

III 光遅延線結合量子ニューラルネットワークの理論

この章では、光遅延線結合を用いた縮退光パラメトリック発振器 (DOPO) ネットワークの量子論について述べる。この装置は、まずスタンフォード大学で $N = 4$ ビットマシンが、その後国立情報学研究所 (NII) 及び NTT で $N = 16$ 、 $N = 10,000$ ビットマシンのデモンストレーション実験が行われたものである [1-3]。理論解析には、(厳密な) 正 $P(\alpha, \beta)$ 表示 [4] あるいは (近似的な) 短縮ウィグナー (truncated Wigner) 表示 [5] により導かれる、2 つのタイプの c 数確率微分方程式 (c -number stochastic differential equation: CSDE) が用いられる。また、計算途中の DOPO において形成される量子雑音相関を評価する指標として、量子エンタングルメント (quantum entanglement) と量子ディスコード (quantum discord) を導入する。

3.1 標準的な量子論アプローチ

図1(a)に、本章で考察する2つの結合DOPOからなる単純化した量子ニューラルネットワークモデルを図示する。この系は、2つのDOPO共振器とそれを相互結合する注入経路で構成されている。まず、コヒーレントなポンプ光電場 ϵ_p が両DOPO共振器に入力され、共振器内のポンプモードを励振する。ここで、DOPO内のポンプ光及び信号光のボゾン消滅/生成演算子をそれぞれ、 $(\hat{a}_{pj}, \hat{a}_{pj}^\dagger)$ 及び $(\hat{a}_{sj}, \hat{a}_{sj}^\dagger)$ と表す (添え字 $j (=1, 2)$ はDOPOの番号)。また、 $(\hat{a}_c, \hat{a}_c^\dagger)$ は相互注入経路の信号光モードの消滅/生成演算子である。図1(b)には、ビームスプリッタを介した、DOPO共振器内の電場と注入経路の電場の結合の様子を示している。ここでは、注入経路の電場は2つのDOPO共振器内の電場とそれぞれ離れた地点で結合するため、その間の伝搬位相を $\exp(ik_c z)$ として取り込んでいる (z : 相互注入経路長、 k_c : 信号光の波数)。 $\exp(ik_c z) = \exp(-ik_c z) = 1$ であると相互結合は同相 (強磁性)、 $\exp(ik_c z) = \exp(-ik_c z) = -1$ であると相互結合は逆相 (反強磁性)、となる。

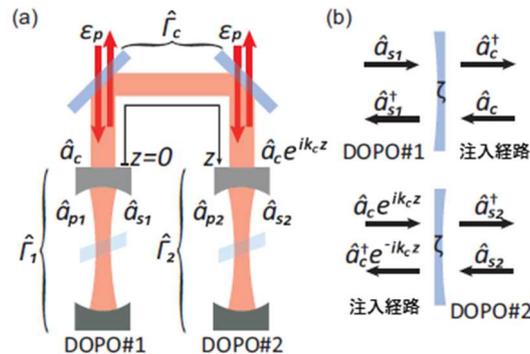


図1: (色線) 光遅延線結合QNNの単純化モデル。(a) 2つのDOPOとそれを相互注入する経路からなる共振器構成。相互注入経路上の2つの誘電体ミラーは、ポンプ光を完全に透過し、信号光を高い反射率で反射する。(b) ビームスプリッタにおけるDOPOの内部信号光と注入経路モードとの相互作用。注入経路モードの伝搬位相が考慮されている [4]。

このような物理系の全ハミルトニアンは、次のように表される。

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{free}} + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_{\text{pump}} + \hat{H}_{\text{res}} + \hat{H}_{\text{BS}} \quad (1)$$

上式において、 \hat{H}_{free} は関与する全モードの自由ハミルトニアンであり、次式で表される。

$$\hat{H}_{\text{free}} = \sum_{j=1}^2 (\hbar\omega_p \hat{a}_{pj}^\dagger \hat{a}_{pj} + \hbar\omega_s \hat{a}_{sj}^\dagger \hat{a}_{sj}) + \hbar\omega_c \hat{a}_c^\dagger \hat{a}_c \quad (2)$$

\hat{H}_{int} は相互作用ハミルトニアンであり、

$$\hat{H}_{\text{int}} = i\hbar \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\kappa}{2} (\hat{a}_{sj}^{\dagger 2} \hat{a}_{pj} - \hat{a}_{pj}^\dagger \hat{a}_{sj}^2) \right] \quad (3)$$

但し、 κ はパラメトリック結合係数（第2章参照）。 \hat{H}_{pump} はポンプ光のハミルトニアンであり、

$$\hat{H}_{\text{pump}} = i\hbar \sum_{j=1}^2 [\varepsilon_p \hat{a}_{pj}^\dagger \exp(-i\omega_d t) - \varepsilon_p \hat{a}_{pj} \exp(i\omega_d t)] \quad (4)$$

但し、 ε_p は外部ポンプ光電場の振幅（正実数）、 ω_d はその角周波数。入力ビームスプリッタの透過率は ε_p に取り込んである。なお、 ε_p を正実数とすることは、この物理系の位相基準をポンプ光電場とすることに対応する。 \hat{H}_{res} は{信号、ポンプ、注入経路モード}と熱浴との結合ハミルトニアンであり、次のように表される。

$$\hat{H}_{\text{res}} = \hbar \sum_{j=1}^2 (\hat{a}_{sj} \hat{\Gamma}_{Rsj}^\dagger + \hat{\Gamma}_{Rsj} \hat{a}_{sj}^\dagger + \hat{a}_{pj} \hat{\Gamma}_{Rpj} + \hat{\Gamma}_{Rpj} \hat{a}_{pj}^\dagger) + (\hat{a}_c \hat{\Gamma}_{Rc}^\dagger + \hat{\Gamma}_{Rc} \hat{a}_c^\dagger) \quad (5)$$

但し、 $\hat{\Gamma}_{Rsj}$ 、 $\hat{\Gamma}_{Rpj}$ 、 $\hat{\Gamma}_{Rc}$ はそれぞれ、DOPO信号光モード、ポンプ光モード、注入経路モードに対する熱浴演算子である。熱浴演算子は、周波数軸上で連続的な白色スペクトルを有しており、それぞれのモードをフェルミの黄金則（Fermi's golden rule）に従って減衰させる。但し簡単のため、式(5)では周波数モードの表記は省略した。式(1)最終項の \hat{H}_{BS} は、注入経路モードとDOPO共振器内部の信号光モードとのビームスプリッタ相互作用ハミルトニアンであり、次のように表される。

$$\hat{H}_{BS} = i\hbar\zeta(\hat{a}_c\hat{a}_{s1}^\dagger - \hat{a}_c^\dagger\hat{a}_{s1} + \hat{a}_{s2}\hat{a}_c^\dagger e^{-ikcz} - \hat{a}_{s2}^\dagger a e^{ikcz}) \quad (6)$$

但し、 ζ はビームスプリッタの結合係数。

標準的な量子光学の手法[6]を用いると、2つの共振器内の信号光電場及びポンプ光電場と注入経路モードから成る全系の密度演算子のマスター方程式が導かれる。但し、密度演算子を全系の直交基底系である光子数固有状態 $|n_{s1}, n_{s2}, n_{p1}, n_{p2}, n_c\rangle$ で展開しようとする、各モードの光子数の上限が1よりはるかに大きいため、密度演算子の次元数が大きくなり過ぎて、時間発展を数値計算するのが大仕事となる。さらにDOPOの数が2個ではなく N 個 ($N \gg 1$) ともなれば、ヒルベルト空間のサイズが指数関数的に増大し、数値解析はほとんど不可能となる。

3.2 正 $P(\alpha, \beta)$ 表示

消滅演算子の固有状態であるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ [7]は、上記のような多様の凝縮した光子からなる系の密度演算子を展開するのに適している。その第一の理由は、信号光、ポンプ光、並びに注入経路モードの初期状態と終状態がほぼコヒーレント状態（真空状態 $|0\rangle$ を含む）であることによる。また第二の理由として、線形な光学的損失によりエネルギーが散逸しても熱浴温度がゼロと見做せる場合にはコヒーレント状態はコヒーレント状態を保ちつつ固有値だけを減衰させる、ことが挙げられる。この条件（熱浴温度ゼロ）はここで考察する光周波数、室温の物理系では満たされている。

ここで、上記5つモードで全系の密度演算子を展開するために、次式で定義される正 P 表示[8]を導入する。

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \beta) \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} d\alpha d\beta \quad (7)$$

この場合、 $\alpha = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \alpha_c)^T$ と $\beta = (\beta_{s1}, \beta_{s2}, \beta_{p1}, \beta_{p2}, \beta_c)^T$ は、10個の変数 (c 数) から成っており、多モードコヒーレント状態は $|\alpha\rangle = |\alpha_{s1}\rangle|\alpha_{s2}\rangle|\alpha_{p1}\rangle|\alpha_{p2}\rangle|\alpha_c\rangle$ 及び $\langle\beta^*| = \langle\beta_c^*|\langle\beta_{p2}^*|\langle\beta_{p1}^*|\langle\beta_{s2}^*|\langle\beta_{s1}^*|$ 、で表される。これらを、密度演算子を展開する基底系とする。正 $P(\alpha, \beta)$ 表示は、正值かつ規格化された擬分布関数である。 α_X と β_X は、その平均値に関しては複素共役関係 ($\langle\alpha_X\rangle = \langle\beta_X\rangle^*$) であるが、数値シミュレーションでは統計的に独立なランダム過程を取る ($X = \{s1, s2, p1, p2, c\}$)。

式(7)をマスター方程式に代入すると、擬分布関数 $P(\alpha, \beta)$ についてのフォッカー・プランク方程式 (Fokker-Planck Equation : FPE) が、次のように得られる[4]。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, \beta) = & \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_{sj}} \left((\gamma_s + i\Delta_s) \alpha_{sj} - \kappa \beta_{sj} \alpha_{pj} \right) \right. \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \beta_{sj}} \left((\gamma_s - i\Delta_s) \beta_{sj} - \kappa \alpha_{sj} \beta_{pj} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_{pj}} \left((\gamma_p + i\Delta_p) \alpha_{pj} - \varepsilon_p + \frac{\kappa^2}{2} \alpha_{sj}^2 \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \beta_{pj}} \left((\gamma_p - i\Delta_p) \beta_{pj} - \varepsilon_p + \frac{\kappa^2}{2} \beta_{sj}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_{pj}^2} \kappa \alpha_{pj} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_{pj}^2} \kappa \beta_{pj} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{sj} \partial \beta_{sj}} \Gamma_{sj} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{pj} \partial \beta_{pj}} \Gamma_{pj} \right) \left. \right] \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_c} (\gamma_c + i\Delta_s) \alpha_c + \frac{\partial}{\partial \beta_c} (\gamma_c + i\Delta_s) \beta_c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_c \partial \beta_c} \Gamma_c \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial \alpha_{s1}} \zeta \alpha_c - \frac{\partial}{\partial \beta_{s1}} \zeta \beta_c + \frac{\partial}{\partial \alpha_{s2}} \zeta \alpha_c e^{i\theta} + \frac{\partial}{\partial \beta_{s2}} \zeta \beta_c e^{-i\theta} \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_c} \zeta (\alpha_{s1} - \alpha_{s2} e^{-i\theta}) + \frac{\partial}{\partial \beta_c} \zeta (\beta_{s1} - \beta_{s2} e^{i\theta}) \right] \left. \right\} P(\alpha, \beta)
\end{aligned} \tag{8}$$

但し、 $\theta = k_{cZ}$ は注入経路の位相シフト。また、 $\Delta_s = \omega_s - \omega_d/2$ 及び $\Delta_p = \omega_p - \omega_d$ は共振器内モードと外部駆動場 ε_p との離調を表す。

FPEとCSDEを関係付ける伊藤のルール[9]を用いると、一連の伊藤型CSDEが式(8)より次のように得られる。

$$d \begin{bmatrix} \alpha_{s1} \\ \beta_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\gamma_s + i\Delta_s) \alpha_{s1} + \kappa \beta_{s1} \alpha_{p1} - \zeta \alpha_c \\ -(\gamma_s - i\Delta_s) \beta_{s1} + \kappa \alpha_{s1} \beta_{p1} - \zeta \beta_c \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \kappa \alpha_{p1} & \Gamma_s \\ \Gamma_s & \kappa \beta_{p1} \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} dW_{\alpha_{s1}}(t) \\ dW_{\beta_{s1}}(t) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$d \begin{bmatrix} \alpha_{s2} \\ \beta_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\gamma_s + i\Delta_s) \alpha_{s2} + \kappa \beta_{s2} \alpha_{p2} + \zeta \alpha_c e^{i\theta} \\ -(\gamma_s - i\Delta_s) \beta_{s2} + \kappa \alpha_{s2} \beta_{p2} + \zeta \beta_c e^{-i\theta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \kappa \alpha_{p2} & \Gamma_s \\ \Gamma_s & \kappa \beta_{p2} \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} dW_{\alpha_{s2}}(t) \\ dW_{\beta_{s2}}(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$d \begin{bmatrix} \alpha_{p1} \\ \beta_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_p - (\gamma_p + i\Delta_p) \alpha_{p1} - \frac{\kappa}{2} \alpha_{s1}^2 \\ \varepsilon_p - (\gamma_p - i\Delta_p) \beta_{p1} - \frac{\kappa}{2} \beta_{s1}^2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_p \\ \Gamma_p & 0 \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} dW_{\alpha_{p1}}(t) \\ dW_{\beta_{p1}}(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$d \begin{bmatrix} \alpha_{p2} \\ \beta_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_p - (\gamma_p + i\Delta_p)\alpha_{p2} - \frac{\kappa}{2}\alpha_{s2}^2 \\ \varepsilon_p - (\gamma_p - i\Delta_p)\beta_{p2} - \frac{\kappa}{2}\beta_{s2}^2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_p \\ \Gamma_p & 0 \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} dW_{\alpha_{p2}}(t) \\ dW_{\beta_{p2}}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$d \begin{bmatrix} \alpha_c \\ \beta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\gamma_c + i\Delta_s)\alpha_c - \zeta\alpha_{s1} + \zeta\alpha_{s2}e^{i\theta} \\ -(\gamma_c - i\Delta_s)\beta_c - \zeta\beta_{s1} + \zeta\beta_{s2}e^{-i\theta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_c \\ \Gamma_c & 0 \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} dW_{\alpha_c}(t) \\ dW_{\beta_c}(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$dW_X(t)$ は、統計的に互いに独立な実数のウィーナー過程 (Wiener increment) を表す。この項は、等価的な (古典) ランジユバン方程式における雑音項 (自己相関がデルタ関数となる) に対応する。なおこの dW_X は、外部熱浴から混入する真空場揺らぎは含んでいない。これは、真空場揺らぎは基底系として用いているコヒーレント状態にすでに取り込まれているためである。

共鳴励起($\Delta_s = \Delta_p = 0$)かつ熱浴温度ゼロ($\Gamma_s = \Gamma_p = \Gamma_c = 0$)の場合、更にポンプ光電場は信号光電場より十分速く緩和する場合には、ポンプ光変数は断熱的に消去することができる。このようにすると、上記CSDEは次のように単純化される[4]。

$$d\alpha_{s1} = \left[-\gamma_s\alpha_{s1} + \frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\alpha_{s1}^2 \right) \beta_{s1} + \zeta\alpha_c \right] dt + \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\alpha_{s1}^2 \right)} dW_{\alpha_{s1}}(t) \quad (14)$$

$$d\beta_{s1} = \left[-\gamma_s\beta_{s1} + \frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\beta_{s1}^2 \right) \alpha_{s1} + \zeta\beta_c \right] dt + \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\beta_{s1}^2 \right)} dW_{\beta_{s1}}(t) \quad (15)$$

$$d\alpha_{s2} = \left[-\gamma_s\alpha_{s2} + \frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\alpha_{s2}^2 \right) \beta_{s2} - \zeta\alpha_c e^{i\theta} \right] dt + \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\alpha_{s2}^2 \right)} dW_{\alpha_{s2}}(t) \quad (16)$$

$$d\beta_{s2} = \left[-\gamma_s\beta_{s2} + \frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\beta_{s2}^2 \right) \alpha_{s2} - \zeta\beta_c e^{-i\theta} \right] dt + \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_p} \left(\varepsilon_p - \frac{\kappa}{2}\beta_{s2}^2 \right)} dW_{\beta_{s2}}(t) \quad (17)$$

$$d\alpha_c = (-\gamma_c\alpha_c - \zeta\alpha_{s1} + \zeta\alpha_{s2}e^{i\theta}) dt \quad (18)$$

$$d\beta_c = (-\gamma_c\beta_c - \zeta\beta_{s1} + \zeta\beta_{s2}e^{-i\theta}) dt \quad (19)$$

さらに、注入経路モードはDOPO共振器内の信号光電場より十分速く緩和する ($\gamma_c \gg \gamma_s$) という極限では、注入経路モードも次のように断熱的に消去することができる。

$$\alpha_c = \frac{1}{\gamma_c} (-\zeta\alpha_{s1} + e^{i\theta}\zeta\alpha_{s2}) \quad (20)$$

$$\beta_c = \frac{1}{\gamma_c} (-\zeta\beta_{s1} + e^{-i\theta}\zeta\beta_{s2}) \quad (21)$$

これを式(14)-(19)に代入すると、DOPO信号光電場についてのCSDEを得る。さらに、次式で定義される実効的な信号光損失 γ'_s 、並びに規格化された実効結合係数 ξ 、を導入する。

$$\gamma'_s = \gamma_s + \frac{\zeta^2}{\gamma_c}, \quad \xi = \frac{\zeta^2}{\gamma_s\gamma_c + \zeta^2} \quad (22)$$

すると、信号光モードについての規格化されたCSDEが、次のように得られる。

$$d\eta_j = [-\eta_j + \mu_j(p - \eta_j^2) + \xi\eta_k e^{i\theta}]d\tau + g\sqrt{p - \eta_j^2}dW_{\eta_j}(\tau) \quad (23)$$

$$d\mu_j = [-\mu_j + \eta_j(p - \mu_j^2) + \xi\mu_k e^{-i\theta}]d\tau + g\sqrt{p - \mu_j^2}dW_{\mu_j}(\tau) \quad (24)$$

但し、 $\eta_j = g\alpha_{sj}$ 、 $\mu_j = g\beta_{sj}$ 、 $g = k/\sqrt{2\gamma'_s\gamma_p} = 1/2A_s$ (飽和パラメータ)、 $P = \varepsilon_p/\varepsilon_{th}$ (規格化励起率)、 $\varepsilon_{th} = \gamma'_s\gamma_p/\kappa$ (発振しきい値における励起率)、である。時間軸は信号光の寿命で規格化されている ($\tau = \gamma'_s t$)。また、ウィーナー過程 $dW_{\eta_j}(\tau)$ と $dW_{\mu_j}(\tau)$ は規格化時間で書き直されている。さらに、線形な相互注入は $\xi\eta_k e^{i\theta}$ と $\xi\mu_k e^{-i\theta}$ で表されている。

高Q共振器では、 $\zeta > \gamma_s$ と考えられる。これは、シュレディンガーの猫状態や負のウィグナー関数など (第5章参照)、系が非自明な量子効果を示すための重要な条件である。飽和パラメータ $g = k/\sqrt{2\gamma'_s\gamma_p}$ は、しきい値以上のDOPO共振器内のおおよその光子数を決定する。すなわち、しきい値以上では各DOPOの平均信号光子数は $\langle n_s \rangle \sim 1/g^2$ となる。

3.3 ウィグナー表示 $W(\alpha)$

本節では、次式で表されるウィグナー (Wigner) 関数を用いて全系の密度演算子を展開する。

$$\rho = \int e^{\lambda^* \hat{a} - \lambda \hat{a}^\dagger} \left\{ \int e^{\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha} W(\alpha) d\alpha \right\} d\lambda \quad (25)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{s1}, \hat{a}_{s2}, \hat{a}_{p1}, \hat{a}_{p2}, \hat{a}_c)^T$ 及び $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \lambda_c)$ であり、 α と λ は複素数フーリエ変換におけるペアとなっている。また、 $\chi(\lambda) = \int e^{\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha} W(\alpha) d\alpha$ は対称形相関関数である [9]。式(25)をマスター方程式に代入し、3次以上の高次の項を省略して得られるフォッカー・プランク (Fokker-Planck) 方程式からCSDEが得られる [5]。

$$\begin{aligned}
d\alpha_{s1} &= (-\gamma_s \alpha_{s1} + \kappa \alpha_{p1} \alpha_{s1}^* + \zeta \alpha_c) dt + \sqrt{\gamma_s} dW_{s1}(t) \\
d\alpha_{s2} &= (-\gamma_s \alpha_{s2} + \kappa \alpha_{p2} \alpha_{s2}^* - \zeta e^{-ik_c z} \alpha_c) dt + \sqrt{\gamma_s} dW_{s2}(t) \\
d\alpha_{p1} &= \left(-\gamma_p \alpha_{p1} - \frac{\kappa}{2} \alpha_{s1}^2 + \epsilon_p \right) dt + \sqrt{\gamma_p} dW_{p1}(t) \\
d\alpha_{p2} &= \left(-\gamma_p \alpha_{p2} - \frac{\kappa}{2} \alpha_{s2}^2 + \epsilon_p \right) dt + \sqrt{\gamma_p} dW_{p2}(t) \\
d\alpha_c &= (-\gamma_c \alpha_c - \zeta \alpha_{s1} + \zeta e^{ik_c z} \alpha_{s2}) dt + \sqrt{\gamma_c} dW_c(t).
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで、 $dW_X(t)$ は (c 数) ウィーナー (Wiener) 過程であり、外部熱浴から信号光、ポンプ光、注入経路モードへ混入する真空場雑音及び熱雑音を表す。次に、 $\gamma_p, \gamma_c \gg \gamma_s$ として、ポンプ光と注入経路モードを断熱的に消去する ($d\alpha_{pj} = d\alpha_c = 0$)。さらに、 $e^{ik_c z} = e^{-ik_c z} = -1$ とする (反強磁性結合)。すると、規格化された信号光振幅についてのCSDEとして次式を得る。

$$\begin{aligned}
dA_{s1} &= \{-A_{s1} + (p - A_{s1}^2)A_{s1}^* - \xi A_{s2}\} d\tau + g dW'_{s1} \\
dA_{s2} &= \{-A_{s2} + (p - A_{s2}^2)A_{s2}^* - \xi A_{s1}\} d\tau + g dW'_{s2},
\end{aligned} \tag{27}$$

但し、 $A_{sj} = g\alpha_{sj}$ は規格化信号光振幅。 dW'_{s1} と dW'_{s2} は雑音項であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
dW'_{s1} &= \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma'_s}} dW_{s1}(\tau) + A_{s1} dW_{p1}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_c(\tau), \\
dW'_{s2} &= \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma'_s}} dW_{s2}(\tau) + A_{s2} dW_{p2}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_c(\tau),
\end{aligned} \tag{28}$$

上記2つのCSDEは、図2に示すような、最近接結合を持つ N 個のDOPOから成る一次元ネットワークに容易に拡張できる。このような一次元DOPOネットワークを構成する j 番目DOPOのCSDEは、次のように表される。

$$dA_{sj} = \{-A_{sj} + (p - A_{sj}^2)A_{sj}^* - \xi A_{sj-1} - \xi A_{sj+1}\}d\tau + g dW'_{sj} \quad (29)$$

$$dW'_{sj} = \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma'_s}} dW_{sj}(\tau) + A_{sj} dW_{pj}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_{cj+1}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_{cj-1}(\tau)$$

式(27)(29)は、短縮 (truncated) ウィグナーCSDEと呼ばれ、外部熱浴から信号光へ混入する真空場雑音 dW_{sj} 、ポンプ光へ混入する真空場雑音 dW_{pj} 、注入経路モードへ混入する真空場雑音 dW_{cj} により駆動されることを示唆している。一方、正 $P(\alpha, \beta)$ 表示CSDEはポンプ雑音にのみ駆動されている。これは、正 $P(\alpha, \beta)$ 理論ではコヒーレント状態により密度演算子を展開しており、この基底系はそれ自体が真空場揺らぎを内包しているためである。

短縮ウィグナー表示により導出されたCSDE式(27)、式(29)は、文献[12]で導出された古典ランジュバン方程式 (Classical Langevin Equation: CLE)と全く同じ形になっている。ただ、このCLEでは通常の熱雑音に代わって量子雑音 (真空場ゆらぎ) がランジュバン雑音項を支配する ($k_B T \ll \hbar \omega$ であるため)。CSDEとCLEの違いは、 $c \equiv \text{Re}(A_s)$ および $s \equiv \text{Im}(A_s)$ に対する解釈の違いとすることが出来る。CSDEにおける c と s は密度演算子を展開する (式(25)) に使われた単なるパラメータであり、いかなる物理量にも対応しないのに対し、CLEにおける c と s は信号光電場の同相および直交位相振幅の実際の値と解釈される。一般的に古典論 (CLEの世界) では、対象とする系には測定を行なう前から振幅という客観的な実在が存在していて、その値は実際の測定結果がどうであったか (検出器の内部雑音によって、必ずしも本当の振幅に一致しない) によって変化しない。一方、量子論 (CSDEの世界) では、対象とする系には決まった振幅というものは存在せず、一種の情報である波動関数もしくは密度行列のみが存在していて、その波動関数や密度行列は測定結果がどうであったか、により変化する。このように、古典論と量子論は大きく異なった世界観に基づいて定式化されているのに、CLEとCSDEが全く同じ形をしているのは何故であろうか。その理由は、次節で述べるように同位振幅 c と直交位相振幅 s が対称化された演算子であり、対称化された演算子の期待値は単にウィグナー関数をかけて積分をすることにより求められるためである。しかし、古典論 (CLEの世界) では c と s の一つ一つの軌跡は実際の振幅の時間変化を表しているのに対し、量子論 (CSDEの世界) では c と s の一つ一つの軌跡には何の意味もなく、多数の集団に対して積分を行って初めて実験結果に対応する観測量が求められることに留意すべきである。

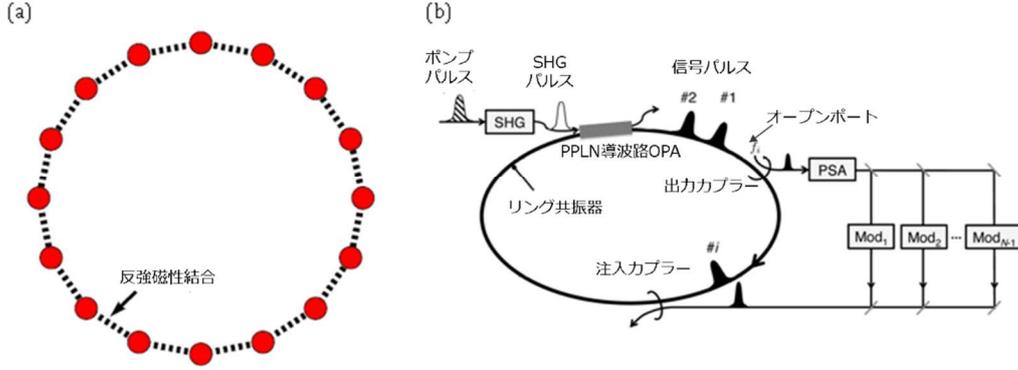


図2 : (a) 隣り同士が同一の反強磁性結合しているDOPO($N = 16$)から成る一次元ネットワークの模式図 [5]。 (b) 光遅延線結合DOPOネットワークの実装例。出力カップラー直後の位相感応増幅器 (PSA: Phase Sensitive Amplifier) は各DOPOパルスの同位相振幅 \hat{x} を増幅し、注入カップラーは変調されたフィードバックパルスをターゲットであるDOPOパルスに結合する。これにより、所望のイジング・ハミルトニアンが実装される。光フィードバック用の分離/遅延/変調/合波回路の空端子あるいは光学損失から出力カップラーを経てDOPO共振器内に混入する真空場が、ネットワークの挙動に対して重要な役割を担う [10]。

短縮ウィグナー理論 (式(29)) について最後に一言述べておく。それは、この理論では、しきい値付近のDOPO信号光の非ガウスの波動関数が適切に考慮されている、ということである。マスター方程式で高次の非線形性を省略することと非ガウスの波動関数の裾引きを無視することは、2つの異なる近似である。

3.4 波動関数の不可分性と量子もつれ

ノーマルオーダー (交換関係を使って全ての生成演算子を前へ、全ての消滅演算子を後ろへ移動) の並びの演算子の期待値は、正 P 関数により次のように計算することができる [8]。

$$\langle \hat{a}_{s1}^{\dagger j} \hat{a}_{s2}^{\dagger k} \hat{a}_{s1}^l \hat{a}_{s2}^m \rangle = \int \beta_{s1}^j \beta_{s2}^k \alpha_{s1}^l \alpha_{s2}^m P(\{\alpha\}, \{\beta\}) d\alpha d\beta \quad (30)$$

一方、対称オーダーの並びの演算子の期待値は、短縮ウィグナー関数により次のように表される [9]。

$$\langle \hat{a}_{s1}^{\dagger j} \hat{a}_{s2}^{\dagger k} \hat{a}_{s1}^l \hat{a}_{s2}^m \rangle_s = \int \alpha_{s1}^{*j} \alpha_{s2}^{*k} \alpha_{s1}^l \alpha_{s2}^m W(\{\alpha\}) d\alpha \quad (31)$$

上式中の $\langle \dots \rangle_s$ は、ブラケット内のノーマルオーダーの演算子を対称化した後の集団平均であることを表す。2つのDOPO (図1) の同位相振幅 $[\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2]$ 間及び直交位相振幅

$[\hat{p} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i]$ 間の規格化された相関関数は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} C(\hat{x}_{s1}, \hat{x}_{s2}) &= \frac{\langle \hat{x}_{s1} \hat{x}_{s2} \rangle}{\langle \Delta x_{s1} \Delta x_{s2} \rangle} = \frac{\langle c_{s1} c_{s2} \rangle}{\sqrt{\langle c_{s1}^2 \rangle - \langle c_{s1} \rangle^2} \sqrt{\langle c_{s2}^2 \rangle - \langle c_{s2} \rangle^2}} \\ C(\hat{p}_{s1}, \hat{p}_{s2}) &= \frac{\langle \hat{p}_{s1} \hat{p}_{s2} \rangle}{\langle \Delta p_{s1} \Delta p_{s2} \rangle} = \frac{\langle s_{s1} s_{s2} \rangle}{\sqrt{\langle s_{s1}^2 \rangle - \langle s_{s1} \rangle^2} \sqrt{\langle s_{s2}^2 \rangle - \langle s_{s2} \rangle^2}} \end{aligned} \quad (32)$$

但し、 $c_X = (a_X + a_X^*)/2$ 、 $s_X = (a_X - a_X^*)/2i$ 、 $\Delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$ 。

ここで、正及び負の量子相関の程度を見積もるために、EPR的な演算子 $\hat{u}_+ = \hat{x}_{s1} + \hat{x}_{s2}$ 及び $\hat{v}_- = \hat{p}_{s1} - \hat{p}_{s2}$ を定義する。2つのDOPOは反強磁性相互作用で結合しているものとする ($e^{ikcz} = e^{-ikcz} = -1$)、 \hat{x}_{s1} と \hat{x}_{s2} には負の相関関係、 \hat{p}_{s1} と \hat{p}_{s2} には正の相関関係、が形成されるはずである。負（または正）の量子相関の条件は、 $\langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle < 0.5$ または $\langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle < 0.5$ で与えられる。一方、量子もつれ（波動関数の不可分性）の判断基準は $\langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle < 1$ で与えられる[11]。図3に、正P表示と短縮ウィグナー表示により計算されたEPR的演算子の全分散を示す[5]。ここでは、励起率を、時間 $\tau=200$ の間にゼロから発振しきい値の1.5倍まで線形に増加させている [$p = 1.5 (\tau/200)$]。飽和パラメータは $g=0.01$ 。図に見られるように、2つの結合DOPOは量子もつれ ($\langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle \leq 1$) を示している。なお、結合DOPOの発振励起率の値は、単独（非結合）DOPOの値 $p_{th}^{(0)} = 1$ とは異なり、 $p_{th} = 1 - \xi$ である[12]。結合定数 ξ が大きいと、量子もつれは増強される。正P表示で得られた結果は、短縮ウィグナー表示によるものとほとんど同じとなっている。この数値シミュレーション結果は、正P表示または短縮ウィグナー表示で計算された全分散 $\langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle$ は、サンプル数が有限 ($M=200,000$) であることによる統計的誤差[図3(a)にエラーバーで表示]の範囲内で一致することを示している。

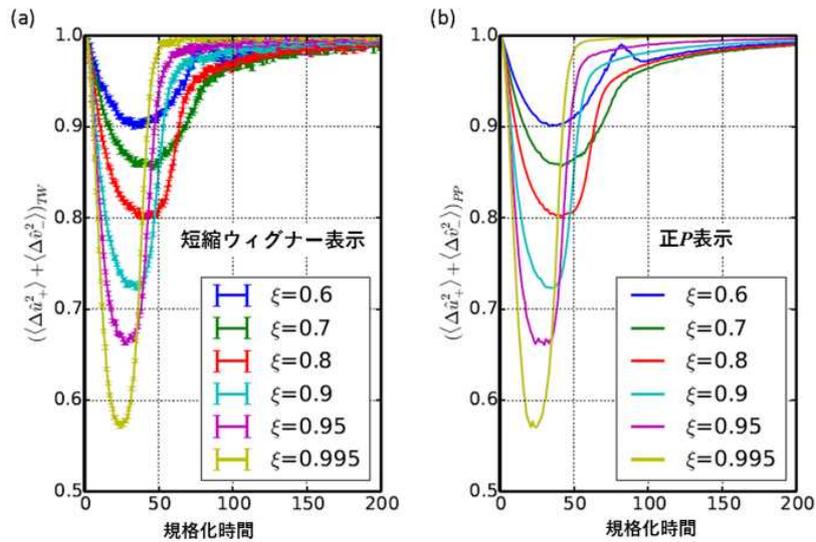


図3：短縮ウィグナー表示(a)及び正P表示(b)で計算したEPR的演算子の全分散。(a)にはサンプル数が有限 ($M = 200,000$) であることによる統計的エラーバーもプロットしてある[5]。

図2(a)に示す1次元ネットワークにおいて、DOPOの数 N が偶数であると、EPR的演算子 \hat{u}_{1D} 及び \hat{v}_{1D} を次のように定義することができる。

$$\hat{u}_{1D} = \sum_{j=1}^N \hat{x}_{sj}, \quad \hat{v}_{1D} = \sum_{j=1}^N (-1)^j \hat{p}_{sj}. \quad (33)$$

この \hat{u}_{1D} と及び \hat{v}_{1D} はこの系の量子相関及び量子もつれの指標となることが、付録Aに示すように証明される。

図4に、 $N=16$ の一次元DOPOネットワークにおいて、出力カップラーのオープンポート（図2(b)参照）への入力状態のスケーリング・パラメータ r を $\{0.0, 0.5, 1.0\}$ とした時の、EPR的演算子 $\hat{u}_{1D} + \hat{v}_{1D}$ の全分散を示す[5]。ここでは、励起率を、規格化時間 $\tau=200$ にわたってゼロから発振しきい値の0.375倍まで徐々に増加させている（ $p=0.375(\tau/200)$ ）。飽和パラメータは $g=1/200$ 、結合定数は $\xi=0.4$ 。通常の真空ゆらぎが出力カップラーのオープンポートに入力されると（ $r=0$ ）、直交位相振幅に量子相関が形成されるが（ $\langle \Delta \hat{v}_{1D}^2 \rangle < N/4$ ）、同位相振幅には古典相関のみが形成される（ $\langle \Delta \hat{u}_{1D}^2 \rangle \geq N/4$ ）。これに対し、量子雑音が同位相振幅では $e^{-2r}/4$ に圧縮、直交位相振幅では $e^{2r}/4$ に増強されている真空スクイーズ状態を注入すると、同位相／直交位相どちらの振幅成分にも量子相関が形成される。なお、 $r=0, 0.5, 1.0$ いずれの場合も $\hat{u}_{1D} + \hat{v}_{1D}$ の全分散は標準量子限界（ $N/2=8$ ）以下となっている。スクイーズ状態が入力されなくても量子もつれの条件は成り立っている。

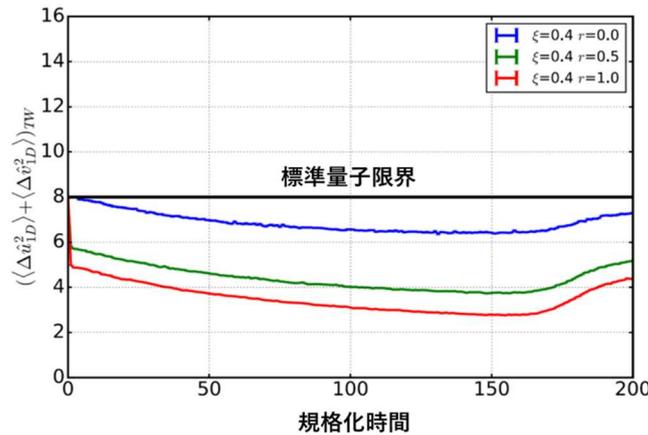


図4： 規格化時間に対する $\hat{u}_{1D} + \hat{v}_{1D}$ の全分散。スケーリング・パラメータ r は0、0.5、1.0。 $r=0$ は出力カップラーへのオープンポート入力状態が通常の真空場ゆらぎである場合に対応[5]。

図3、4では比較的大きな結合定数 ξ を仮定したが、このような強い結合は、図2(b)に示すように、出力カップラーで取り出した信号光電場を無雑音の位相感応増幅器（PSA）で増幅するとすれば、非現実的な想定ではない。

3.5 量子ディスコード

量子相関は、部分系に対する局所的な測定が全系の量子状態を変化させる複合量子系における、一般的な性質である。そのような複合量子系の量子相関の定義には広義のものがあり、それによれば、混合状態であっても重要な量子相関を備えている場合があることが示される。

量子ディスコード[13]は、2部分系(bipartite)の相互情報量の2つの異なる定義に基づく、複合量子系の量子相関の尺度である。部分系 $\{A, B\}$ から成る複合量子系 AB があるとする。全系と部分系のエントロピーを用いると、この2部分系の相互情報量は次のように表される。

$$I(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}), \quad (34)$$

$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$ はフォンノイマン (von Neumann) エントロピー、 $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB})$ 及び $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB})$ は部分系 A 及び B の還元密度演算子である。他方これに代わり、条件付きエントロピー $S(A|B)$ によっても相互情報量を定義できる。但し、 $S(A|B)$ は、局所的な測定が全系の量子状態をかき乱すため、部分系 B に対する測定基底に何を选ぶかに依存する。そのため、真の量子相関を評価するには、全系への擾乱が最も小さい測定基底を选ぶことが必要となる。条件付きエントロピーで定義される相互情報量は、次のように表される。

$$J^-(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) - \inf_{\Pi_i^B} \sum_i p_i S(\hat{\rho}_{A|i}) \quad (35)$$

上式中の i は、部分系 B に対する POVM (positive operator-valued measurement) の測定基底 (Π_i^B) の成分を表す。ここで、POVM測定とは、エルミート演算子に対して行われる厳密な測定のことである。これについては次章で詳述する。 $\hat{\rho}_{A|i}$ は部分系 B の測定結果が i 番目の固有値であった時の部分系 A の測定後の状態、 p_i は i 番目の固有値が測定される確率、である。 $\inf(\pi_i^B)$ は、系の擾乱を最小とする最適 POVM 測定 (π_i^B) を意味する。量子ディスコードは、上記2つの相互情報量の差分で定義される[13]。

$$D^-(\hat{\rho}_{AB}) = I(\hat{\rho}_{AB}) - J^-(\hat{\rho}_{AB}) \quad (36)$$

一般に、量子もつれの無い系でも量子ディスコードは非ゼロとなり得る。そのような状態はある種の量子計算において非自明な量子加速に貢献すると言われている[14,15]。

式(35)に記した測定基底の最適化は一般には難しい。但し、系がガウス状態にあり、かつ局所的な測定がガウス型 POVM に限定される場合については、量子ディスコードの解析式が導かれている[16,17]。これを用いれば、2モードスクイーズ状態、コヒーレント状態、真空状態、といった多くのガウス状態における真の量子相関が定量的に求められる[17]。そこ

で、我々の系の量子ディスコードを付録Bで導入したガウス型量子ディスコードの定式化を使って評価する。

図5に、DOPOの量子状態を近似的にガウス状態であると仮定したときの量子ディスコードのシミュレーション結果を示す[4]。基本的には、 \hat{p}_1 と \hat{p}_2 の間に形成される量子相関を反映している。 \hat{p}_1 と \hat{p}_2 がそれぞれスクイーズしていて、しかも正の相関を持つ時には、系は比較的大きな量子ディスコードを保持している。さらに、しきい値より十分大きい励起率でも有限の量子ディスコード値 $D^* \sim 0.02$ が見られる。前に論じたようなDOPOにおけるスクイージング[16]によるものではなく、古典相関のある2つのコヒーレント状態（混合状態）がこのような有限の量子ディスコード値を持ち得る、ことが知られている。発振しきい値を過ぎると、 \hat{x}_j 及び \hat{p}_j の分散は急速に $\frac{1}{4}$ に近づき、従ってDOPOの状態はコヒーレント状態として近似される。この時、有限値ディスコードが存在する起源は、 $\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle = -0.9999 \sim -1.0000$ という、ほぼ100%の x の相関によるものである。

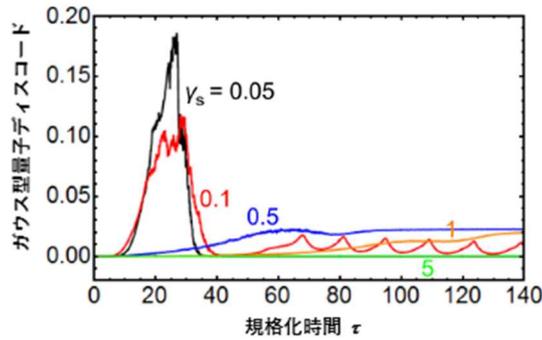


図5：（色線）DOPO状態が近似的に2部分系（bipartite）のガウス状態である時の量子ディスコード。 γ_s が小さい時には、しきい値付近のDOPOにおけるスクイージングと相互注入により大きなディスコードが形成される。しきい値より十分高い励起率におけるコヒーレント状態の混合状態は、 ~ 0.02 という有限のディスコードをもたらす。なお、各曲線は5000回計算した平均結果である[4]。

しきい値より十分高い励起率では \hat{x}_1 と \hat{x}_2 が逆相の相関を持つ2つのDOPOの共分散行列は、次式で与えられる。

$$\hat{\rho}_{cl} = \frac{1}{2} |\alpha_{cl}\rangle_1 |-\alpha_{cl}\rangle_2 \langle -\alpha_{cl}|_1 \langle \alpha_{cl}|_2 + \frac{1}{2} |-\alpha_{cl}\rangle_1 |\alpha_{cl}\rangle_2 \langle \alpha_{cl}|_1 \langle -\alpha_{cl}|_2 \quad (37)$$

$$\sigma(\hat{\rho}_{cl}) = \begin{pmatrix} 4\alpha_{cl}^2 + 1 & 0 & -4\alpha_{cl}^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4\alpha_{cl}^2 & 0 & 4\alpha_{cl}^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

但し、 α_{cl} はDOPOにおけるコヒーレント状態の固有値。式(38)から計算されるガウス型量子ディスコードは、 $\alpha_{cl} \gtrsim 50$ では $D^* \sim 0.02356$ に漸近する。この値は、図5のシミュレーション結果（ $\gamma_s = 0.1 \sim 1$ ）とよく一致している。式(37)は2つのガウス状態の混合状態を表しており、この結果は、固有値に相関のある2つのコヒーレント状態の間に真の量子相関が存在するこ

と示唆するものである。一方、図5に示されているように、信号光の減衰レートが非常に大きい場合には、発振しきい値より十分高い励起率では、共振器の大きな散逸が量子ディスクを相殺し得る[4]。

3.6 まとめ

第3章におけるいくつかの重要な結論を以下にまとめる。

1. 正 $P(\alpha, \beta)$ 表示から導出される c 数確率微分方程式 (CSDE) は、式(23)(24)で与えられる。

$$d\eta_j = [-\eta_j + \mu_j(p - \eta_j^2) + \xi\eta_k e^{i\theta}]d\tau + g\sqrt{p - \eta_j^2}dW_{\eta_j}(\tau) \quad (23)$$

$$d\mu_j = [-\mu_j + \eta_j(p - \mu_j^2) + \xi\mu_k e^{-i\theta}]d\tau + g\sqrt{p - \mu_j^2}dW_{\mu_j}(\tau) \quad (24)$$

2. 短縮 (truncated) ウィグナー関数表示 $W(\alpha)$ から導出されるCSDEは、2つの結合DOPOについては式(27)(28)で、一次元リング構成の N 個のDOPOについては式(29)で、それぞれ与えられる。

$$\begin{aligned} dA_{s1} &= \{-A_{s1} + (p - A_{s1}^2)A_{s1}^* - \xi A_{s2}\}d\tau + g dW'_{s1} \\ dA_{s2} &= \{-A_{s2} + (p - A_{s2}^2)A_{s2}^* - \xi A_{s1}\}d\tau + g dW'_{s2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$dW'_{s1} = \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma'_s}} dW_{s1}(\tau) + A_{s1} dW_{p1}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_c(\tau), \quad (28)$$

$$dW'_{s2} = \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma'_s}} dW_{s2}(\tau) + A_{s2} dW_{p2}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_c(\tau),$$

$$dA_{sj} = \{-A_{sj} + (p - A_{sj}^2)A_{sj}^* - \xi A_{sj-1} - \xi A_{sj+1}\}d\tau + g dW'_{sj} \quad (29)$$

$$dW'_{sj} = \sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma'_s}} dW_{sj}(\tau) + A_{sj} dW_{pj}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_{cj+1}(\tau) + \sqrt{\xi} dW_{cj-1}(\tau)$$

3. 次式で定義されるEPR的演算子により、1次元リング結合DOPOの量子もつれが数値

的に検証される。

$$\hat{u}_{1D} = \sum_{j=1}^N \hat{x}_{sj}, \quad \hat{v}_{1D} = \sum_{j=1}^N (-1)^j \hat{p}_{sj}. \quad (33)$$

4. 光遅延線結合DOPOは、図3及び図4に示されるように、広い励起率の範囲で量子もつれを有する。
5. 多数の部分系からなる複合量子系における量子相関は、式(36)で定義される量子ディスコードにより評価される。

$$D^{\leftarrow}(\hat{\rho}_{AB}) = I(\hat{\rho}_{AB}) - J^{\leftarrow}(\hat{\rho}_{AB}) \quad (36)$$

6. 光遅延線結合DOPOは、しきい値付近において強い量子ディスコードを示し、しきい値より十分高い励起率においても、 $D \sim 0.02$ 程度の弱い量子ディスコードを保持する。

付録A 1次元DOPOネットワークのEPR的演算子

定理1. 波動関数が分離可能な系では、不等式 $\langle \Delta \hat{u}_{1D}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_{1D}^2 \rangle \geq N/2$ が成り立つ。

証明. 不等式の左辺 $\langle \Delta \hat{u}_{1D}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_{1D}^2 \rangle$ は、次のように書かれる。

$$\langle \Delta \hat{u}_{1D}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_{1D}^2 \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{u}_{1D}^2] - (\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{u}_{1D}])^2 + \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{v}_{1D}^2] - (\text{Tr}[\hat{\rho} \hat{v}_{1D}])^2 \quad (A1)$$

系の量子状態が分離可能であると、全系の密度演算子 $\hat{\rho}$ は各DOPOの密度演算子 $\hat{\rho}_{jk}$ のテンソル積に分解できる。すなわち、

$$\hat{\rho} = \sum_k q_k \hat{\rho}_{1k} \otimes \hat{\rho}_{2k} \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_{Nk} = \sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \quad (A2)$$

但し、 q_k は各テンソル積 $\prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk}$ の混合割合であり、 $\sum_k q_k = 1$ が成立している。式(A1)の各項は、次のように書かれる。

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{u}_{1D}^2] &= \text{Tr}\left[\sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \hat{u}_{1D}^2\right] \\
&= \text{Tr}\left[\sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \sum_{j=1}^N \left(\hat{X}_{sj}^2 + 2 \sum_{l=j+1}^N \hat{X}_{sj} \hat{X}_{sl}\right)\right] \\
&= \sum_k q_k \sum_{j=1}^N \left\{ \langle \hat{x}_{sj}^2 \rangle_k + 2 \sum_{l=j+1}^N \langle \hat{x}_{sj} \rangle_k \langle \hat{x}_{sl} \rangle_k \right\} \\
&= \sum_k q_k \sum_{j=1}^N \left\{ \langle \Delta \hat{x}_{sj}^2 \rangle_k \langle \hat{x}_{sj}^2 \rangle_k + 2 \sum_{l=j+1}^N \langle \hat{x}_{sj} \rangle_k \langle \hat{x}_{sl} \rangle_k \right\} \\
&= \sum_k q_k \sum_{j=1}^N \langle \Delta \hat{x}_{sj}^2 \rangle_k + \sum_k q_k \langle \hat{u}_{1D} \rangle_k^2
\end{aligned} \tag{A3}$$

$$(\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{u}_{1D}])^2 = \left(\text{Tr}\left[\sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \hat{u}_{1D}\right] \right)^2 = \left(\sum_k q_k \langle \hat{u}_{1D} \rangle_k \right)^2 \tag{A4}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{v}_{1D}^2]) &= \text{Tr}\left[\sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \hat{v}_{1D}^2\right] \\
&= \text{Tr}\left[\sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \times \sum_{j=1}^N \left(\hat{p}_{sj}^2 + 2 \sum_{l=j+1}^N (-1)^{j+1-2} \hat{p}_{sj} \hat{p}_{sl}\right)\right] \\
&= \sum_k q_k \sum_{j=1}^N \left\{ \langle \hat{p}_{sj}^2 \rangle_k + 2 \sum_{l=j+1}^N (-1)^{j+1-2} \langle \hat{p}_{sj} \rangle_k \langle \hat{p}_{sl} \rangle_k \right\} \\
&= \sum_k q_k \sum_{j=1}^N \left\{ \langle \Delta \hat{p}_{sj}^2 \rangle_k + \langle \hat{p}_{sj} \rangle_k^2 + 2 \sum_{l=j+1}^N (-1)^{j+1-2} \langle \hat{p}_{sj} \rangle_k \langle \hat{p}_{sl} \rangle_k \right\} \\
&= \sum_k q_k \sum_{j=1}^N \langle \Delta \hat{p}_{sj}^2 \rangle_k + \sum_k q_k \langle \hat{v}_{1D} \rangle_k^2
\end{aligned} \tag{A5}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{v}_{1D}])^2 &= \left(\text{Tr} \left[\sum_k q_k \prod_{j=1}^N \hat{\rho}_{jk} \hat{v}_{1D} \right] \right)^2 \\
&= \left(\sum_k q_k \langle \hat{v}_{1D} \rangle_k \right)^2
\end{aligned} \tag{A6}$$

ここで、コーシー・シュワルツ不等式から導かれる不等式 $\sum_k q_k \langle \hat{u}_{1D} \rangle_k^2 = \sum_k q_k \sum_k q_k \langle \hat{u}_{1D} \rangle_k^2 \geq (\sum_k q_k \langle \hat{u}_{1D} \rangle_k)^2$ 、 $\sum_k q_k \langle \hat{v}_{1D} \rangle_k^2 = \sum_k q_k \sum_k q_k \langle \hat{v}_{1D} \rangle_k^2 \geq (\sum_k q_k \langle \hat{v}_{1D} \rangle_k)^2$ 、並びに、不確定性原理から導かれる不等式 $\sum_k q_k (\langle \Delta \hat{x}_{sj}^2 \rangle_k + \langle \Delta \hat{p}_{sj}^2 \rangle_k) \geq 0.5$ を用いる。すると、状態が分離可能であると不等式 $(\langle \Delta \hat{u}_{1D}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_{1D}^2 \rangle) \geq N/2$ が成り立つ、と結論付けられる。

定理2. 不等式 $\langle \Delta \hat{u}_{1D}^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_{1D}^2 \rangle < N/2$ が成り立っていると、その系の波動関数は不可分であり量子もつれが存在する。

証明. これは定理1の対置である。

付録B. ガウス型量子ディスクコード

2つのDOPOの規格化されていない直交振幅 $[\hat{r}] = 2[\hat{x}_1, \hat{p}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_2]$ について考える。2モードのガウス状態は、次の共分散行列により特徴付けられる[4]。

$$\sigma_G = \left[\frac{1}{2} \langle \hat{r}_j \hat{r}_k + \hat{r}_k \hat{r}_j \rangle - \langle \hat{r}_j \rangle \langle \hat{r}_k \rangle \right] = \begin{pmatrix} \alpha_M & \gamma_M \\ \gamma_M^T & \beta_M \end{pmatrix} \tag{B1}$$

但し、 α_M 、 β_M 、及び γ_M は 2×2 の行列。これらの行列は、等価的に、次式で定義されるパラメータ (symplectic invariance) で特徴付けられる。

$$A_s = \det \alpha_M, \quad \beta_s = \det \beta_M, \quad C_s = \det \gamma_M, \quad D_s = \det \sigma_G \tag{B2}$$

2値エントロピー関数を $f_B(X) = (X + 1/2) \log(X + 1/2) - (X - 1/2) \log(X - 1/2)$ 、並びに $\Delta = A_s + B_s + 2C_s$ 、 $v_{\pm}^2 = 1/2 (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4D_s})$ 、と書くと、ガウス型量子ディスクコードが次式で与えられる。

$$D^-(\sigma_G) = f_B(\sqrt{B_s}) - f_B(v_-) - f_B(v_+) + \inf_{\sigma_0} f_B(\sqrt{\det \epsilon}) \tag{B3}$$

ここで、 σ_0 は部分系 B に対するガウス測定の基底、 ϵ は部分系 B が局所的に測定された後の部分系 A の共分散行列である。式(B3)の最後の項は、ガウス型POVMの範囲内で (補助(ancilla))

ビット、式(B2)の変換、ホモダイン検出、を加えて) 解析的に最適化可能であり、次のように表される[18]。

$(D_s - A_s B_s) \leq (1 + B_s) C_s^2 (A_s + D_s)$ の場合 :

$$\inf_{\sigma_0} \det \epsilon = \frac{2C_s^2 + (B_s - 1)(D_s - A_s) + 2|C_s| \sqrt{C_s^2 + (B_s - 1)(D_s - A_s)}}{(-1 + B_s)^2}$$

それ以外の場合 :

$$\inf_{\sigma_0} \det \epsilon = \frac{A_s B_s - C_s^2 + D_s - \sqrt{C_s^4 + (D_s - A_s)^2 - 2C_s^2(A_s B_s + D_s)}}{2B_s} \quad (\text{B4})$$

2モードスクイズ状態 (真空スクイズ状態を含む) については、さらに簡便な表式が次のように導かれる[16]。

$$\inf_{\sigma_0} \sqrt{\det \epsilon} = \frac{\sqrt{A_s} + 2\sqrt{A_s B_s} + 2C_s}{1 + \sqrt{B_s}} \quad (\text{B5})$$

$D^-(\sigma_0) \geq 1$ である2部分系では、その要素間に常に量子もつれが存在することが知られているが、同時にある種の量子もつれ状態の量子ディスコードは、常に1より小さい値となることも知られている[16]。

- [1] A. Marandi et al., Nature Photonics 8, 937 (2014).
- [2] K. Takata et al., Sci. Rep. 6, 34089 (2016).
- [3] T. Inagaki et al., Nature Photonics 10, 415 (2016).
- [4] K. Takata et al., Phys. Rev. A 92, 043821 (2015).
- [5] D. Maruo et al., Phys. Scr. 91, 083010 (2016).
- [6] H. J. Carmichael, Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002).
- [7] R. J. Glauber, Phys. Rev. 131, 2766 (1963).
- [8] P. D. Drummond and C. W. Gardiner, J. Phys. A 13, 2353 (1980).
- [9] D. F. Walls and G. J. Milburn, Quantum Optics (Springer, Berlin-Heisengerg, 2007).
- [10] Y. Haribara et al., Entropy 18, 151 (2016).
- [11] L-M. Duan et al., Phys. Rev. Lett. 84, 2722 (2000).
- [12] Z. Wang et al., Phys Rev. A 88, 063853 (2013).
- [13] H. Ollivier and W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. 88, 017901 (2001).

- [14] B. P. Lanyon et al., Phys. Rev. Lett. 101, 200501 (2008).
- [15] E. Knill and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. 81, 5672 (1998).
- [16] P. Giorda and M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett. 105, 020503 (2010).
- [17] G. Adesso and A. Datta, Phys. Rev. Lett. 105, 030501 (2010).
- [18] S. Pirandola et al., Phys. Rev. Lett. 113, 140405 (2014).

英文執筆：山本 喜久、高田 健太、丸尾 大貴

和訳：井上 恭

Version 1