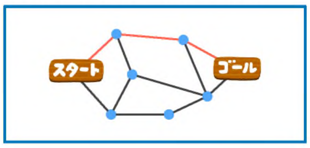
組合せ最適化と線形代数の交点における理論と応用の探求

大城 泰平（東京大学）

～最適化通りと行列通りの交差点に立つ～

組合せ最適化 — 「一番良い選択肢」を探す

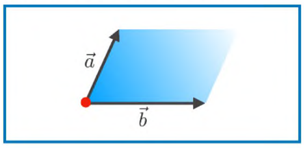
目的地までの最短経路を知りたい



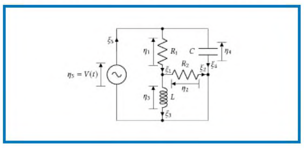
容量の限られた鞄に荷物を積みたい

線形代数 — 「真っ直ぐな空間」を扱う

図形（平行体）の体積を求めたい

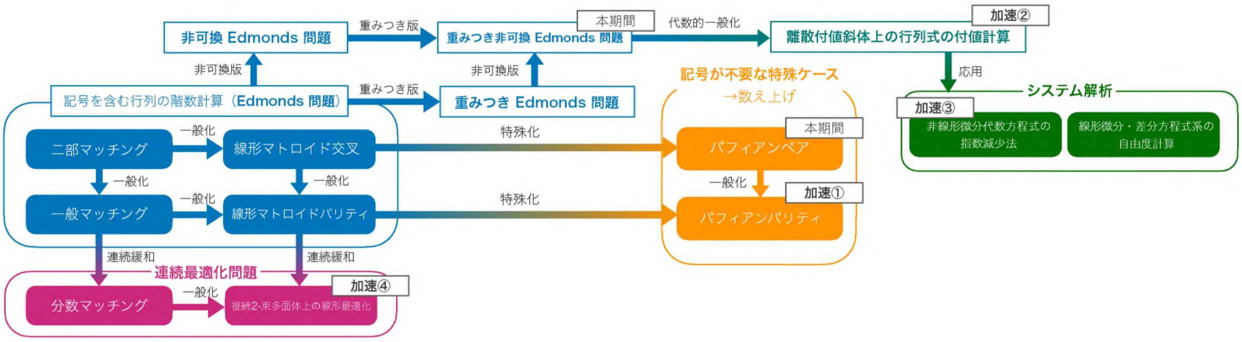


線形回路のシミュレーションを行いたい

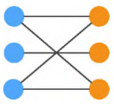


○ 最良の選択肢を効率的に見出だせるか？ ○ 選択肢の数は数えられるか？ ○ 体積を効率的に計算できるか？ ○ 図形が時刻変化する場合は？ ○ 実応用は？

両分野を組合せ，本研究課題で描いた「地図」



Starting Point: Edmonds 問題

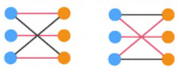


G

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{22} & 0 \\ x_{31} & 0 & x_{33} \end{pmatrix}$$

A の行列式の各項 $\Longleftrightarrow$ G の完全マッチング
（左右の頂点の一対一対応）

$$\det A = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}$$



Edmonds 問題 [Edmonds '67]

Input: 行列 $A_1, \ldots, A_m$
Output: $A = A_1x_1 + \cdots + A_mx_m$ （$x_1, \ldots, x_m$：記号）が正則かどうか

○ 各記号に乱数を代入すれば高い確率で正則性判定ができる
○ 乱数を使わない多項式時間アルゴリズムは未解決

① 行列式を用いた離散構造の効率的数え上げ

変数に値を代入すると，**運が悪くなければ**，正則性が一致する
運が超良ければ，全ての展開項の値が同じになる

特殊な（パフィアンな）二部グラフでは，そのような変数割当を多項式時間で求められる [Kasteleyn '61, Temperley-Fisher '61]

パフィアンペア（本期間） 線形マトロイド交差への一般化 [Webb '04]
○ パフィアンな二部マッチング，全域木の数え上げ（行列木定理）を含む

↓ 一般化

パフィアンパリティ（加速①） 線形マトロイドパリティへの一般化 [Matoya-O. '21]
○ パフィアンな一般マッチングを含む

② 離散付値斜体上の行列式の付値計算

F：斜体（加減乗除が行えるが，積について必ずしも可換でない代数系）

付値 $v\colon F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

○ $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ ○ $v(ab) = v(a) + v(b)$ ○ $v(1) = 0,\ v(0) = +\infty$

成果 分割的離散付値斜体上の行列の行列式の付値を計算する効率的アルゴリズム

応用 線形微分・差分方程式系の自由度計算

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = 0 \\ x(t) + ty(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} D & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

…係数行列は**歪多項式行列**

$Dty(t) = tDy(t) + y(t) = (tD+1)y(t)$ より $Dt = tD + 1$

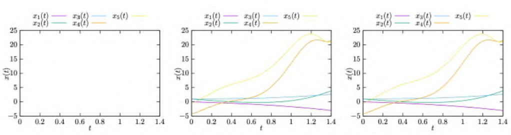
定理 [Taelman '06] 歪多項式行列の行列式の次数 = 微分方程式の解空間の次元

③ 非線形微分代数方程式の指数減少法

微分代数方程式 (DAE) $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$

… 常微分方程式 (ODE) $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t))$ + 代数方程式 $G(t, x(t)) = 0$

成果 数値的に解きにくい DAE を解きやすい DAE に変形する組合せ的手法



(b-i) robotic arm w/o modification　(b-ii) robotic arm w/ substitution method　(b-iii) robotic arm w/ augmentation method

④ 接続2-束多面体上の線形最適化

成果 マトロイドパリティ問題の連続緩和問題をマトロイド交叉問題に帰着