

研究終了報告書

「順序制約付き極大部分集合列挙の基盤技術開発」

研究期間: 2021 年 10 月～2024 年 3 月

研究者: 栗田和宏

1. 研究のねらい

本研究では列挙問題が持つ「解の個数による計算時間の増加」を解決する方法を模索した。列挙問題は解を全て出力する必要がある以上、解の個数より短い時間でアルゴリズムは終了できない。さらに列挙問題の解の個数は一般に指数的に大きくなるため、いかなるアルゴリズムでも莫大な計算時間がかかる。そこで本研究では目的関数付きの列挙問題を考え、上位解のみを列挙することで解の個数による莫大な計算時間を削減するための基盤技術開発を行う。

2. 研究成果

(1) 概要

本研究では組合せ最適化分野で古典的な対象であるマッチングや二つのマトロイドの共通独立集合が要素数の大きい順に極大部分集合が効率よく列挙できることを明らかにした。さらに、これらの知見の応用として、人工知能分野で興味が持たれている多様な部分集合の発見に対し、これらの知見が応用できることを明らかにした。それ以外にも、木深度というグラフパラメータの厳密計算に重要な部分問題である極小セパレータの列挙が計算困難であることも明らかにすることで、既存の高速実装の改善が容易ではない根拠の一つを示した。

(2) 詳細

ACT-X 期間中ではマッチングや二つのマトロイドの共通独立集合に対する極大部分集合を大きな順に列挙する効率良いアルゴリズムを与えた。これらの構造は組合せ最適化分野で古典的に研究されている離散構造であり、古くから要素数最大化や重み和の最大化が多項式時間で計算可能であることが知られている。これらの最適化アルゴリズムで、要素数最大化を達成する方針は共通である。まずは「増加路」と呼ばれる構造を発見し、その構造に沿って要素の追加と削除を行う。これにより今持っているマッチングや共通独立集合といった構造より要素数の一つ大きな構造が得られる。これを繰り返すことで要素数最大化が可能となる。ACT-X で得られた結果ではこの増加路に着目して列挙アルゴリズムを構築した。最適化アルゴリズムの観点ではこの増加路を一度に全て更新するのが計算量の観点からは望ましいが、列挙の観点からは望ましくない。そこで WG2022 と MFCS2023 の結果では定数サイズの要素の入れ替えにより異なる大きな極大部分集合が生成可能であることを示し、極大部分集合が大きな順に列挙可能であることを示した。

上記は要素数の大きな部分集合列挙を行う理論的に効率良いアルゴリズム自体の研究であったが、本研究ではこのようなアルゴリズムの応用方法についても研究を行った。具体的には要素数制約を一般化した重み制約で大きい順に解が列挙できる場合、max-sum 関数と呼ばれる情報検索分野や人工知能分野で扱われる比較的単純な多様性に対し、この多様性関数を最大化する定数近似アルゴリズムを与えた。

さらに、列挙の可能性だけでなく、列挙の不可能性についても研究を行った。具体的には、極小セパレータに類する列挙問題の計算困難性も示した。この問題は PACE 2020 というコ

ンテストで出題された木深度 (treedepth) を厳密計算するために言うような部分問題であり、この問題を効率よく解ければ木深度の高速な計算に資すると期待される問題だった。その問題に対し、我々の結果はこの問題を効率よく解く列挙アルゴリズム $P = NP$ でない限り存在しないことを示した。これにより、PACE 2020 で投稿されたコードを単純に改善することが容易ではないことがわかった。

3. 今後の展開

本研究では古典的な組合せ最適化問題であるマッチングやマトロイドの共通独立集合は要素数の大きな順に列挙できることがわかった。今後の自然な疑問として、これらの極大部分集合で重み和が大きい順から列挙できるかがある。最適化の意味ではこれらの問題は重みつきでも多項式時間で解けることが知られているが、それを可能とする数理論理構造は大きく異なる。特に最適化分野では線形計画問題の主双対定理が大きな役割を果たすが、この定理は少なくとも私のこれまでの研究において、列挙には利用しづらい性質である。そのため、私はこの問題は列挙が困難であると予想している。今後の研究としてはこれらの予想の証明もしくは反証を行いたい。

4. 自己評価

当初の研究計画通りとはいかない点は多かったが、ACT-X の研究により、自身の疑問を部分的に解決できたと感じる。特に、当初は入力制約問題を中心に研究を進めようと考えていたが、実際に研究を進めるにあたって、増加路が本研究で扱う問題の中心的構造であることに気づくことができた。さらに、局所探索のような技法と今回 ACT-X 中に得られた研究成果は親和性が高いのではないかという次の研究に繋がる知見、さらには AAAI2023 にあるように、今回の結果を用いて人工知能分野の問題への応用も得られたので、ACT-X では良い研究結果が得られたと考えている。

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数: 7件

1. Polynomial-Delay Enumeration of Large Maximal Common Independent Sets in Two Matroids	1.
上記の論文では二部マッチングの一般化であるマトロイド交叉問題に対し、要素数の大きい順に極大な共通独立集合を効率よく列挙できることを明らかにした。提案アルゴリズムでは、マトロイド交叉に対する最適化アルゴリズムに用いられる増加路の存在性が重要である。増加路とはグラフ上の特殊なパスであり、このパスに沿って要素の入れ替えを行うことで要素数の一つ大きな共通独立集合を得ることができる。提案アルゴリズムではこの増加路を列挙にも活用できることを明らかにした。	
2. Polynomial-Delay and Polynomial-Space Enumeration of Large Maximal Matchings.	2.
上記の論文では一般グラフに対し、極大マッチングを要素数の多い順に出力する効率良い列挙アルゴリズムを提案した。この問題は最大マッチング列挙を一般化した問題であるため、最大マッチング発見アルゴリズムの一般化になっている。そのため、最大マッチング発見に重要な構造である増加路が提案アルゴリズムでも重要な役割を果たしている。具体的には増加路に沿ってマッチングを少しずつ変更する操作により、大きい順に解を列挙する。	

3. On the hardness of inclusion-wise minimal separators enumeration	3.
上記の論文では、包含に関して極小なセパレータが $P = NP$ でない限り、出力多項式時間で列挙できないことを明らかにした。この問題はグラフの重要なパラメータである木深度 (treedepth) を計算するための重要な前処理であり、木深度に対する高速な実装を競うコンテストである PACE 2020 でもこの問題の重要性は言及されている。この論文ではこの疑問を否定的に解決した。	

(2)特許出願

研究期間全出願件数： 件(特許公開前のものは件数にのみ含む)

1	発 明 者	
	発 明 の 名 称	
	出 願 人	
	出 願 日	
	出 願 番 号	
	概 要	

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)