

研究終了報告書

「探索問題の計算量解析を量子計算へ拡張する研究」

研究期間: 2021年10月～2024年03月

研究者: 石塚 天

1. 研究のねらい

本研究は、「量子計算は古典計算より優れているか？」という疑問に挑むものである。本研究では、具体的な解を求める形式の計算問題である『探索問題』の計算困難性に焦点を当て、探索問題の側面から、量子計算と古典計算の間にある本質的な計算能力の差異を明らかにすることを主目的とする。探索問題の難しさを量子計算の俎上で扱う理論基盤を構築していくと共に、これまで研究されてきた計算量クラス TFNP に対する理解を深めることが狙いである。

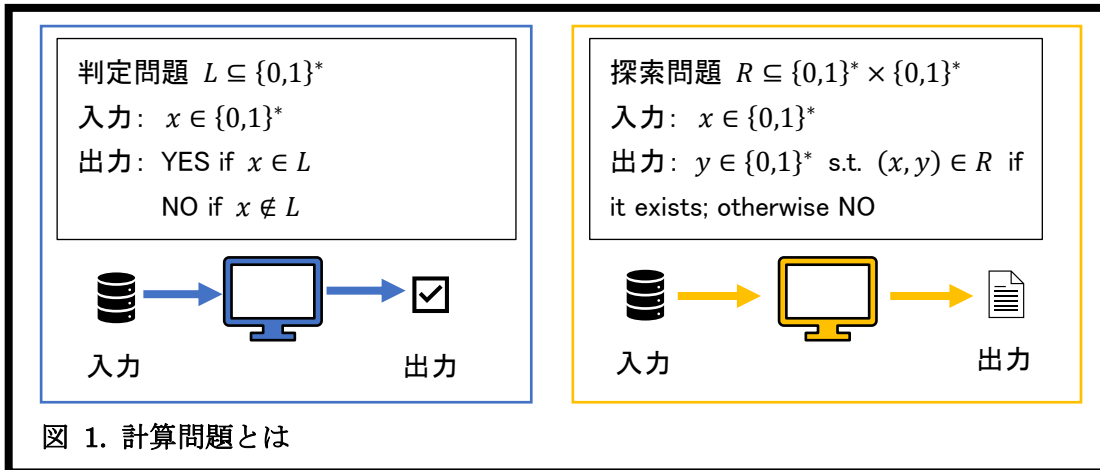
2. 研究成果

(1) 概要

計算問題には二つの形式がある(図1参照)。ひとつは、「YES」もしくは「NO」で答えることが可能な『判定問題』と呼ばれ(図1左)、もうひとつは、「YES」や「NO」で答えられるとは限らない『探索問題』と呼ばれる(図1右)。本研究において、注目する計算問題は、後者の探索問題である。特に、解の存在が保証された『完備探索問題』の計算困難性に興味がある。

一般的な計算量理論の枠組みでは、判定問題の計算困難性に焦点を当てる。計算機科学における最重要未解決問題の『P 対 NP 問題』も判定問題の計算困難性を解明する課題である。しかし、実社会における計算問題は判定問題ではなく探索問題の形で与えられることが多い。

典型的な探索問題の計算量理論の枠組みでは、図2に挙げるような対応関係が知られている。探索問題、特に計算量クラス TFNP に属する探索問題の難しさを捉えることは、実社会に現れる計算問題の難しさをより詳細に捉えるだけでなく、判定問題における二つの計算量クラス P と NP の間にある関係をより細かく分類することを可能とする。



本研究計画における当初の目標は、探索問題の計算量理論の枠組みを量子計算の計算量理論の枠組みへ拡張することであった。すなわち、探索問題の難しさを量子計算の俎上でも扱うことが可能な理論基盤を構築し、その過程において、これまで研究されてきた計算量クラス TFNP に対する理解を深めることを目標としていた。

しかし、下記詳細でも指摘するとおり、他の研究グループの研究成果によって、量子計算における探索問題の難しさを保証することが判定問題の難しさを保証することへ繋がらないことが判明した。それに伴い、計画を大幅に修正する必要性が生まれた。

目的の中でも触れていたとおり、従来の計算量クラス TFNP に対する理解を深めることに重点を置いた研究計画へと切り替えた。下記詳細でも触れるとおり、この研究では量子計算とTFNPの境界を探ることが最大の目標となる。量子計算では効率的に計算できる問題をTFNPの中で特徴付けることを目的とする研究方針へと切り替わっている。

(2) 詳細

これまでに得られた成果に関して、以下のふたつの観点から詳細をまとめる。

(A) 確率的な計算量クラスへの拡張

(B) 計算量クラス TFNP の理解を深める研究

研究テーマ A 「確率的な計算量クラスへの拡張」

探索問題の計算量理論を量子計算へ拡張するにあたり、従来の計算量クラスの定式化を再検討する。量子計算への拡張の前段階として、古典の確率的な挙動を許す計算モデルの上で計算問題がどのような振る舞いをするのかを観察する。

計算量クラス FNP の枠組みでは、図2の左側に示すように乱数に頼らない(確率的な挙動を許さない)計算機によって効率的に解の妥当性が検証可能であるような探索問題の難しさを

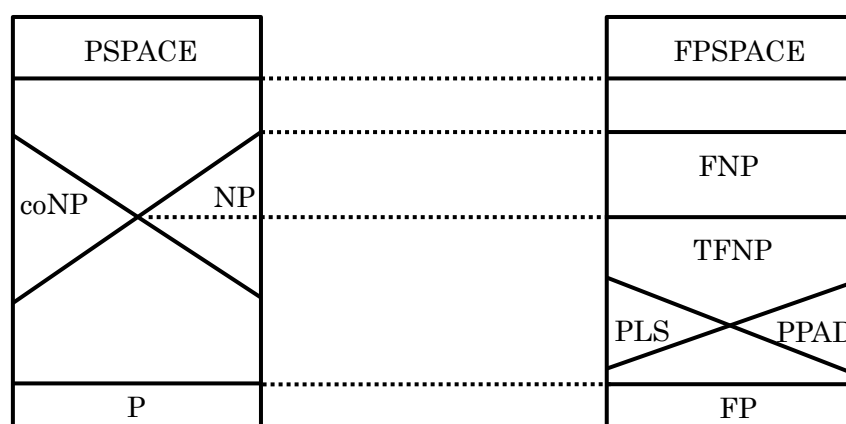


図 2. 計算量クラスの包含関係: 図の上方に位置する計算量クラスの方が難しい計算問題のクラスである。左の図は判定問題の計算量クラス。右の図は探索問題の計算量クラスを表す。破線は対応関係を意味する。

扱う。本研究テーマでは、図2の右側に示すように、乱数を活用する(すなわち、確率的な挙動を許す)計算機を用いて効率的に解の妥当性が検証可能であるような探索問題の難しさについて調査した。後者の計算量クラスを FMA と呼ぶことにする。

確率的な挙動を許したが、正しい解に対しては解が妥当であるか否かの検証を確率1で行うことができる。そのため、一見すると、確率的な挙動を許す探索問題のクラスは従来のクラスと一致しているように見受けられる。しかし、探索問題を定義するときに生まれる『拒否空間』に着目すると、二つの計算量クラスが一致することを示すのは容易ではなく、古典の判定問題の枠組みにおける『MA 対 $\exists$ ・BPP』に相当する探索問題の課題を提案することができる。これらの観察は、従来の探索問題の計算量理論では考慮していなかった『拒否空間』の特徴を捉えることが重要であることを示唆している。

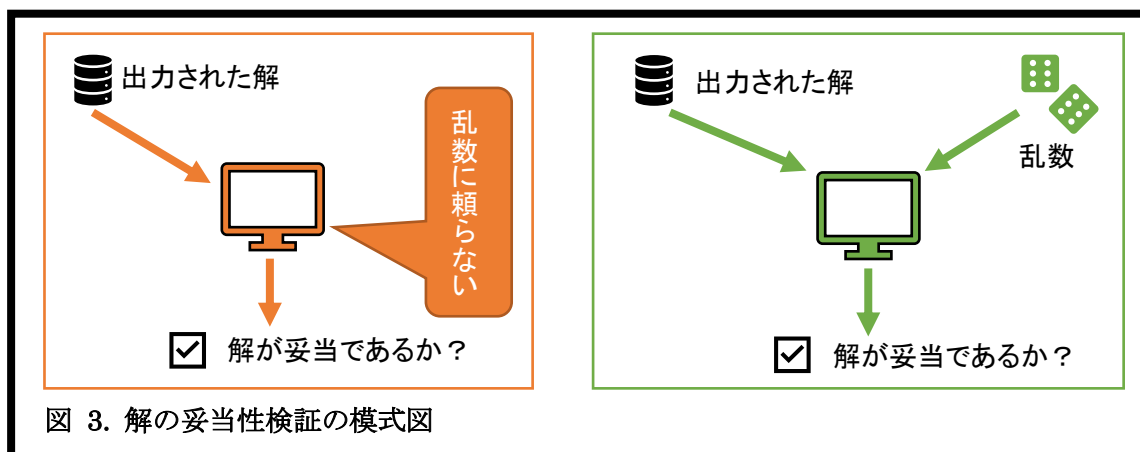
前述で紹介した古典の確率的計算機と同じような特徴を量子計算の枠組みでも示すことができれば、本研究計画における最初のステップはクリアしたと言えた。しかし、他の研究グループによる研究[S. Irani et al., CCC 2022]によって、量子計算の枠組みでは判定問題と探索問題の間を上手く橋渡しすることができないことが判明した。具体的には、探索問題の難しさを保証することが判定問題の難しさを保証することに繋がらないことが判明した。この結果は、量子計算における探索問題のクラスを分類していく上での最大のモチベーションを崩すものであり、当初の研究計画を大幅に修正する必要性が生じた。

研究テーマ B 「TFNP の理解を深める研究」

前述のとおり、探索問題の計算量理論を量子計算の俎上へ拡張することには、大きな障害があることが判明した。それに伴い、量子計算の枠組みで探索問題の難しさを扱う理論基盤を構築する研究から、本研究のもうひとつの目的でもあった「計算量クラス TFNP に対する理解を深める」ことを中心とした計画へ大きく方針転換をした。

大きく方針転換を果たしたが、「量子計算と古典計算の間にある差を解明する」という本筋の目標は残されている。図 4 に示すように、素因数分解は量子計算であれば多項式時間で解けることが知られているが、古典計算の多項式時間アルゴリズムは知られていない。さらに興味深いことに、素因数分解はTFNPに属することは分かっているが、TFNPの内部にある計算量クラス(図 4 参照)のどこへ属するのかが研究途上である。

研究テーマBで取り扱う計算問題は、素因数分解に代表される量子計算では多項式時間で解



くことが可能であるが、古典の多項式時間アルゴリズムが知られていない、そのような探索問題がTFNPにおいてどこへ位置付けられるのか、古典計算の側面から解明していくことを目標としている。

i) 計算量クラス PLC と PLS の関係を探る研究 (図 5 の青色のクラス間の関係)

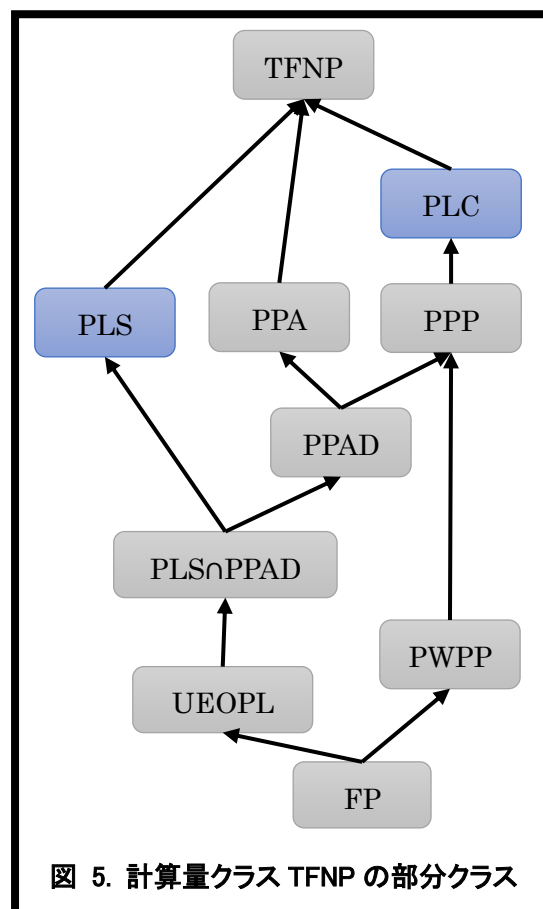
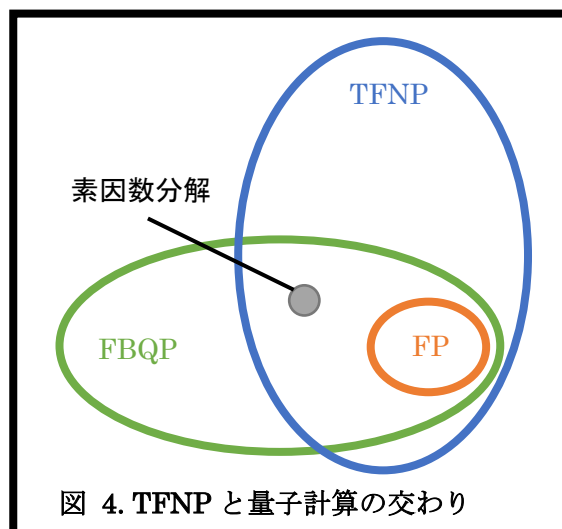
計算量クラス PLS は、局所探索アルゴリズムで解を求めることが可能な計算量クラスである。一方で、計算量クラス PLC はある種の組み合わせゲームで特徴づけられるような計算量クラスであり、[Pasarkar et al., ITCS 2023]で導入された。計算量クラス PLC が導入された背景には、Ramsey 理論のような鳩ノ巣原理では捉えることのできない組合せ論的な計算問題の難しさを捉えることであった。そのため、オリジナルの論文では鳩ノ巣原理と関係のある計算量クラス PPP や PWPP との関係については観察されていたが、他の計算量クラス PPA や PLS との関係については触れていない。

本研究では、TFNP の研究においてもっとも古くに導入された計算量クラスである PLS と最も新しい計算量クラス PLC の関係に焦点を当て、PLC 完全問題の拡張を通して、PLC と PLS の両方を含むような計算量クラスを定式化する研究を行った。

3. 今後の展開

まずは、古典計算の枠組みで研究を進め、研究成果を残す(査読付き論文の出版をする)ことに専念する。具体的には、研究テーマ B「TFNP の理解を深める」に関連する研究を続けていく。

図 6 に示すように、量子計算であれば多項式時間で計算可能な計算問題のクラスと、計算量クラス TFNP の部分クラス達との間にある境界ははっきりと定まっていないところが多い。前述で紹介したとおり、「素因数分解がどのクラスに属するのか判別でき



ていない」ことが良い例である。

したがって、二つの計算量クラス(1) EOPL, (2) EOPL $\cap$ PWPP の特徴付けに関する研究に注力する。これらに属する探索問題は、量子の多項式時間アルゴリズムが存在するのかが解明されていない。これらの計算量クラスに属する探索問題の計算困難性に関して、古典の意味での特徴付けを進めていく。

4. 自己評価

当初、本研究計画では量子計算の枠組みでも扱えるような探索問題の計算量理論の基盤を構築することを目標としていた。しかし、量子の探索問題の難しさを保証することが、判定問題の理解を深めることに至らない事実が明らかになり、当初の目標が瓦解する結果となってしまった。

研究計画の軌道修正を余儀なくされて以降、量子計算特有の研究手法の確立や探索問題の計算困難性の研究目標を何処へ定めるべきかがはっきりとせず、研究計画の修正に多くの時間を要した。時間が掛かった要因には、就職活動や博士論文の執筆などのライフイベントに時間が取られたことも考えられる。

今後は、研究期間内に得られた成果を論文としてまとめ、主要国際会議もしくは学術雑誌への掲載を目指すことが重要な責務であると考えている。

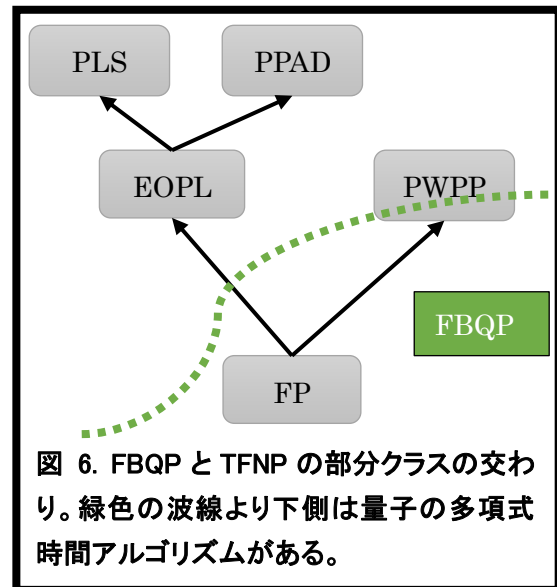


図 6. FBQP と TFNP の部分クラスの交わり。緑色の波線より下側は量子の多項式時間アルゴリズムがある。

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数: 件

1.	
2.	
3.	

(2) 特許出願

研究期間全出願件数: 件(特許公開前のものは件数にのみ含む)

1	発 明 者	
	発 明 の 名 称	
	出 願 人	
	出 願 日	
	出 願 番 号	
	概 要	

(3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

【プレプリント】

- 1. Takashi Ishizuka. “Revisiting MA vs. $\exists$ -BPP: A Functional Analogue,” Jxiv 2023.
- 2. Takashi Ishizuka. “Corrigendum: PLS is contained in PLC,” arXiv 2023.
- 3. Takashi Ishizuka. “Graphical One-sided Matching with Exchange Costs,” arXiv 2023.

【学会・研究集会講演】

- 1. 石塚天「PLS is contained in PLC」『2023 年度 冬の LA シンポジウム』2024 年 2 月、京都。
- 2. 石塚天「TFNP とその周辺」『第 5 回数理・情報系研究集会@広島大学』2023 年 11 月、広島
- 3. 石塚天「TFNP とその周辺」『第4回数理・情報系研究集会@京都大学』2023 年 6 月、京都

【和文サーベイ】

- 1. 石塚天「不動点定理と計算量理論」『第 18 回数学若手総合研究集会』