グラフでの詰め込み問題における
マトロイド性の限界の追究

山口 勇太郎
(大阪大学)

キャッチフレーズ「欲張りがベストな世界の境界線」

1. 組合せ最適化

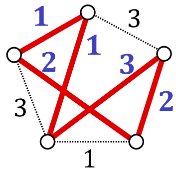
入力 集合, グラフ (ネットワーク), etc.

問 **条件を満たす組合せ構造 (実行可能解)** のうち
ある指標 (目的関数) に関して最良のものを求めよ

例 単位時間ジョブスケジュール

案件	利益	〆切
A	20	5月
B	15	5月
C	10	7月
D	7	6月
E	3	7月

巡回セールスマン



最短ハミルトン閉路 (全点巡回経路)

実行可能解 (候補) の数が**爆発的に増える** (**組合せ爆発**)

例 n個の要素の取捨選択 → 2^n通り
n頂点グラフのハミルトン閉路候補 → $n!$ 通り

入力データの大きさに関する**多項式時間**で解けるか？

多項式

n	5	10	100
n^2	25	100	10^4
n^3	125	1000	10^6
2^n	32	1024	$\approx 10^{30}$
$n!$	120	3628800	$\approx 10^{158}$

2. マトロイドと貪欲法

入力 E: 有限集合, w_e: 要素 $e \in E$ の価値 ($w_e \in \mathbf{R}_{\geq 0}$)
$\mathcal{F}$: 実行可能解の全体 ($\mathcal{F} \subseteq 2^E = \{X \mid X \subseteq E\}$)

問
$$\text{maximize} \quad w(X) \coloneqq \sum_{e \in X} w_e \qquad (\text{目的関数})$$
$$\text{subject to} \quad X \in \mathcal{F} \qquad (\text{制約条件})$$

貪欲法

1. $X \leftarrow \emptyset$ (空っぽの暫定解から始めて)
2. While $\exists e \in E \setminus X$ s.t. $X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$
(暫定解に足せる要素がある限り)
3. Choose such e with w_e maximum
and $X \leftarrow X \cup \{e\}$
(その中で最大価値のものを足し続け)
4. Return X (何も足せなくなったら暫定解を答えとして出力)

定理 任意の価値 w_e ($e \in E$) の付け方に対し,
貪欲法が上の問に対する最適解を出力する.
$\Leftrightarrow$ $(E, \mathcal{F})$ が**マトロイド**である.

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \implies X \in \mathcal{F}$
- $X, Y \in \mathcal{F}$ and $|X| < |Y|$
$\implies \exists e \in Y \setminus X$ s.t. $X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

E: $a\ b\ c\ d$

$\mathcal{F}$: $\emptyset = \{\}$, $\{a\}$ $\{b\}$, $\{c\}$ $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$

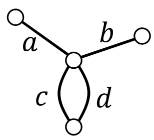
例

コース料理のメニュー選び

前菜: $a, \ldots$
主菜: $b, \ldots$
デザート: $c, d, \ldots$
E

$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid X\text{: 各種1つ以内}\}$

グラフにおける森



E: グラフの辺集合

$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid X\text{: 無閉路}\}$

ベクトルの線形独立性

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}}_{\substack{a \quad b \quad c \quad d \\ E}}$$

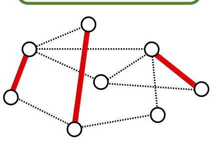
$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid X\text{: 線形独立}\}$

3. グラフでの詰め込み問題とマトロイド

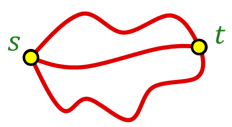
入力 グラフ (ネットワーク) $+\alpha$

問 **条件を満たす部分構造 (実行可能単位解)** を
重ならないようにどれだけ取れるか？

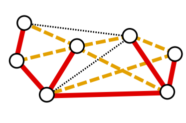
マッチング (点素辺)



内点素 s–t パス



辺素全域木



…

捉えられる限界は？境界線を引けるか？