

# オンライン劣モジュラ最適化に対する効率的かつ汎用的なアルゴリズムの開発

相馬 輔

東京大学 情報理工学系研究科 助教

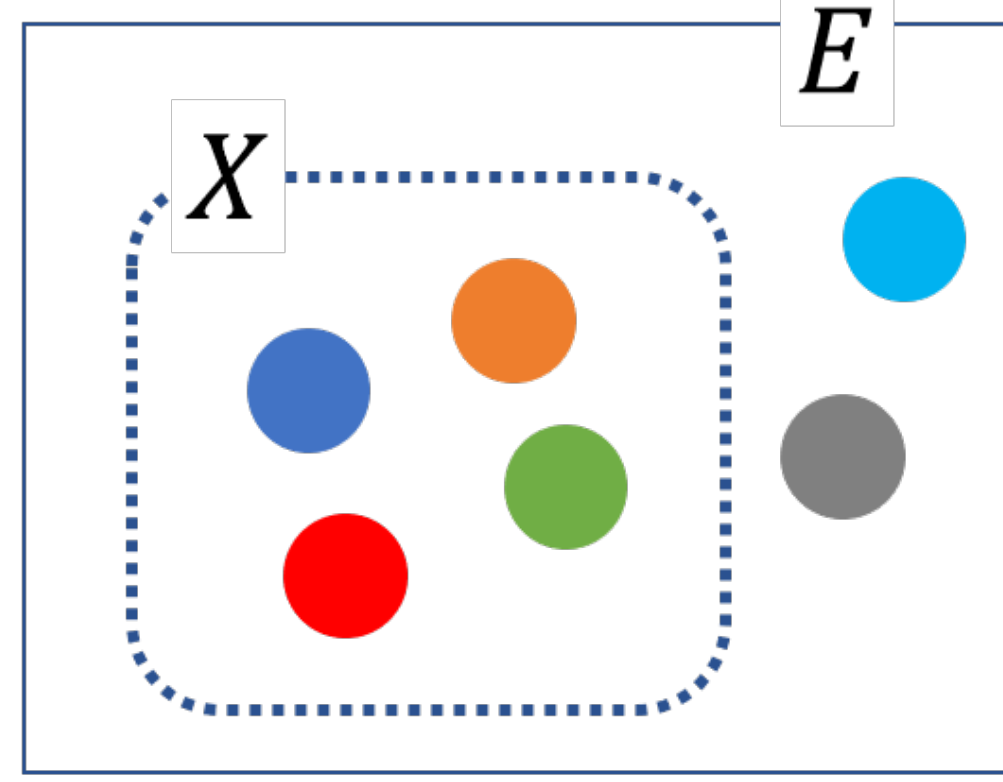
## 劣モジュラ最適化

組合せ最適化の強力な枠組み

$$\text{maximize } f(X) \text{ subject to } X \in C$$

劣モジュラ関数

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y)$$



組合せに対して値が決まる (e.g., 値段, 情報量, 効用)

- **広いモデリング能力** (“限界効用逓減性”)
- **理論保証**のある**効率的**なアルゴリズム
- 近年, 機械学習で大きく注目(NIPS, ICML, AAIなど) トップ会議でチュートリアル講演

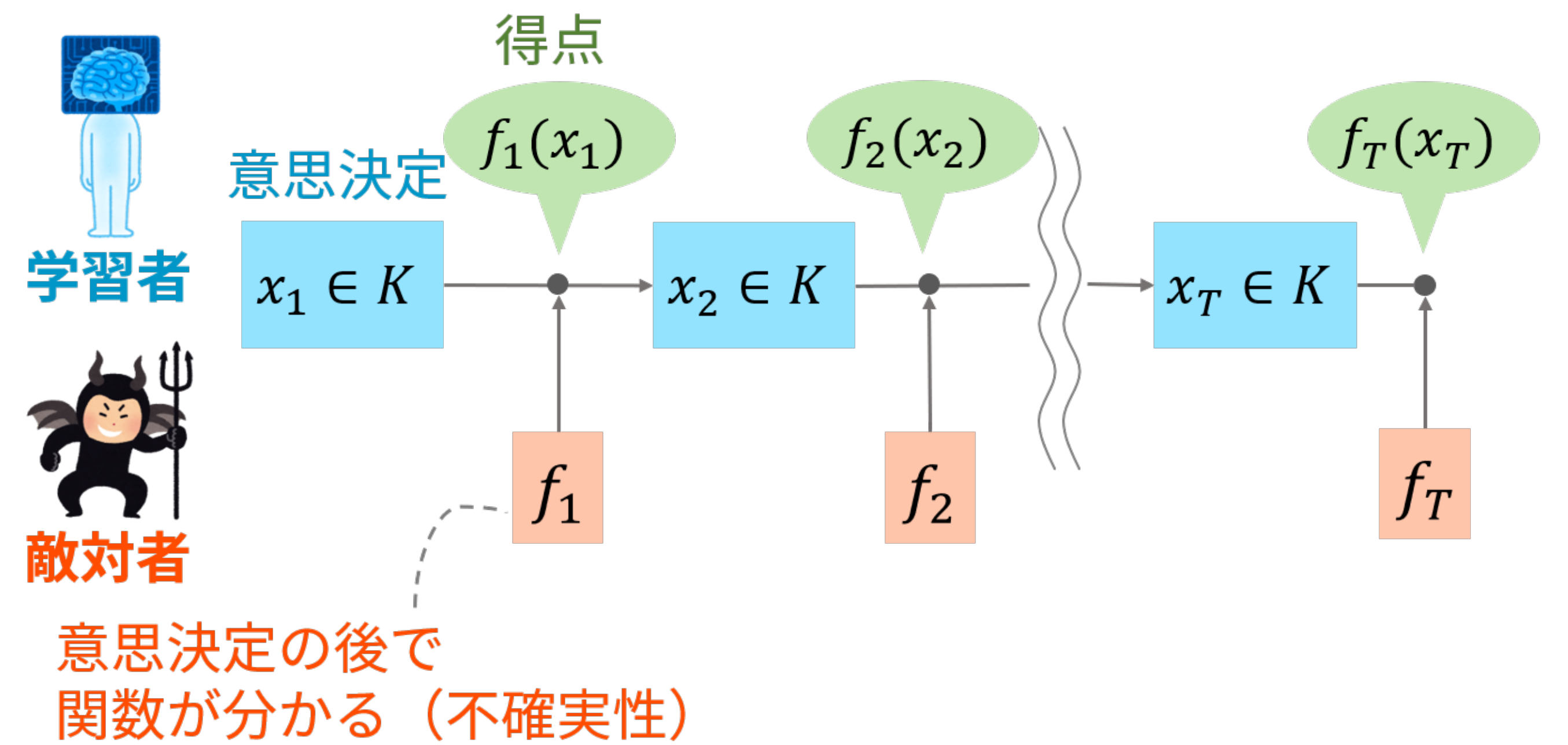
既存の劣モジュラ最適化の弱点

最適化問題に**不確実性**がある状況を想定していない



## オンライン最適化

不確実性を考慮した連続最適化の枠組み



劣モジュラ最適化に適用した研究は少ない

### 研究目標

オンライン最適化を取り入れて

「**不確実性を考慮した劣モジュラ最適化**」を確立する

より広い状況に対応できる理論保証つき最適化手法を提供

## 成果1: オンラインk劣モジュラ最大化に対するアルゴリズム

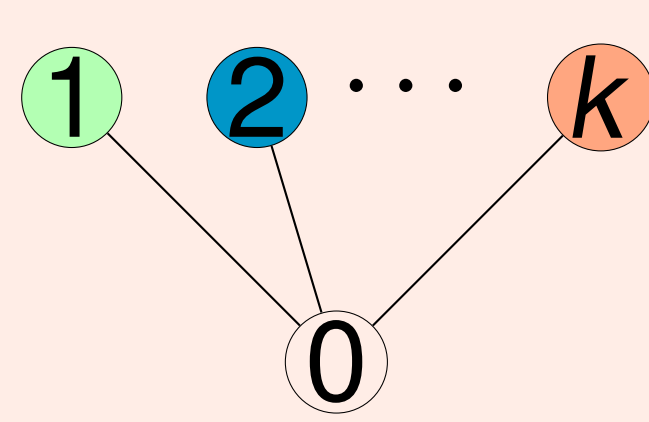
AISTATS 2019

k劣モジュラ関数 ... 劣モジュラ関数の拡張

$$f(x) + f(y) \geq f(x \sqcup y) + f(x \sqcap y) \quad (\forall x, y \in \{0, 1, \dots, k\}^n)$$

$$a \sqcup b = \begin{cases} 0 & (a \neq b \text{ かつ } a, b \neq 0) \\ \max\{a, b\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$a \sqcap b = \begin{cases} 0 & (a \neq b \text{ かつ } a, b \neq 0) \\ \min\{a, b\} & \text{o.w.} \end{cases}$$



### 研究成果

	オフライン	オンライン
k = 1 (劣モジュラ)	1/2近似 [Buchbinder et al. 2015]	1/2-regret $O(n\sqrt{T})$ [Roughgarden and Wang 2018]
k = 2 (双劣モジュラ)	1/2近似 [Singh, Guillory, and Bilmes 2012]	1/2-regret $O(n\sqrt{T})$
一般の k	1/2近似 [Iwata, Tanigawa, and Yoshida 2016]	1/2-regret $O(nk\sqrt{T})$

$$\text{regret}_{1/2}(f_1, \dots, f_T) = \frac{1}{2} \max_x \sum_{t=1}^T f_t(x) - \sum_{t=1}^T f_t(x_t)$$

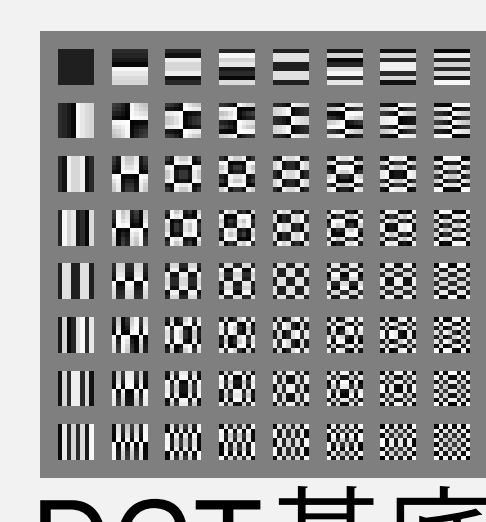
### 応用

- k種類の(オンライン)センサー配置問題
- k種類の観測があるときの(オンライン)情報量最大化

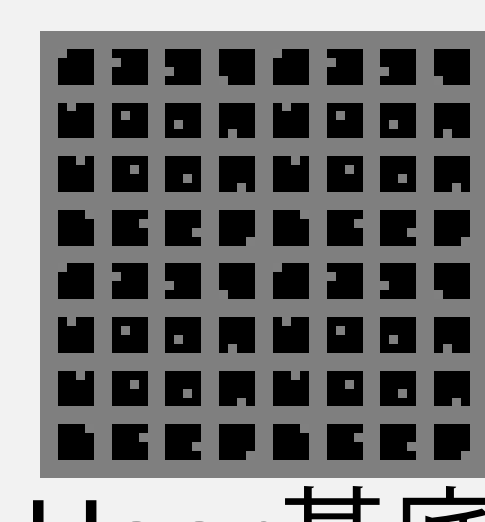
## 成果2: 辞書選択に対する高速な貪欲アルゴリズム (with 藤井) NeurIPS 2018 spotlight

### 辞書選択 (dictionary selection)

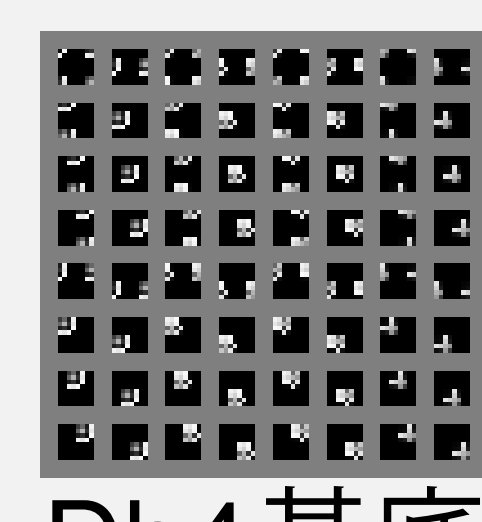
既存の辞書の和集合 V



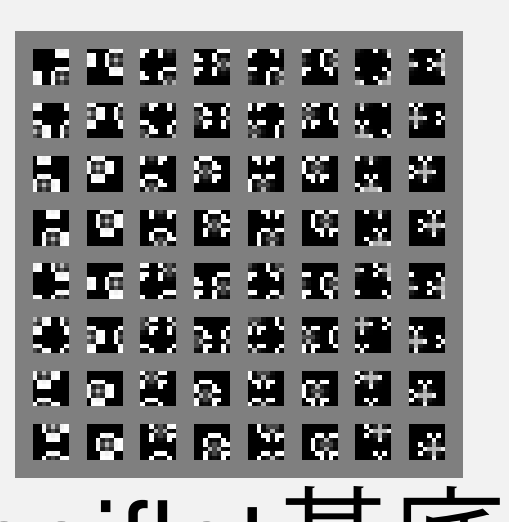
DCT基底



Haar基底



Db4基底



coiflet基底

選択された辞書  $X \subseteq V$  s.t.  $|X| \leq k$



パッチ  $y_t$  を辞書の**疎結合**で表現

$$y_t \approx w_1 \cdot \text{DCT} + w_2 \cdot \text{Haar} + w_3 \cdot \text{Db4} + \dots$$

### 組合せ最適化問題として

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{t=1}^T \max_{w_t: \|w_t\|_0 \leq s} [\|y_t\|_2^2 - \|y_t - A_X w_t\|_2^2] \\ &\text{subject to} && |X| \leq k \end{aligned}$$

### 研究成果

- 辞書学習に匹敵する**良質な辞書**を**高速**に出力する**アルゴリズム**を提案
- **オンライン設定**や**複雑な疎性制約**へと拡張