

## IV 量子測定の理論

シュレディンガー（またはハイゼンベルグ）方程式に基づく標準的な量子論では、物理系の時間発展は決定論的かつ可逆である。既知の初期状態とハミルトニアンが与えられれば、終状態はユニタリー演算子  $\hat{U}$  により唯一に決まる。また、逆ユニタリー演算子  $\hat{U}^{-1}$  により同様に時間発展させれば、必ず初期状態に戻る。これに対し、量子測定のプロセスは非決定論的であり不可逆である。物理系に関する情報が全て分かっていたとしても（この場合、系は純粋状態にあるという）、測定結果は一般にはランダムであり予測できない。このランダムさは、検出器の雑音によるものではなく、物理系が本質的に備えている不確定性に起因する。また、ひとたび測定が完了し結果が読み出されると、もはや初期状態に戻ることはできないし、初期状態が何であったかを知ることもできない。このような量子測定のプロセスはシュレディンガー方程式やハイゼンベルグ方程式では記述できない。この章では、量子測定の理論を紹介する。フォンノイマン（von Neumann）の射影仮説から説き始め、それを有限の誤差を伴う近似測定に拡張する。そして、ここでの目的にもっとも関連のある概念、すなわち線形連続測定と非線形連続測定との違いを説明する。さらに、非線形連続測定の代表例として、連続測定による量子ゼノ（Zeno）効果及び測定フィードバック系における測定結果の履歴依存性（contextuality）について述べる。

### 4.1 厳密測定

一般に量子測定は次の3つの質問に対する答により特徴付けられる。

問1： 測定結果とは何か？

答1： 観測量（observable） $\hat{q}$ と呼ばれる被測定物理量に対応するエルミート演算子の固有値のうちのひとつである。すなわち、 $\hat{q}$ には次のように固有状態 $|q_n\rangle$ と固有値 $q_n$ があり、 $q_n$ が測定結果となる。

$$\hat{q}|q_n\rangle = q_n|q_n\rangle \quad (1)$$

問2： 測定結果が $q_n$ となる確率 $P(q_n)$ は？

答2： 射影演算子 $|q_n\rangle\langle q_n|$ と被測定系の密度演算子 $\hat{\rho}$ により、次のように与えられる。

$$P(q_n) = \text{Tr}(|q_n\rangle\langle q_n| \otimes \hat{\rho}) \quad (2)$$

ここで、 $\text{Tr}$ は対角和（trace）演算子である。

問3： 測定後の状態は？

答3： 上記射影演算子を用いて、次式で与えられる。

$$\hat{\rho}(q_n) = \frac{1}{P(q_n)} |q_n\rangle\langle q_n| \hat{\rho} |q_n\rangle\langle q_n| \quad (3)$$

なお、 $\hat{\rho}(q_n) = |q_n\rangle\langle q_n|$ を測定後の状態ということもあるが、2つ以上の部分系からなる複合系も含めるには上式が一般的である。例えば、ある2部分系 (bipartite) の初期状態が次式であるとする。

$$\hat{\rho} = c_1 |q_1\rangle_A \langle q_1| \otimes |p_1\rangle_B \langle p_1| + c_2 |q_2\rangle_A \langle q_2| \otimes |p_2\rangle_B \langle p_2| \quad (4)$$

このとき、部分系 A の測定結果が  $q_1$  となる確率は  $c_1$  である。そして、部分系 A に対する測定結果が実際に  $q_1$  であると、測定後の状態は次式となる。

$$\hat{\rho}(q_1) = |q_1\rangle_A \langle q_1| \otimes |p_1\rangle_B \langle p_1| \quad (5)$$

以上がフォンノイマンの定式化であるが、これは誤差のない精確な測定についての記述であり、そのような理想的な測定は実際には実現困難であるため、ここでの目的にはあまり有用ではない。次節では、有限の測定誤差を含むようにフォンノイマンの定式化を拡張する。

## 4.2 近似測定

近似測定を記述するために、図1に示すような間接測定モデルを導入する[1]。プローブ系の読み出し観測量  $\hat{P}_p$  を用いてシステム系の観測量  $\hat{Q}_s$  を測定する、というモデルとなっている。まず第1段階として、システム系の観測量  $\hat{Q}_s$  についての情報をプローブ系の観測量  $\hat{P}_p$  に転写するため、システム系とプローブ系に相互作用ハミルトニアンを構築する。これにより、2つの観測量  $\{\hat{Q}_s, \hat{P}_p\}$  間に量子相関を形成することができる。次に第2段階として、システム系とプローブ系の相互作用ハミルトニアンをスイッチオフし、巨視的 (macroscopic) な計測器で観測量  $\hat{P}_p$  を測定する。この第2段階は破壊的な測定であり、測定後のプローブ系の状態は、巨視的計測器からの擾乱のため全く予測不可能である。一方、システム系はプローブ系から切り離されているので、巨視的計測器からの雑音からは守られる。

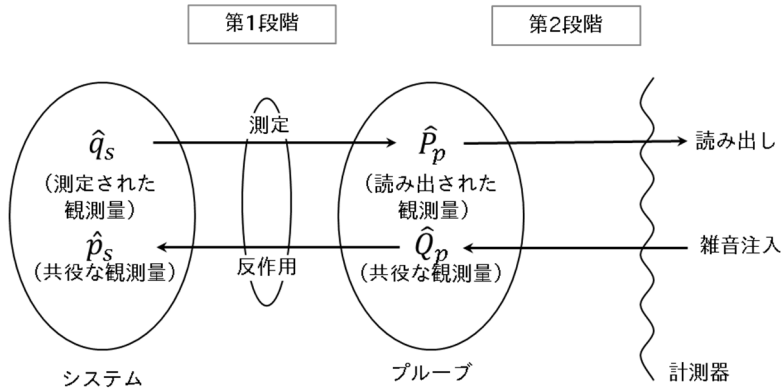


図 1 : 間接測定モデル。

#### 4.2.1 測定誤差と反作用雑音

次式で表されるシステム系のプローブ系の間の単純な相互作用ハミルトニアンを考える。

$$\hat{H}_I = \hbar\chi \hat{q}_s \otimes \hat{Q}_p \quad (6)$$

但し、 $\hat{Q}_p$ は $\hat{P}_p$ の共役観測量である。 $\hat{Q}_p$ と $\hat{P}_p$ の交換関係は次式で定義される。

$$[\hat{Q}_p, \hat{P}_p] = i\hbar \quad (7)$$

同様に、 $\hat{q}_s$ と $\hat{p}_s$ の間には次の交換関係が成り立っている。

$$[\hat{q}_s, \hat{p}_s] = i\hbar \quad (8)$$

$\hat{P}_p$ 及び $\hat{p}_s$ についてのハイゼンベルグの運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \hat{P}_p = \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}_p, \hat{H}_I] = -\chi \hat{q}_s \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_s = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}_s, \hat{H}_I] = -\chi \hat{Q}_p \quad (10)$$

式(9)がここでの目的の方程式、すなわち $\hat{q}_s$ で駆動される $\hat{P}_p$ の時間発展を記述する式、である。上式に従うユニタリー発展により、 $\hat{q}_s$ の情報が $\hat{P}_p$ へ転写される。式(9)は、 $\hat{q}_s$ の時間変化を考えないとすると、容易に時間積分でき、その解は次のように表される。

$$\hat{P}_p(t) - \hat{P}_p(0) = \chi^t \hat{q}_s(0) \quad (11)$$

ここで、推定 (inferred) 観測量  $\hat{q}_{s, \text{obs}}$  を次のように定義する。

$$\hat{q}_{s, \text{obs}} \equiv \frac{\hat{P}_p(t)}{(-\chi^t)} = \hat{q}_s(0) + \frac{\hat{P}_p(0)}{(-\chi^t)} \quad (12)$$

プローブ系を  $\langle \hat{P}_p(0) \rangle = 0$  として用意すると、推定観測量  $\hat{q}_{s, \text{obs}}$  の期待値は、観測量  $\hat{q}_s$  の期待値と同一となる。すなわち、

$$\langle \hat{q}_{s, \text{obs}} \rangle = \langle \hat{q}_s(0) \rangle \quad (13)$$

これを「無バイアス条件 (no bias condition)」と呼ぶ。無バイアス条件  $\langle \hat{P}_p(0) \rangle = 0$  は容易に実現できるにしても、 $\hat{P}_p(0)$  の分散は一般にはゼロではない。 $\hat{q}_s(0)$  と  $\hat{P}_p(0)$  は無相関、すなわち測定前にはシステムとプローブの間には何の情報交換もなされていない、とすると、推定観測量  $\hat{q}_{s, \text{obs}}$  の分散は、次のように、2つの項の和で与えられる。

$$\langle \Delta \hat{q}_{s, \text{obs}}^2 \rangle = \langle \Delta \hat{q}_s(0)^2 \rangle + \frac{\langle \Delta \hat{P}_p(0)^2 \rangle}{(\chi t)^2} \quad (14)$$

第1項は測定以前にシステム系が本来備えている不確定性であり、第2項はプローブ系によってもたらされる外部の不確定性 (測定誤差) である。測定誤差は、分散  $\langle \Delta \hat{P}_p(0)^2 \rangle$  を小さくするかシステム系とプローブ系との結合の強さ  $\chi t$  を大きくすることにより、減ずることができる。

式(10)は、量子測定によりシステム系が被る不可避の擾乱を記述している。この式は、 $\hat{Q}_p$  の時間変化を考えないとすると容易に時間積分でき、次式となる。

$$\hat{p}_s(t) - \hat{p}_s(0) = -\chi t \hat{Q}_p(0) \quad (15)$$

ここでは  $\hat{p}_s(0)$  と  $\hat{Q}_p(0)$  は無相関としているので、共役観測量  $\hat{p}_s(t)$  の分散は、次のように、2つの項の和で与えられる。

$$\langle \Delta \hat{p}_s(t)^2 \rangle = \langle \Delta \hat{p}_s(0)^2 \rangle + (\chi t)^2 \langle \Delta \hat{Q}_p(0)^2 \rangle \quad (16)$$

第1項は測定以前にシステム系が本来備えている不確定性、第2項はプローブ系によってもたらされる外部的な不確定性 (反作用雑音)、である。反作用雑音は、分散  $\langle \Delta \hat{Q}_p(0)^2 \rangle$  または結合強度  $\chi t$  を小さくすることにより、減少させることができる。

プローブ系が最小不確定状態に準備されていれば、すなわち  $\langle \Delta \hat{Q}_p(0)^2 \rangle \langle \Delta \hat{P}_p(0)^2 \rangle = \hbar^2/4$ 、

であると、測定誤差と反作用雑音の積は、次のように最小値をとる。

$$\langle \Delta \hat{q}_{\text{meas,error}} \rangle \langle \Delta \hat{p}_{\text{back action}}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (17)$$

但し、 $\Delta \hat{q}_{\text{meas,error}} = \hat{P}_p(0)/(-\chi t)$ 、 $\Delta \hat{p}_{\text{back action}} = (-\chi t)\hat{Q}_p(0)$ 。ここで、ハイゼンベルグの不確定性原理により、量子測定においては 2 つの制約が課せられることを指摘しておく。ひとつは、システム系を用意する正確さに対する制限である。もうひとつは、システム系とは独立な、測定用のプローブ系を用意する正確さに対する制限である。第 1 章において、量子ニューラルネットワーク (QNN) はこのハイゼンベルグ限界に非常に近い領域で動作することを述べた。そこでは、システム系 (DOPO スクイーズ状態) 及び測定プローブ系 (出力カップラーの空端子から入力される真空状態) とともに、最小不確定波束として用意されている。

#### 4.2.2 測定確率とポスト測定状態

間接的量子測定においては、測定前のシステム系とプローブ系は互いに独立なので、全系の初期状態の密度演算子は次の直積 (product) 状態となっている。

$$\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \quad (18)$$

測定の第 1 段階では、この初期状態に対して相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}_1$  によりユニタリー発展  $\hat{U}$  が作用し、システム系とプローブ系は相互相関 (joint-correlated) 状態となる。

$$\hat{\rho}_f = \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger \quad (19)$$

但し、 $\hat{U} = \exp(\hat{H}_1 t / i\hbar)$ 。そして、相互作用ハミルトニアン  $\hat{H}_1$  がスイッチオフとなった後に、プローブ系は巨視的計測器に結合される。すると測定の第 2 段階として、プローブ密度演算子は「ポインター基底 (pointer basis)  $|P\rangle_p$ 」に対角化される[2]。どのポインター基底に対角化するかは実験家により決められる。量子ニューラルネットワークの系では、巨視的計測器は、高強度の局部発振器 (局発) 光と二乗検出器によって実現される光ホモダイン検出器であり、直交位相振幅がポインター基底として選ばれる。この第 2 段階は  $\hat{P}_p$  の正確な測定となっている。

ここで、実際の測定結果  $P$  に代わり、次式で定義される  $\hat{q}$  の推定値  $\tilde{q}$  を導入する。

$$\tilde{q} = P / (-\chi^t) \quad (20)$$

第 2 段階についてのフォンノイマン射影演算子は  $|\tilde{q}\rangle_p \langle \tilde{q}|$  で与えられる。これを用いると、

測定結果が $\tilde{q}$ となる確率が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
 P(\tilde{q}) &= \text{Tr}_p \left[ | \tilde{q} \rangle_p \langle \tilde{q} | \hat{\rho}_p^{(\text{red})} \right] \\
 &= \text{Tr}_s \text{Tr}_p \left[ | \tilde{q} \rangle_p \langle \tilde{q} | \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger \right] \\
 &= \text{Tr}_s \left[ \hat{X}(\tilde{q}) \hat{\rho}_s \right]
 \end{aligned} \tag{21}$$

但し、 $\hat{\rho}_p^{(\text{red})} = \text{Tr}_s | \tilde{q} \rangle_p \langle \tilde{q} | \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger$ は第1段階のユニタリー発展後のプローブ系の簡約密度演算子、 $\hat{X}(\tilde{q}) = \text{Tr}_p \left[ \hat{U}^\dagger | \tilde{q} \rangle_p \langle \tilde{q} | \hat{U} \hat{\rho}_p \right]$ は一般化された射影演算子、である。 $\hat{X}(\tilde{q})$ は、間接測定で行われる3つの過程、すなわち、どのようなプローブを用意するか ( $\hat{\rho}_p$ )、どうやってシステム系の情報をプローブ系に転写するか ( $\hat{U}$ )、実際の測定結果は何であったか ( $| \tilde{q} \rangle_p \langle \tilde{q} |$ )、を特定している。

ポスト測定状態は、測定結果に対応するプローブ状態 $| \tilde{q} \rangle_p$ を相互相関状態 $\hat{\rho}_f$  (式(19))に射影し、測定確率 $P(\tilde{q})$ で規格化することにより、次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 P_s(\tilde{q}) &= \frac{1}{P(\tilde{q})} {}_p \langle \tilde{q} | \hat{\rho}_f | \tilde{q} \rangle_p \\
 &= \frac{1}{P(\tilde{q})} \hat{M}(\tilde{q}) \hat{\rho}_s \hat{M}(\tilde{q})^\dagger
 \end{aligned} \tag{22}$$

但し、 $\hat{M}(\tilde{q}) = {}_p \langle \tilde{q} | \hat{U} | \psi \rangle_p$ は、プローブ系がユニタリー演算子 $\hat{U}$ を経て初期状態 $| \psi \rangle_p$ から終状態 $| \tilde{q} \rangle_p$ へ変化することを表す演算子振幅であり、間接測定の上記3過程全てを記述している[1]。

$\hat{\rho}_p = | \psi \rangle_p \langle \psi |$  (純粋状態) を、 $\hat{X}(\tilde{q})$ についての上記の表式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\tilde{q}) &= \text{Tr}_p \left[ \hat{U}^\dagger | \tilde{q} \rangle_p \langle \tilde{q} | \hat{U} | \psi \rangle_p \langle \psi | \right] \\
 &= \hat{M}^\dagger(\tilde{q}) \hat{M}(\tilde{q})
 \end{aligned} \tag{23}$$

さらに、恒等演算子 $\hat{I} = \int | q \rangle_s \langle q | dq$ を上式の $\hat{M}^\dagger(\tilde{q})$ と $\hat{M}(\tilde{q})$ の間に挿入すると、次式となる。

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\tilde{q}) &= \int \hat{M}^\dagger(\tilde{q}) | q \rangle_s \langle q | \hat{M}(\tilde{q}) dq \\
 &= \int | q \rangle_s \langle q | \hat{X}(\tilde{q}, q) \langle q | dq
 \end{aligned} \tag{24}$$

但し、

$$\begin{aligned} x(\tilde{q}, q) &= {}_p\langle\psi|\hat{U}^\dagger(q)|\tilde{q}\rangle_p {}_p\langle\tilde{q}|\hat{U}(q)|\psi\rangle_p \\ &= |{}_p\langle\tilde{q}|\hat{U}(q)|\psi\rangle_p|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

これは、システム系が測定前は固有状態 $|q\rangle_s$ であった時に、巨視的計測器の測定結果が $\tilde{q}$ となる条件付き確率である。

一般化された射影演算子 $\hat{X}(\tilde{q})$ は非負の固有値を持つ。すなわち、

$${}_s\langle q|\hat{X}(\tilde{q})|q\rangle_s = x(\tilde{q}, q) \geq 0 \quad (26)$$

従ってこれは正值演算子である。 $\hat{X}(\tilde{q})$ は、次のように、恒等演算子の分割要素 (decomposition) でもある。

$$\begin{aligned} \int \hat{X}(\tilde{q})d\tilde{q} &= \int |q\rangle_s \int_{-\infty}^{\infty} x(\tilde{q}, q)d\tilde{q} {}_s\langle q|dq \\ &= \int |q\rangle_s {}_s\langle q|dq \\ &= \hat{I} \end{aligned} \quad (27)$$

一般に、恒等演算子の分割要素となる正值演算子は、物理的に実現できる量子測定を記述する。これを正值作用素測度 (Positive Operator Valued Measure: POVM) と言う。但し、POVM 測定は数学的な概念であり、与えられた POVM を現実の検出器でどう実現するかは、多くの場合不明である。

### 4.2.3 光ホモダイン検出

測定フィードバック量子ニューラルネットワーク (MF-QNN) で用いられる量子測定装置は、図 2 に示す光ホモダイン検出器である。縮退光パラメトリック発振器 (DOPO) パルスの一部が出力カップラーにより取り出され、50%-50%ビームスプリッタで高強度の局部発振器光パルスと合波される。50%-50%ビームスプリッタからの 2 つの出力光は、それぞれ二乗検波器 (光強度検出器) に入力され、2 つの検出器からの光電流は差動合成される。この構成は平衡 (balanced) ホモダイン検出器と呼ばれ、光カップラーからの出力光電場のひとつの直交振幅成分を厳密に測定することができる。

次に、この検出系全体の測定誤差と反作用雑音を計算する。出力カップラーから取り出される光電場 (先の間接測定モデルのプロープ系に相当) は次式で与えられる。

$$\hat{A}_p(t) = \sqrt{1-T}\hat{A}_s(0)\sqrt{T}\hat{A}_p(0) \quad (28)$$

但し、 $T$ は出力カップラーの強度透過率、 $\hat{A}_s(0)$ は信号入力光演算子、 $\hat{A}_p(0)$ はプローブ入力光演算子、である。式(12)で定義される推定観測量は、今の場合、次のように表される。

$$\hat{A}_{s,\text{obs}} \equiv \frac{\hat{A}_p(t)}{\sqrt{1-T}} = \hat{A}_s(0) + \sqrt{\frac{T}{1-T}}\hat{A}_p(0) \quad (29)$$

または、もっと直接的に

$$\hat{X}_{s,\text{obs}} = \hat{X}_s(0) + \sqrt{\frac{T}{1-T}}\hat{X}_p(0) \quad (30)$$

但し、 $\hat{X}_i = 1/2(\hat{A}_i + \hat{A}_i^\dagger)$  ( $i = s, p$ )は同位相振幅演算子。プローブ入力光は真空状態あるいは真空スクイーズ状態なので、次のように、「無バイアス条件」が成り立っている。

$$\langle \hat{X}_{s,\text{obs}} \rangle = \langle \hat{X}_s(0) \rangle \quad (31)$$

推定観測量の全分散は、次のように、信号入力光の本来の不確定性とプローブ光の不確定性（測定誤差）から成る。

$$\langle \Delta \hat{X}_{s,\text{obs}}^2 \rangle = \langle \Delta \hat{X}_s(0)^2 \rangle + \left( \frac{T}{1-T} \right) \langle \Delta \hat{X}_p(0)^2 \rangle \quad (32)$$

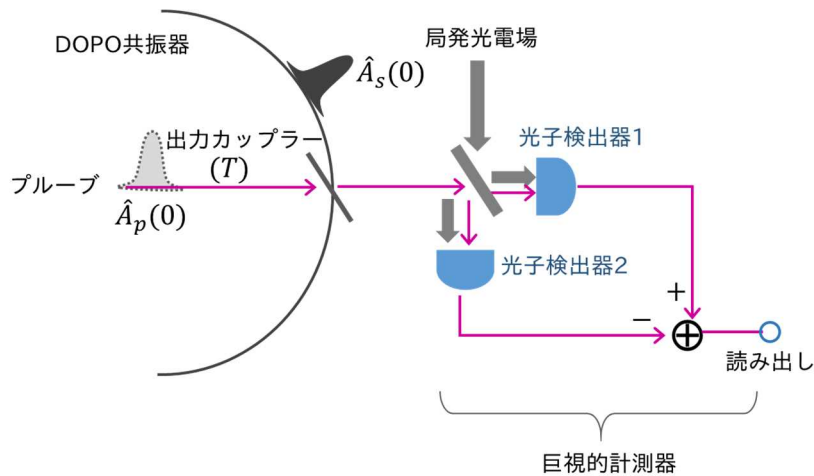


図2：平衡光ホモダイン検出器。



一方、出力カップラー直後の共振器内信号光電場は次式で与えられる。

$$\hat{A}_s(t) = \sqrt{T}\hat{A}_s(0) - \sqrt{1-T}\hat{A}_p(0) \quad (33)$$

ここで、カップラーによる信号光の損失は、利得  $G = 1/T$  の無雑音位相感応増幅器で補償されるものとする。すると、測定・増幅後の信号光電場の直交位相振幅は、次式となる。

$$\hat{P}_s(t) = \hat{P}_s(0) - \sqrt{\frac{1-T}{T}}\hat{P}_p(0) \quad (34)$$

但し、 $\hat{P}_i = (\hat{A}_i - \hat{A}_i^\dagger)/2i$  ( $i = s, p$ ) は直交位相振幅演算子。これより、共役観測量  $\hat{P}_s(t)$  の分散は、次のように、元々の不確定さと測定の反作用雑音の和となる。

$$\langle \Delta \hat{P}_s(t)^2 \rangle = \langle \Delta \hat{P}_s(0)^2 \rangle + \left( \frac{1-T}{T} \right) \langle \Delta \hat{P}_p(0)^2 \rangle \quad (35)$$

入力プローブ状態は、 $\langle \Delta \hat{X}_p(0)^2 \rangle \langle \Delta \hat{P}_p(0)^2 \rangle = 1/16$  である最小不確定性状態なので、測定誤差、 $T/(1-T) \langle \Delta \hat{X}_p(0)^2 \rangle$ 、と測定反作用雑音、 $(1-T)/T \langle \Delta \hat{X}_p(0)^2 \rangle$ 、の積は最小不確定積を満たしている。この意味で、光ホモダイン検出は理想的な間接量子測定となっている。

### 4.3 連続測定

ここまでは、ある時刻に行なわれる離散的な測定についてみてきた。そこでは、システム系とプローブ系が特定の初期状態として用意され、両者の相互作用ハミルトニアンをスイッチオンして相互相関状態を形成し、最後に巨視的計測器によりプローブが破壊的かつ正確に測定された。しかしながら実際の物理的な測定では、しばしばこれとは異なる状況に直面する。例えば、図3に示すように、未知の外力  $F(t)$  が量子システムの被測定観測量  $\hat{x}_s(t)$  に結合することがある。この場合、未知の外力の存在だけでなくその時間波形  $F(t)$  をも検出するために、プローブ系の読み出し観測量  $\hat{X}_p(t)$  を用いて  $\hat{x}_s(t)$  を連続的にモニターしたい。このような連続測定においては、2種類の反作用雑音が現れる。それは、揺らぎ的な反作用雑音と動的な反作用雑音である。揺らぎ的な反作用雑音は、被測定観測量の不確定性  $\langle \Delta x_s^2 \rangle$  に課せられるランダムで予測不可能な擾乱である。一方、動的な反作用雑音は、被測定観測量の期待値  $\langle \hat{x}_s(t) \rangle$  の時間変化に起こる規則的で予測可能な変動である。両者が独立であれば、動的な反作用雑音は原理的には除外することができる。そのような測定を「線形連続測定」と呼ぶ。一方、上記2つの反作用雑音が分離不可能であると、動的な反作用雑音は避けることができない。このような測定を「非線形連続測定」と呼ぶ。この2つの測定に違いについては4.5節で述べる。

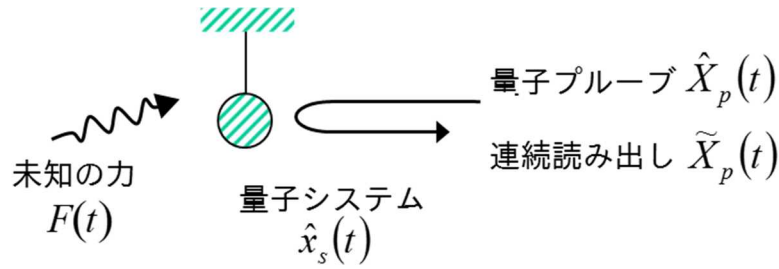


図3：連続量子測定モデル。

$\hat{x}_s(t)$ に対して時間 $\tau$ の間に行われる $n$ 回の連続測定を考える。この場合、各測定は微小時間 $\theta = \tau/n$ の間に行われることになる。一般に、各測定についての推定観測量 $\hat{x}(t)$ は、次のように表される。

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_s(t) + \Delta\hat{x}_\theta(t) \quad (36)$$

$\Delta\hat{x}_\theta(t)$ は、時間間隔 $\theta$ で行われる各測定に対する、プローブ内部雑音に起因する測定誤差を表す。このような個別の測定が時間 $\tau$ の間に $n$ 回行われた時の全体の測定誤差は、次式で与えられる。

$$\langle \Delta\hat{x}_\tau^2 \rangle = \frac{\langle \Delta\hat{x}_\theta^2 \rangle}{n} = \frac{\langle \Delta\hat{x}_\theta^2 \rangle \theta}{\tau} \xrightarrow{(\theta \rightarrow 0)} \frac{S_x}{\tau} \quad (37)$$

但し、 $S_x = \lim_{(\theta \rightarrow 0)} \langle \Delta\hat{x}_\theta^2 \rangle \theta$ は $\Delta\hat{x}_\theta$ のスペクトル密度。式(37)は、測定雑音は、測定時間 $\tau$ を長くとり（または測定帯域 $B = 1/\tau$ を狭くする）と減少することを示しており、これは一般に馴染みのある結果である。

測定後のシステム系の共役観測量 $\hat{p}_s(t)$ は、次のように表される。

$$\tilde{p}(t) = \hat{p}_s(t) + \Delta\hat{p}_\theta(t) \quad (38)$$

但し、 $\Delta\hat{p}_\theta(t)$ は、時間 $\theta$ で行われる各測定についての、プローブ内部雑音に起因する反作用雑音を表す。プローブ系は各測定で独立に用意されるので、反作用雑音は $n$ 回の繰り返し測定で独立である。従って、 $n$ 回の繰り返し測定の全反作用雑音は次式で与えられる。

$$\langle \Delta\hat{p}_\tau^2 \rangle = \langle \Delta\hat{p}_\theta^2 \rangle n = \frac{\langle \Delta\hat{p}_\theta^2 \rangle \tau}{\theta} \xrightarrow{(\theta \rightarrow 0)} S_p \cdot \tau \quad (39)$$

但し、 $S_p = \lim_{(\theta \rightarrow 0)} \langle \Delta\hat{p}_\theta^2 \rangle \theta$ は $\Delta\hat{p}_\theta$ のスペクトル密度。反作用雑音電力は測定時間 $\tau$ を長くする

(または帯域Bを狭くする)と大きくなる。これも式(37)と同じく妥当な結果と言える。

各測定において最小不確定波束にあるプローブ系を用意すると、上記 2 つのスペクトル密度は、次のように、ハイゼンベルグ限界を満たす。

$$S_x \cdot S_p = \langle \Delta \hat{x}_\theta^2 \rangle \langle \Delta \hat{p}_\theta^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (40)$$

図 4 に、プローブ系でモニターされつつ未知の外力  $F(t)$  で駆動されているシステム系の時間発展を模式的に示す。システム系の初期密度演算子  $\hat{\rho}_{\text{in}}$  は、ユニタリー演算子  $\hat{V}_1 = \exp(\hat{H}_s \tau_1 / i\hbar)$  により時間発展する。ここで、 $\hat{H}_s$  はシステム系と未知の外力の相互作用を記述するハミルトニアンであり、次のように表される。

$$\hat{H}_s = \frac{\hat{p}_s^2}{2m} + \frac{1}{2} k \hat{x}_s^2 - \hat{x}_s F(t) \quad (41)$$

ユニタリー発展後の状態は次式で与えられる。

$$\hat{\rho}_1 = \hat{V}_1 \hat{\rho}_{\text{in}} \hat{V}_1^\dagger \quad (42)$$

量子測定における 3 つの過程、すなわち、プローブの用意、システム系からプローブ系への情報転送、そしてプローブ座標の読み出し、は、演算子振幅  $\hat{M}(\tilde{q}_s) = {}_p \langle \tilde{q} | \hat{U} | \psi_1 \rangle_p$  で記述される。すると、測定後の状態は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_1 &= \frac{1}{P(\tilde{q}_1)} \hat{M}(\tilde{q}_1) \hat{\rho}_1 \hat{M}(\tilde{q}_1)^\dagger \\ &= \frac{1}{P(\tilde{q}_1)} \hat{M}(\tilde{q}_1) \hat{V}_1 \hat{\rho}_{\text{in}} \hat{V}_1^\dagger \hat{M}(\tilde{q}_1)^\dagger \end{aligned} \quad (43)$$

上記過程が  $n$  回繰り返されると、最終の密度演算子は次式となる[1]。

$$\hat{\rho}'_n = \frac{1}{P(\tilde{q}_1)P(\tilde{q}_2) \cdots P(\tilde{q}_n)} \hat{Y}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) \hat{\rho}_{\text{in}} \hat{Y}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)^\dagger \quad (44)$$

但し、

$$\hat{Y}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) = \hat{M}(\tilde{q}_n) \hat{V}_n \cdots \hat{M}(\tilde{q}_1) \hat{V}_1 \quad (45)$$

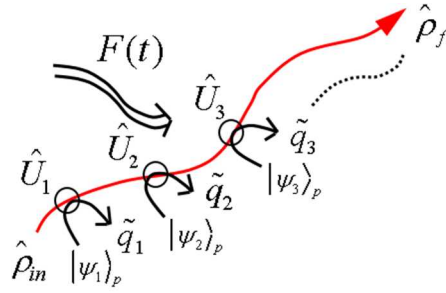


図 4：連続測定モデル。

式(44)は、測定フィードバック量子ニューラルネットワークの動作を記述するための鍵となる式である。ここでは、未知の外力の結合に相当するものとして、パラメトリック増幅、2光子吸収、線形損失、フィードバック信号光注入などが、登場する（詳しくは次章にて）。

#### 4.4 非参照測定

図 5 に示されているように、測定結果に関わらず、システム系の集合全体の動特性を知りたい場合、有用な密度演算子は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_s^{(\text{red})} &= \sum_{\tilde{q}} P(\tilde{q}) \hat{\rho}_s(\tilde{q}) \\
 &= \sum_{\tilde{q}} {}_p \langle \tilde{q} | \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger | \tilde{q} \rangle_p \\
 &= \text{Tr}_p(\hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger)
 \end{aligned} \tag{46}$$

$P(\tilde{q})$ は結果が $\tilde{q}$ となる確率、 $\hat{\rho}_s(\tilde{q})$ は測定結果が $\tilde{q}$ であった時のポスト測定状態、である。式(46)は、非参照測定は単純な散逸過程と等価であるという、期待通りの結果を示している。プローブが純粋状態 $|\psi\rangle_p$ として用意されると、密度演算子の時間発展は、次のように表わされる。

$$\hat{\rho}_s^{(\text{red})} = \sum_{\tilde{q}} \hat{M}(\tilde{q}) \hat{\rho}_s \hat{M}(\tilde{q})^\dagger \tag{47}$$

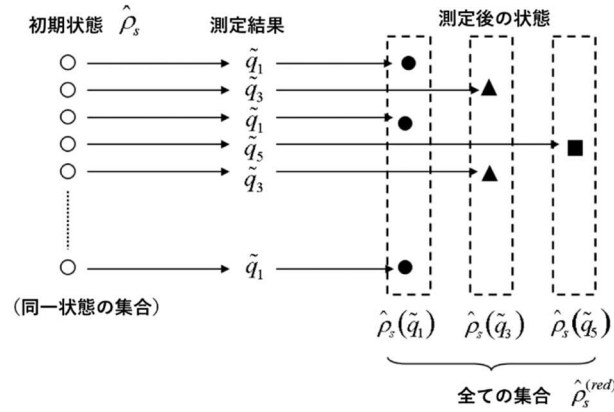


図 5 : 非参照測定。

連続的ではあるが非参照測定されているシステム系の時間発展について考える。微小時間内の全ハミルトニアンは次式で与えられるとする。

$$\hat{H}_T = \hat{H}_j - \hat{q}_s \otimes \hat{Q}_p \quad (48)$$

但し、 $\hat{H}_j$ は時間間隔  $j$  におけるシステム系の自由ハミルトニアン、 $\hat{q}_s$ と $\hat{Q}_p$ はそれぞれシステム系の被測定観測量及びプローブ系の読み出し観測量の共役観測量 (図 1 参照)、である。微小時間間隔  $\theta$  のユニタリー発展演算子は、近似的に次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \hat{U}_j &= \exp\left(\frac{\hat{H}_T}{i\hbar} \theta\right) \\ &\simeq 1 + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{H}_T - \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \hat{H}_T^2 \end{aligned} \quad (49)$$

時刻  $j+1$  におけるシステム系の密度演算子  $\hat{\rho}_{j+1}$  は、時刻  $j$  における密度演算子  $\hat{\rho}_j$  と次のように関係付けられる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{j+1} &= \text{Tr}_p \left[ \hat{U}_j |\psi_j\rangle_p \hat{\rho}_j \langle \psi_j| \hat{U}_j^\dagger \right] \\ &\simeq \text{Tr}_p \left\{ |\psi_j\rangle_p \hat{\rho}_j \langle \psi_j| + \frac{\theta}{i\hbar} [\hat{H}_T, |\psi_j\rangle_p \hat{\rho}_j \langle \psi_j|] - \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \left[ \hat{H}_T, [\hat{H}_T, |\psi_j\rangle_p \hat{\rho}_j \langle \psi_j|] \right] \right\} \\ &= \rho_j + \frac{\theta}{i\hbar} [\hat{H}_j - \hat{q}_s \langle \hat{Q}_p \rangle, \hat{\rho}_j] \\ &\quad - \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \left\{ [\hat{H}_j, [\hat{H}_j, \hat{\rho}_j]] + \langle \hat{Q}_p \rangle \left[ [\hat{H}_j, [\hat{q}_s, \hat{\rho}_j]] + [\hat{q}_s, [\hat{H}_j, \hat{q}_s]] + \langle \hat{Q}_p^2 \rangle [\hat{q}_s, [\hat{q}_s, \hat{\rho}_j]] \right] \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

ここで、一般性を失わずに、プローブの初期状態を $\langle \hat{Q}_p \rangle = 0$ とすることができる。すると、システム系の密度演算子の時間発展が次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\hat{\rho}_{j+1} - \hat{\rho}_j}{\theta} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{\sigma_F^2}{2\hbar^2} [\hat{q}_s, [\hat{q}_s, \hat{\rho}_j]] \quad (51)$$

$\sigma_F^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \langle \hat{Q}_p^2 \rangle$ は反作用雑音の強さを表しており、これは式(39)で定義されるスペクトル密度 $S_p$ と等価である。第5章では、式(51)を用いて、MF-QNNにおいて2つの重要な散逸過程である線形損失と非線形2光子吸収を記述する。

#### 4.5 非線形連続測定

線形連続測定とは、非常に弱い測定限界についての理論的概念(近似)である。そこでは、測定誤差が非常に大きいため、システム系の自由発展が測定には影響されない。一般には、システム系の自由発展は連続測定に多かれ少なかれ影響され、場合によっては、初期状態に完全に凍結されて、標準的なユニタリ発展が連続測定により抑えられる。本節では、そのような非線形連続測定の2つの例について論じる。

##### 4.5.1 量子ゼノ効果

図6に示すような、単一の二準位原子と単一モード共振器から成る単純な量子光学系を考える。ここでは、パウリのスピン演算子を導入し、次式に示す1励起状態に限って二準位原子と単一モード場の複合物理系を記述する。

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= |e\rangle_a |0\rangle_f \\ |\downarrow\rangle &= |g\rangle_a |1\rangle_f \end{aligned} \quad (52)$$

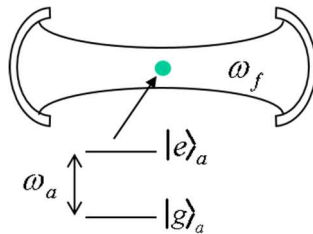


図6：単一モード共振器内中の単一の二準位原子。

このような物理系における原子と光電場との相互作用ハミルトニアンは、次式で与えられる。

$$\hat{H}_I = -\hbar g \hat{\sigma}_x \quad (53)$$

$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  はパウリ演算子である。この相互作用ハミルトニアンにより生成されるユニタリ演算子は、

$$\hat{U} = \cos(gt) \hat{I} + i \sin(gt) \hat{\sigma}_x \quad (54)$$

但し、 $\hat{I}$  は恒等演算子。初期状態が

$$|\psi(0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} |\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} |\downarrow\rangle \quad (55)$$

であると、終状態  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle$  が  $|\downarrow\rangle$  状態となる確率は次式となる。

$$\begin{aligned} P(\downarrow) &= \langle \psi(t) | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \psi(t) \rangle \\ &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(gt) + \frac{1}{2} \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(2gt) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [1 \mp \cos(\Omega t)] : \theta = 0 \text{ または } \pi \\ \frac{1}{2} : \theta = \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \phi = 0 \text{ または } \pi \\ \frac{1}{2} [1 \pm \cos(\Omega t)] : \theta = \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \phi = \frac{\pi}{2} \text{ または } -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (56) \end{aligned}$$

但し、 $\Omega = 2g$  は真空ラビ (Rabi) 周波数。任意の初期状態に対する上記真空ラビ振動の一般解は、図 7 のようになる。初期状態  $|\psi(0)\rangle$  と確率  $P(\downarrow)$  の時間発展は、 $\varphi$  と  $(\pi - \varphi)$  に対する 2 つの縮退以外は、一対一対応している。

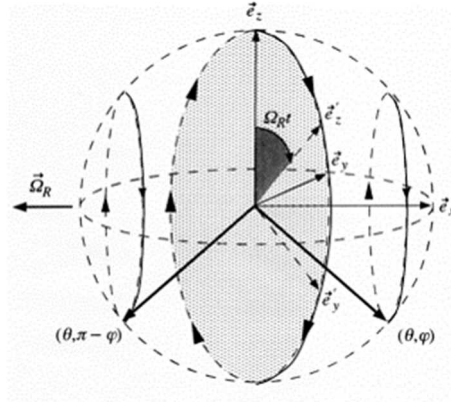


図7：単一原子と単一モード共振器が結合した系の任意の初期状態に対する真空ラビ振動[3]。

ここで、実効的なスピン ( $|\uparrow\rangle$  または  $|\downarrow\rangle$ ) が外部から連続的にモニターされているとする。このような場合、密度演算子の集団平均は式(51)に従う。測定される観測量  $\hat{q}_s$  は  $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  であり、揺らぎのある反作用雑音はパラメータ  $\tau_0 = (\hbar/\sigma_F)^2$  で表される。 $\hat{\rho} = 1/2 (\hat{I} + \rho_x \hat{\sigma}_x + \rho_y \hat{\sigma}_y + \rho_z \hat{\sigma}_z)$  を式(51)に代入し、交換関係  $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\hat{\sigma}_k$  ( $i, j, k = x, y, z$ ) を用いると、次のいわゆるブロッホ (Block) 方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \rho_x = \frac{2}{\tau_0} \rho_x \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_y = \Omega \rho_z - \frac{2}{\tau_0} \rho_y \quad (58)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_z = -\Omega \rho_y \quad (59)$$

測定の効果はパラメータ  $\tau_0$  で表されている。

初期状態  $\{\rho_z(0) = 1, \rho_x(0) = \rho_y(0) = 0\}$  に対する式(57) - (59)の解は次式で与えられる。

$$\rho_z(t) = \begin{cases} \left[ \cos(\Omega' t) + \frac{1}{\Omega' \tau_0} \sin(\Omega' t) \right] e^{-\frac{t}{\tau_0}} & : \Omega \tau_0 > 1 \\ \frac{1}{\tau' - \tau''} \left( \tau' e^{-\frac{t}{\tau'}} - \tau'' e^{-\frac{t}{\tau''}} \right) & : 0 < \Omega \tau_0 < 1 \\ 1 & : \Omega \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (60)$$



但し、

$$\begin{aligned}\Omega' &= \sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{\tau_0^2}} \\ \frac{1}{\tau'} &= \frac{1}{\tau_0} - \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \Omega^2} \\ \frac{1}{\tau''} &= \frac{1}{\tau_0} + \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \Omega^2}\end{aligned}\tag{61}$$

測定されないか、または反作用雑音が無い ( $\tau_0 \rightarrow \infty$ ) 場合、被測定系は通常の真空ラビ振動に従って時間発展する。しかしながら、たとえ非常に弱い測定 ( $\Omega\tau_0 > 1$ ) がなされたとしても、真空ラビ振動は寿命時間 $\tau_0$ で減衰する。そのような弱い測定であっても非線形測定となっており、動的反作用雑音と揺らぎ的反作用雑音は分離できない。強い測定 ( $0 < \Omega\tau_0 < 1$ ) の場合には、振動的挙動は完全に抑圧され、 $\rho_z(t)$ は定常状態値  $\rho_z(\infty) = 1/2$  に向かって単調に減衰する。最後に、厳密測定 ( $\Omega\tau_0 = 0$ ) の場合には、システム系は初期状態に凍結される ( $\rho_z(0) = 1$ )。これが量子ゼノ効果[4]であり、量子系の際立った特性のひとつである。

なお上記の理論予測は、確率的シュレディンガー波動関数法 (量子モンテカルロシミュレーション) に基づく数値シミュレーションにより確認されている[3]。図 8 に、(a)強い測定 (b)弱い測定の場合に $|\downarrow\rangle$ 状態である (光子数の) 集団平均値を示す。集団平均光子数の時間変化は、式(60)とよく一致している。しかしながら、1つの系の測定値履歴をプロットしてみると、弱い測定の場合、図 8(c)に示されるように、ゼロを中心に完全にランダムに散らばっている。一方、強い測定では、図 8(d)に示されるように、ランダムな量子ジャンプ様の軌跡となる。

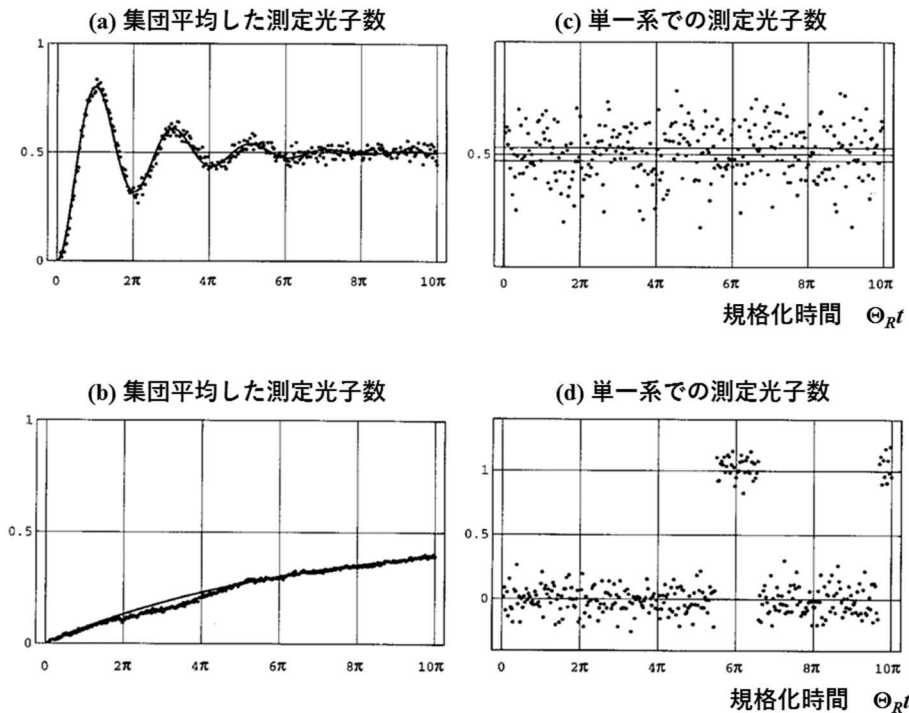


図 8：連続的にモニターされている真空ラビ振動についての数値シミュレーション結果[3]。(a) 弱い測定時の集団平均の軌跡、(b) 強い測定時の集団平均の軌跡、(c) 弱い測定時の単一の軌跡、(d) 強い測定時の単一の軌跡[3]。

#### 4.5.2 測定フィードバック QNN

図 2 に示す測定フィードバック QNN で使われる光ホモダイン検出について再考する。そこでは、測定前の内部 DOPO パルスは、 $\hat{x}$ の量子雑音が増強され $\hat{p}$ の量子雑音が抑圧された真空スクイズ状態となっている。ホモダイン検出のために出力カップラーから取り出される出力光電場と DOPO 共振器内に留まる透過光電場との間には、出力カップラーの空端子(open port)から混入する真空場はあるものの、量子力学的な相関が存在する。従って、ホモダイン検出後の透過光の状態は、取り出された出力光の測定結果によって変化する。この状況は、近似測定と部分的な波束の収縮に関するひとつの事例を提供する。その様子を反強磁性結合する 2DOPO パルスの場合について図 9(a)(b)に図示する。光ホモダイン測定後の状態はその中心位置が測定値方向にシフトするとともに分散が小さくなっている。この測定結果が、2 番目の DOPO パルスへ反強磁性結合 ( $J_{ij} < 0$ ) として注入されるフィードバック信号生成に用いられると、図 9(b)に示されるように、2 番目 DOPO 状態の中心位置が 1 番目 DOPO 状態の中心位置とは反対方向へシフトする。すなわち、波動関数の中心位置に関する限り、1 回の測定フィードバック過程により 2 つの DOPO パルス間に反強磁性秩序が形成されている。

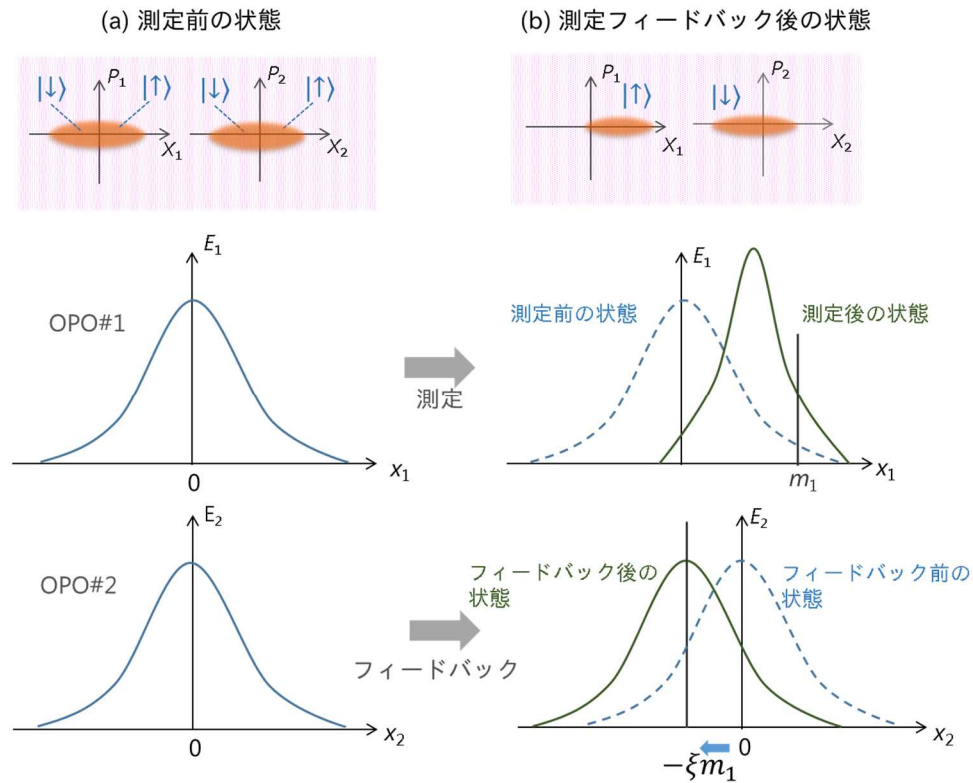


図9：測定フィードバック QNN における非線形連続測定（反強磁性結合する 2DOPO パルスの場合）。

上記の反強磁性結合した 2つの DOPO パルスについても、やはり 2つの動作領域、すなわち線形連続測定と非線形連続測定、が定義できる。光ホモダイン測定の強さが非常に弱い（あるいは測定誤差が非常に大きい）設定で、DOPO 励起率をしきい値の下から上へゆっくり上げていくと、実装される反強磁性結合（系の秩序形成力）が雑音（熱浴の揺動力）に比べて非常に弱いため、2つの DOPO パルスは 2つの振動状態 ( $|\uparrow\rangle$  または  $|\downarrow\rangle$ ) の一方をランダムに選択する。従って、励起率をしきい値より十分高い終状態では、25%の確率で、 $\{|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\}$  の 4 状態のうちのひとつが終状態となる。線形連続測定は、この QNN にとって明らかに望ましくない極限となっている。一方、測定の強さが強いと、系の秩序形成力が熱浴の揺動力に勝り、しきい値に達する前に 2つの中心位置  $\langle x_1 \rangle$  と  $\langle x_2 \rangle$  の間に負の相関が成り立ち、励起率をしきい値より十分高い終状態では  $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$  または  $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ 、すなわちハミルトニアン基底状態、のいずれかが実現される。非線形連続測定はこの QNN にとって望ましい極限となっている。

#### 4.6 量子測定における履歴依存性 (contextuality)

一般に量子系は測定される観測量に対して決まった値を前もっては備えていない、ということは、広く受け入れられている量子力学の教理である。あるいは、測定されるシステム

系と測定する装置の協働作用により、「可能性のある」測定結果が「実際の」測定結果に姿を変える、と言ってもよい。量子力学は、個別の測定結果については答える術を持たず、多数の同一な測定の集団平均（あるいは統計的な）性質についてのみ正しく科学的な答を与える。この量子力学の教理では、未測定の見測量は現実には存在していない、という世界観を受け入れることを要求しているようにみえる。しかしながら、そう遠くない過去には、量子力学に対してより我々の直感に近いレベルでの記述をなす試みが盛んになされた。その代表的なものは、各物理系の見測量は予め実在する値を持っており、それが測定により姿を現わすのであって、測定前は単に我々には隠されているだけだ、というものである。このような量子力学の解釈を構築する試みは、隠れた変数（hidden variable）理論として知られている[5]。

隠れた変数理論が量子論と矛盾することを2つの基本定理として定式化したのは、ジョン・ベル（John Bell）である。1964年に提示された第1の定理[6]では、隠れた変数理論は、特殊な量子状態、いわゆる量子もつれ状態を想定すると破られることが示された。一方、1966年に提示され[7]、今日ではBell-Kochen-Specker理論として知られている第2の定理[8]では、そのような特殊な状態を用意しなくても、隠れた変数理論は破綻することが示された。第1の定理[6]では、局所性の仮定が重要な役割を担っており、そのため、隠れた変数理論と量子論との矛盾を示すためには、もつれた状態の持つ非局所量子相関が必要不可欠であった。一方、第2の定理[7,8]では、過去の履歴依存しない性質（non-contextuality）の仮定が同じように重要な役割を担っており、そのため、同時に測定される見測量グループを特定することが極めて重要となっている。

ここで、履歴依存性（contextuality）の考え方を説明する。隠れた変数理論では、見測量 $\hat{A}$ の測定結果は、 $\hat{A}$ が自身と可換な見測量 $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ , ……と同時に測定される場合と、 $\hat{A}$ が他の可換な見測量 $\hat{L}$ ,  $\hat{M}$ , ……と同時に測定される場合では、両者について同じである、と結論付けている。一方、量子論は、この2つの測定結果は異なると予測している。従って、測定される見測量の値は予め実在しているという隠れた変数理論は、測定前に用意される状態に関わらず、また測定結果の統計的性質を調べるまでもなく、否定される。

量子測定における履歴依存性か古典測定における非履歴依存性かの選択は、次に述べる大義を持たない政治家の態度に関する例え話から、素朴に理解される。政治家が、彼/彼女の選挙区に新たに原子力発電所を建設することを支持するか否かを尋ねられたとする。その答はその直前に聞かれた質問によって異なるであろう。例えば、過去に起こった深刻な原子力事故や安全性を確保するための費用について質問された後であれば、彼/彼女の答は否定的なものになるだろう。一方、エネルギー源の分配バランスや地球温暖化問題について聞かれた後であれば、彼/彼女の答えは肯定的な答になるであろう。哲学の世界ではこれを「履歴依存性（contextuality）」と呼んでおり、古典系には相当するものがない、量子系特有の性質となっている。

量子測定における履歴依存性の具体的な例として、2つの独立なスピン-1/2粒子（4次元）系について考える。パウリ演算子で表される見測量は、次の交換関係及び反交換関係を

満たしている。

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j - \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad (i, j, k = x, y, z) \quad (62)$$

$$\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 2\delta_{ij} \hat{I} \quad (63)$$

ここで、図 10 に示されている 9 つの観測量のセットを考える。すると、以下の議論により、これらの観測量に対して予め実在する値を割り当てることは不可能であることが直ちに分かる。

1. 各列及び各行の 3 つの観測量は可換なので、これら 3 つの量を互いに干渉することなく同時測定することが可能である。このことは、上の 2 行及び左から 2 つ目までの列では、明らかに成り立つ。一番下の行及び左から 3 番目の列についても、反交換関係 (式(63)) により、やはり可換性は成り立っている。
2. 左から 3 つ目の列の 3 つの観測量の積は $-1$  (式(63)より) となるが、一方、他の 2 つの列及び 3 つある全ての行にある 3 つの観測の積は $+1$ である。
3. 従って、3 回の行に対する測定結果では全 9 つの値の積が $+1$ とならなければならないのに対し、3 回の列に対する測定結果では全 9 つの値の積が $-1$ である必要がある。この事実を隠れた変数理論で説明することは出来ない。

以上は、Bell-Kochen-Specker 定理の最も簡単な説明である[9]。この説明では、2 つのスピンの $1/2$ 粒子を特殊な状態に用意する必要はない。

$\hat{\sigma}_x^{(1)}$	$\hat{\sigma}_x^{(2)}$	$\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)}$
$\hat{\sigma}_y^{(2)}$	$\hat{\sigma}_y^{(1)}$	$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)}$
$\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)}$	$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)}$	$\hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)}$

図 10 : 量子測定における履歴依存性の証明に用いられる 9 個の観測量の組[9]。

次に、図 11 に示すような、3 つの独立なスピン $1/2$ 粒子 (8 次元) 系における 10 個の観測量の組について考える。ここでも、以下の議論により、これらの観測量に対して予めはっきりと実在する値を割り振ることができないことが直ちに分かる。

1. 星状の 5 つの線上にそれぞれある 4 つの観測量は可換なので、互いに干渉することなく同時測定することが可能である。このことは、水平な線以外では自明である。水平線については、反交換関係 (式(63)) を 2 回使うと、該当する観測量の 6 つの対が確かに可換であることが確かめられる。
2. 水平な線以外の 4 つの線それぞれにある 4 つの観測量の積は、+1 である。一方、水平線上にある 4 つの観測量の積は -1 である。
3. 従って、5 つの線上に沿った測定では測定値の積は -1 となるはずである。しかしながら、全 5 つの線上にわたる測定結果の積には同じ観測量が 2 回現れるので、積は +1 でなければならない。すなわち、隠れた変数理論を用いて、この事実を説明することは出来ない。

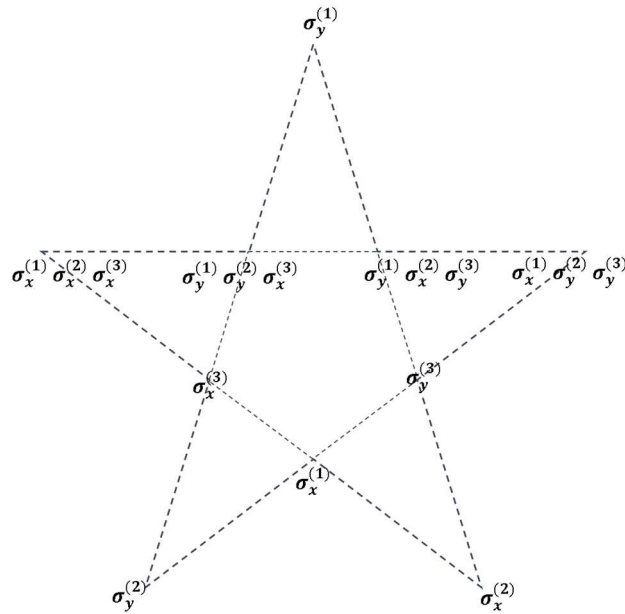


図 11 : 量子測定における履歴依存性の証明に用いられる 10 個の観測量の組[9]。

以上の議論から明らかなように、Bell-Kochen-Specker 定理[7, 8]では、隠れた変数理論の破綻を示すのに、特定の量子状態の特殊な性質を必要としない。従って、この定理は、散逸の大きい量子系に存在し得る任意の混合状態にも適用できる。一方、ベルの定理[6]では、閉じた (あるいはデコヒーレンスの無い) 量子系でのみ生き残ることができる高い忠実度 (fidelity) で非局在化した相関状態 (量子もつれ状態) を用意することが必要である。この点において、BKS 定理はベル定理とは際立って異なっている。要するに、BKS 定理は、任意の観測量に対する非履歴依存性による値の割り振りを禁じた、と言える。

上記の 2 つの思考実験は、量子測定特有の性質を明らかにしている。例えば、図 10 にお

いて、3番目の行の左から1つ目と2つ目の観測量の測定結果が同じ値の場合、すなわちどちらも+1または-1の場合、3番目の行の左から3つ目の観測量の測定結果は必ず-1となる。一方、1つ目と2つ目の観測量の測定結果が逆の値の場合、すなわち(+1,-1)または(-1,+1)の場合、3つ目の観測量の測定結果は必ず+1となる。この事実から、量子測定においては、現在の測定結果(3つ目の観測量の結果)は過去の測定結果(1つ目と2つ目の観測量の結果)に依存する、とすることができる。次に、図10の測定順序を変えて考えてみる。まず最初に第3行の左から3つ目の観測量を測定し、続けて2つ目の観測量、最後に1つ目の観測量を測定するものとする。この場合にも、前述の結論はやはり成り立つ。従って、現在の測定結果(3つ目の観測量の結果)は未来の測定結果(1つ目と2つ目の観測量の結果)に依存する、とすることができる。

量子測定は、まさに決められない政治家の態度のように、過去や未来の履歴に依存して結果が変わる。次章では、測定フィードバック量子ニューラルネットワークにおける意思決定の振舞いが履歴依存性を持つことが明らかにされる。そこでは、現時点のDOPO状態、 $|↑\rangle$ または $|↓\rangle$ 、が過去または未来の測定結果に依存している。

#### 4.7 まとめ

第4章のいくつかの重要な結論を以下にまとめる。

1. 厳密な量子測定はフォンノイマン (von Neumann) のレシピ (式(1)-(3)) で完全に記述される。
2. 有限の誤差を伴う近似量子測定は、間接測定モデル (式(21)(22)) で完全に記述される。
3. 連続測定されている量子系の時間発展は式(44)に支配される。一方、非参照測定されている場合 (または単純な散逸) は、式(51)で記述される。
4. 連続量子測定においては、揺らぎ的な反作用雑音と動的な反作用雑音は分離できない。量子ゼノ効果及びMF-QNNはそのような非線形連続測定の例である。
5. 量子測定は履歴依存性を持つ (contextuality)。すなわち、現在の測定結果は過去の測定結果に依存するし、未来の測定結果にも依存する。

---

[1] V. B. Braginsky and F. L. Y. Khalili, Quantum Measurement (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[2] W. Zurek, Phys. Rev. D24,1516 (1981)

[3] O. Alter and Y. Yamamoto, Quantum Measurement of a Single System (Wiley, New York, 2001).

- [4] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. 18, 756 (1977).
- [5] D. Bohm, Phys. Rev. 85, 166 (1952)
- [6] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964).
- [7] J. S. Bell, Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1966).
- [8] S. Kochen and E. P. Specker, J. Math. Mech. 17, 59 (1967).
- [9] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. 65, 803 (1993).

英文執筆：山本 喜久

和訳：井上 恭

Version 1