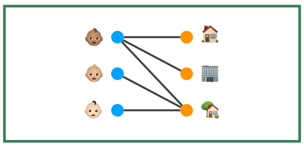
重みつき組合せ最適化と多項式行列理論のインタラクション

大城 泰平（東京大学）

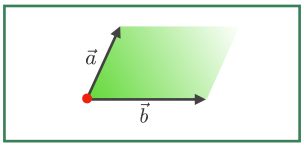
〜多項式で探す、ベストな選択肢〜



組合せ最適化

—「一番良い選択肢」を探す学問

例：どの子供をどの保育園に配属すると
待機児童の数を最小にできるか？

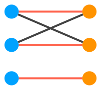


行列（線形代数）

—「真っ直ぐな空間」を扱う学問

例：平面上の与えられた 3 点は
同一直線上に乗っているか？

両学問の “インタラクション”

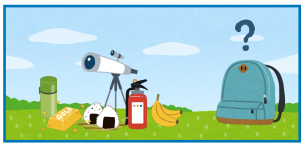


組合せ最適化問題 ⇄ **行列の問題**

線形代数を経由し，組合せ最適化問題を解く

組合せ最適化の道具を活用し，線形代数（行列）の問題を解決する

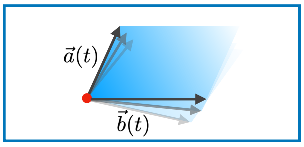
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



重みつき組合せ最適化

— 各選択肢の価値は，一様でない

例：限られた容量のナップサックに
どの荷物を積むと一番うれしいか？

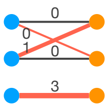


多項式行列

— 時刻とともに変化する空間

例：時刻とともに変化する平面上の 3 点が
同一直線上に乗る瞬間は存在するか？

本研究で創出する “インタラクション”



重みつき組合せ最適化問題 ⇄ **多項式行列の問題**

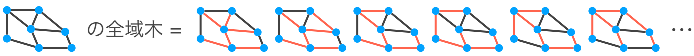
課題① 重みつき行列木定理

課題② 多項式行列式の次数計算

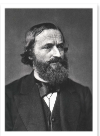
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

異なる学問をつなぎ、広げ、情報科学の地図にあらたな道を引く

課題① 重みつき行列木定理

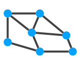


いくつある？



Gustav R. Kirchhoff

行列木定理：グラフの全域木の数は
そのグラフから作られるある行列の
行列式に等しい. [Kirchhoff 1847]



の全域木の数 = $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ の行列式 = 95

行列木定理の数学的本質は？どこまで拡張できるのか？

➡ 行列式の展開項の符号の整合性が鍵.
パフィアンペアまで拡張可能！ [Webb '04]

同じサイズの行列の組 (A_1, A_2) が**パフィアンペア**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A_1[B]$, $A_2[B]$ がともに正則であるすべての列部分集合 B（共通基）
に対し，$\det A_1[B] \det A_2[B]$ が一定値

- 共通基を一つ求める問題：線形マトロイド交叉問題 [Edmonds '68, '70]
- 全域木の他，平面二部グラフのマッチングもパフィアンペアとなる
- パフィアンペアの共通基は行列式計算で効率的に数え上げ可能

研究成果

各列が重みをもっている**パフィアンペア**に対し
最小重み共通基の数を数え上げる効率的アルゴリズム

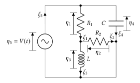
— 重みつき線形マトロイド交叉の多項式行列による定式化を活用

課題② 多変数多項式の次数計算

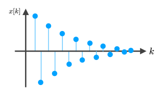
重みつき Edmonds 問題

$\deg \mathrm{Det} \begin{pmatrix} x_1 s & 0 \\ x_2 & s^2 \end{pmatrix} = ?$

線形微分方程式



線形差分方程式



歪多項式 [Ore 1933]

普通の多項式 $p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_l s^l$

当然 $as = sa$（可換）

歪多項式 $p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_l s^l$

$$sa = \sigma(a)s + \delta(a)$$

一次の項　定数項（おまけ）

線形微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = 0 \\ x(t) + ty(t) = 0 \end{cases}$$

D：微分演算子

$$\begin{pmatrix} D & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

歪多項式行列

定理 [Taelman '06]

歪多項式行列の行列式の次数 = 微分方程式の解空間の次元

研究成果

歪多項式行列の行列式（Dieudonné 行列式）の
次数計算を定数行列の階数計算に帰着する手法

— 背後にある「離散凸性」を活用