状態の距離を最小にするような制御を行った時に、それらの間の距離が十分に小さくなることを確かめれば良い。そのため、所望の状態と制御された状態の距離を最小にするような問題が可制御性解析の基礎となりうる。このような距離を最小化する問題は最適制御問題として定式化される。そこで、確率分布の制御問題における可制御性の解析の基礎として、所望の確率分布と制御された確率分布の間の距離を小さくするような確率分布の最適制御問題に取り組んだ。この問題において、制御対象は確率微分方程式で記述される連続時間非線形確率システムとし、正規分布に限定されないより広いクラスの確率分布を対象とした制御問題の問題設定を扱った。この問題において、制御対象の確率微分方程式の解が持つ確率分布と指定された所望の確率分布の間の距離を確率分布の距離の一種である、Wasserstein 距離を使って評価し、その値を最小化する最適制御問題を研究した。この問題設定のもとで、距離が最小化されるような制御が行われた時に、制御対象のシステムが満たすべき条件を導出した。これによって分布間の距離を最小にするようなシステムの制御入力の特徴付けを行うことができた。具体的には、最適制御理論の基礎的な枠組みである、ポントリヤギンの最小原理と呼ばれる結果を確率分布の最適制御問題に拡張し、システムが満たすべき条件が前進後退確率微分方程式と Wasserstein 距離から導かれる Kantorovich ポテンシャルによって与えられることを示した。これによって最適な制御入力を得るために解くべき方程式が得られ、可制御性や可到達性の解析の基礎となる結果が得られた。この成果によって、確率分布を制御する問題の可制御性解析を行うためのアプローチも構想できており、対外発表に向けて準備を進めている。

### 研究テーマ B 「確率システムの動作保証のための安全制御手法」

近年の制御理論では、制御対象のシステムの安全な動作を実現するための制御手法が大きな注目を集めている。特に、制御バリア関数と呼ばれる概念を用いた制御手法によって、動作範囲の制約を考慮せずに設計した制御則を簡易な最適化問題を解くことによって、その制約の範囲内でシステムが動作するように制御する制御入力を得る手法が研究されている。制御バリア関数を用いた方法は、制御対象が常微分方程式で記述される場合には、基礎理論が確立されているものの、確率的な制御対象の場合には扱いが難しく、まだ発展途上の段階にある。

本テーマでは、制御対象が確率微分方程式で記述されるような制御問題を想定し、システムが確率微分方程式に含まれるノイズの影響下であっても、制御目的を達成するために動作中に制約外に出るような挙動を示した際に、付加的な制御をシステムに印加して、制約内に動作を留めるための手法を開発した。特に、これまでの研究において、システムの状態を記述する変数の次元が大きい大規模なシステムに対して、計算負荷の少ない手法を開発することが課題となっていた。具体的には、既存の方法では、安全な制御を実現するために偏微分方程式を解く必要があり、システムの変数の次元が大きくなると偏微分方程式を解くための計算負荷が大きくなることが課題であった。本研究では、安全制御でよく用いられる制御バリア関数と確率解析の確率微分方程式に対する比較定理を融合させることで、システムの状態変数の次元が大きくなったとしても計算負荷の増加を抑えて安全制御を実現できる確率制御の手法を開発した。これによって 10 次元の変数を持つようなシステムであっても、実時間制御を想定した実行時間でシステムの安全性を保証した制御が行えることが示された。なお、この研究はカーネギーメロン大学との共同研究として実施したものである。

### 3. 今後の展開

本課題では近年、制御理論の分野において注目を集めている確率分布の制御問題について、連続時間非線形確率システムと正規分布に限らない分布のクラスに対して、確率分布の制御問題の可制御性および可到達性解析の基礎となる結果として最適制御問題における最適性条件を得た。最終的な目標である、確率分布の制御問題における可制御性の解析については、期間内に得られた成果をもとにして可制御性解析を開発するための目処がついており、今後引き続き研究を行う予定である。また、深層学習の生成モデルの正規化流や拡散モデルとの類似性についても明らかになっており、最適制御問題や可制御性や可到達性の解析の応用を行う予定である。また、安全制御については、高次元のシステムに対する安全保証が可能になったことから、深層学習などを組み合わせて応用に向けて扱いやすくするような方向性の展開を予定している。

### 4. 自己評価

研究目的の達成状況としては、当初目標としていた確率分布の可制御性や可到達性などの解析を可能とするための結果が得られており、対外的に発表している成果はその基礎となる最適制御問題に関するもののみとなっているものの、達成状況としては一定の成果が得られていると言える。深層学習への応用については引き続き、研究を行っていきたい。また、安全制御の研究については海外の研究機関との共同研究につながり、論文の採録につながるな

ど当初の予定にはない成果が得られた。

研究の進め方(研究実施体制及び研究費執行状況)については、研究体制としては、確率分布の制御問題については個人で研究を行い、安全制御については ACT-X を通じて共同研究体制を築いて研究を行うことができた。研究費の執行状況に関しては、一部、新型コロナウイルス感染症の影響で旅費の支出を取りやめ、必要最低限の物品の購入などを行うなどの変更があった。

研究成果の科学技術及び社会・経済への波及効果については以下のようなことが言える。本課題は確率分布の制御問題が深層学習の生成モデルである、正規化流や拡散モデルといった動的システムを用いた手法との類似性に着目し、制御理論の可制御性や可到達性の概念によってそれらの手法の性能保証などにつながるような研究ができるのではないかと考えたことに端を発する。本課題の期間内の成果では、確率分布の制御問題の可制御性解析の基礎的な結果を得た段階であり、深層学習への具体的な応用には至っていないが、2023年に入って各国の政府が AI の安全性に関する会議を開いたりするなど、性能保証に対する要求は高まりを見せており、本課題の着眼点や方向性は現在の科学技術および社会的な流れに合致したものであったと言える。特に AI の安全性の実現について制御理論の可制御性の概念に言及する研究者が出てきていることは注目に値すると言える。今後の研究でこれらの流れに貢献するような研究を進めていくことを考えている。

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数:2件

1. Kenta Hoshino, "Finite-horizon optimal control of continuous-time stochastic systems with terminal cost of Wasserstein distance," in Proceedings of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control, pp.5819-5824, 2023
本論文は、確率分布の可制御性および可到達性解析の手法の開発の基礎として確率分布の最適制御問題に取り組んだものである。本論文ではこの確率分布の最適制御問題について、最適制御理論の基礎的な枠組みである最小原理に基づいて最適性条件を示した。非線形システムを制御対象とし、ガウス分布に限定されない広いクラスの確率分布を対象とした制御問題を扱い、確率解析、最適輸送理論、平均場型制御などを融合することで、最適性条件を得ている。
2. Kenta Hoshino, Zhuoyuan Wang, Yorie Nakahira, "Scalable Long-Term Safety Certificate for Large-Scale Systems," IEEE Control Systems Letters, 2023, Vol. 7, pp. 1285-1290.
本論文は確率システムの安全制御を実現するものである。制御バリア関数を確率制御システムに応用し、システムが制約を満たすように動作する確率を大きく保つための制御手法を開発した。確率解析の比較定理を利用することで次元の大きなシステムに対しても計算負荷を抑えた制御ができることを示した。
3.

## (2) 特許出願

研究期間全出願件数: 件(特許公開前のものは件数にのみ含む)

1	発 明 者	
	発 明 の 名 称	
	出 願 人	
	出 願 日	
	出 願 番 号	
	概 要	

## (3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

- Zhuoyuan Wang, Reece Keller, Xiyu Deng, Kenta Hoshino, Takashi Tanaka, Yorie Nakahira, "Physics-informed Representation and Learning: Control and Risk Quantification," in Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence 2024, in press
- Kenta Hoshino, "Finite-horizon optimal control of continuous-time stochastic systems with terminal cost of Wasserstein distance," the 62nd IEEE Conference on Decision and Control (学会発表)
- Kenta Hoshino, Zhuoyuan Wang, Yorie Nakahira, "Scalable Long-Term Safety Certificate for Large-Scale Systems," The 2023 American Control Conference (学会発表)
- 星野健太, "Wasserstein 距離を用いた確率分布の最適制御とワンウェイ型カーシェアリングへの応用," システム／制御／情報, Vol. 67, No. 10, pp. 421-426 (解説記事)
- 星野健太, "[アイ・サイ問答教室] 最適輸送問題・Wasserstein 距離って何?," システム／制御／情報, Vol. 67, No. 5, pp. 202-203 (解説記事)