

II 光パラメトリック発振器ネットワークの物理

本章では、量子ニューラルネットワーク (QNN) の基幹要素である光パラメトリック発振器 (OPO) と OPO ネットワークの物理を解説する。物理をシンプルに説明することを優先し、理論的記述は現象論にとどめ、実験結果との対比に重点をおく。厳密な量子論は次章以下で展開される。

中心対称性のない結晶には2次 ($\chi^{(2)}$) の光非線形性があり、このためポンプ周波数の光子が周波数が半分の2個の光子 (光子対) に下方変換される[1]。OPOはこの非線形現象に基づいており、これにより位相感応増幅及び発振が起こる。すなわち、ポンプ光パワーがしきい値以下の時には系はスクイーズ真空状態にある一方、しきい値以上では0相か π 相の2つの (コヒーレント) 位相状態のどちらかで発振する。このしきい値での分岐がイジングマシンの計算原理となる。すなわち、イジング問題が光結合によりエンコードされた OPO ネットワークがしきい値以下から以上へ駆動されると、系はネットワーク損失が最小であるイジング基底状態を探し出し、単一モード発振するように時間発展する。

2.1 パラメトリック増幅

LiNbO₃ や BBO[2]のような中心対称性のない結晶では、光の分極 P は、光電場 E の1次及び2次の展開項 ($P^{(1)}$ 及び $P^{(2)}$) に依存し、次式のように表される。

$$P_i = \underbrace{\sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j}_{P^{(1)}} + \underbrace{\sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k}_{P^{(2)}} \quad (1)$$

χ は感受率であり、添え字 $\{i, j, k\}$ で周波数 $f_{i,j,k}$ 成分であることを示す。上式を Maxwell 方程式に代入すると、電磁波伝搬を記述する連立非線形方程式が得られる。得られる方程式は2次非線形項を含んでいるため、3光波の混合現象 $E(\omega_1) + E(\omega_2) \leftrightarrow E(\omega_1 + \omega_2)$ を記述することができる (ω : 角周波数)。例えば、第2高調波発生、和周波数発生、差周波数発生、パラメトリック増幅、などを記述できる[2]。このことは、異なる周波数の光が混合することがない線形光学とは様子が異なる。

一般に光非線形性は弱く、 $P^{(2)} \ll P^{(1)}$ として摂動的に非線形方程式を解くことができる。起こり得る種々の非線形過程のうち、(疑似) 位相整合条件 $k_1 + k_2 - k_3 = \pm 2\pi/\Lambda$ を満たすものが主として選択される。ここで、 $k_{1,2,3}$ は3光波の波数ベクトル、 Λ は結晶構造の分極反転周期ベクトル (疑似の場合)、である。通常、結晶の屈折率には周波数分散があり、位相整合条件とエネルギー保存則 ($\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = 0$) を同時に満たすことは難しい。そこで、

特定の非線形過程を励起するには、位相整合条件を満たす工夫を非線形結晶に施す必要がある。上記条件式内の Λ はこのために導入されている。縮退パラメトリック増幅（これがQNNに関連する非線形過程となる）についての非線形伝搬方程式は、Maxwell方程式より（位相整合条件は満たされているものとして）次のように書き下される。

$$\frac{da}{dz} = \epsilon b a^* \quad (2)$$

$$\frac{db}{dz} = -\frac{1}{2}\epsilon a^* \quad (3)$$

上式は、周波数 2ω のポンプ光電場 $b(z)$ と周波数 ω の信号光電場 $a(z)$ に関する連立微分方程式となっている。なお、ここでの光電場は毎秒当りの光子数で規格化されており、ポンプ光パワーは $P_b = 2\hbar\omega|b|^2$ 、信号光パワーは $P_a = \hbar\omega|a|^2$ 、また、 $\epsilon = (\hbar\omega^3/\epsilon_0 c^3 n^3 A_{\text{eff}})^{1/2} \chi_{\text{eff}}^{(2)}$ である（ \hbar ：プランク定数、 c ：光速、 n ：屈折率、 A_{eff} ：非線形導波路中の信号光／ポンプ光の実効断面積）。

ポンプ光が十分強く（ $|b| \gg 1$ ）、信号光が弱い（ $|a| \ll |b|$ ）と、信号光は式(2)に従って増幅される。式(2)では、 da/dz が a ではなく a^* に比例しており、これは局所場では a^* に比例する光電場が a に足し合わされて干渉することを意味する。そのため、伝搬につれて a の実数成分は足し算されて増幅される一方、虚数成分は差し引かれて反増幅（de-amplification）される、位相感応増幅（phase-sensitive amplification）となる（なおここでは、ポンプ光位相はゼロとしており、これはポンプ光を位相基準としていることに相当する）。信号光が十分小さいと、信号光によるポンプ光の減少（式(3)）は無視することができる。すると、式(2)において b が z に依存しない定数となり、このことより、次のように信号光が指数関数的に増加／減少する表式が導かれる。

$$\text{Re}[a(z)] = e^{\epsilon b z} \text{Re}[a(0)], \quad \text{Im}[a(z)] = e^{-\epsilon b z} \text{Im}[a(0)] \quad (4)$$

一方、ポンプ光の減少を考慮する場合は、式(2)(3)より、 $B^2 = |b|^2 + \frac{1}{2}|a|^2 = \text{一定}$ （エネルギー保存則）が得られる。 $\{a, b\}$ が共に実数とすると、次のような解が得られる。

$$a(z) = \sqrt{2}B \text{sech}[\epsilon B(z - z_0)], \quad b(z) = -B \tanh[\epsilon B(z - z_0)] \quad (5)$$

図1左図に上式の計算例を示す。

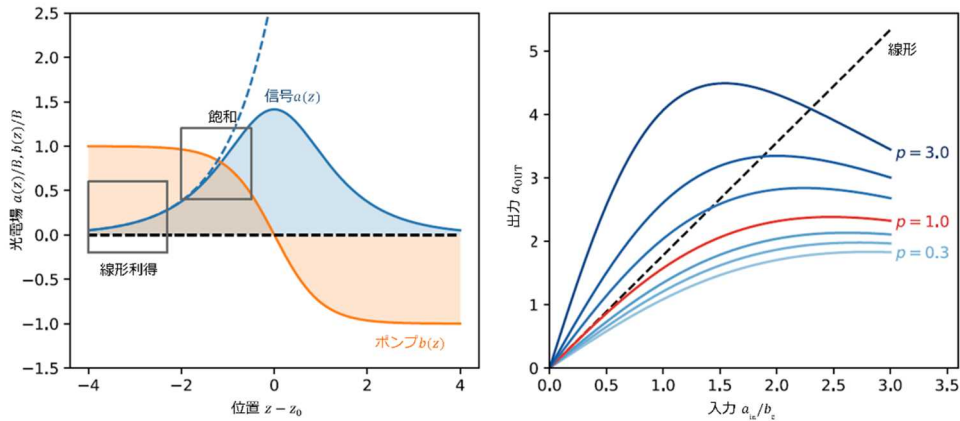


図 1: 左図: ポンプ光電場及び信号光電場対伝搬距離 (式(5))。線形利得領域及び利得飽和領域をプロット。右図: 入出力関係 ($G_0 = 5$ dB)。 $p = b_{\text{in}}/b_0$ は規格化されたポンプ光振幅。ポンプ・デプレッションによる飽和が示されている。

OPA 利得を計算するには、初期状態 ($a_{\text{in}}, b_{\text{in}}$) を代入して、 $z = 0$ における式(5)の解から (B, z_0) を計算する。そして、結晶出力端 ($z = L$) まで場を伝搬させて $a_{\text{out}} = a(z = L)$ を計算する。すると、全体の入出力関係が次のように得られる。

$$a_{\text{out}} = a_{\text{in}} G_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(b_{\text{in}}^2 + a_{\text{in}}^2/2)/2b_0}{(b_{\text{in}}^2 + a_{\text{in}}^2/2)/b_0}} \left[1 + \left(G_0^{\sqrt{\frac{(b_{\text{in}}^2 + a_{\text{in}}^2/2)/b_0}{(b_{\text{in}}^2 + a_{\text{in}}^2/2)/2b_0}} - 1} \right) \frac{1 - \sqrt{b_{\text{in}}^2/(b_{\text{in}}^2 + a_{\text{in}}^2/2)}}{2} \right]^{-1} \quad (6)$$

ここで、 G_0 はパラメトリック発振のしきい値利得、すなわち光共振器の損失と釣り合う利得値、である。弱い信号光に対してはパワー利得が e^{eBL} であるので (式(4))、しきい値ポンプ光振幅は $b_0 = (2\epsilon L)^{-1} \log(G_0)$ と表される。鍵となるパラメータは、しきい値で規格化されたポンプ光振幅 $p = b_{\text{in}}/b_0$ である。この入出力関係を図 1 右図に示す。

式(6)には 2 つの極限領域が考えられる。

$a_{\text{in}} \ll b_{\text{in}}$: 利得は線形、従って $a_{\text{out}} \approx G_0^{p/2} a_{\text{in}}$ 。

$a_{\text{in}} \gg b_{\text{in}}$: 信号光がポンプ光より十分大きく、パラメトリック過程が逆向きに進行する。そのため、パラメトリック増幅に代わり第 2 高調波発生が起こり、信号光が減衰する。この減衰は信号光パワーが大きいほど大きく、 $a_{\text{out}} = G_0^{-2-3/2 a_{\text{in}}/b_0} a_{\text{in}}$ と表される。

QNN としては、計算動作が起こるしきい値近傍 $p \approx 1$ でのふるまいが主な関心事となる。この極限状態では、線形利得は $G_0^p \approx G_0 \left(1 + \frac{1}{2} (p-1) \log G_0 \right)$ であり、飽和項として式(6)を a_{in} の 3 次まで展開することにより、次式が得られる。

$$a_{\text{out}} = G_0 \left[\underbrace{1 + \frac{\log(G_0)}{2} (p-1)}_{\text{利得}} - \underbrace{\frac{G_0 - (1 + \log G_0)}{8} (a_{\text{in}}/b_0)^2}_{\text{飽和}} \right] a_{\text{in}} \quad (7)$$

2.2 線形増幅器の量子限界

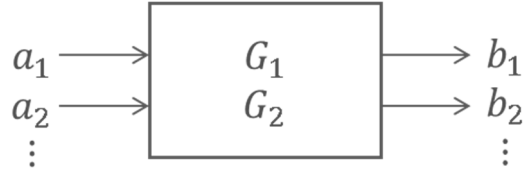


図2：線形増幅器における2つの直交位相成分の入、出力関係。

図2に示した線形増幅器において、2つの直交位相成分の振幅、 $\hat{a}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ と $\hat{a}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ 、は別々の増幅率と内部雑音を持つとする。すなわち、

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= \sqrt{G_1}\hat{a}_1 + \hat{F}_1 \\ \hat{b}_2 &= \sqrt{G_2}\hat{a}_2 + \hat{F}_2\end{aligned}\quad (8)$$

この時、線形増幅器の入、出力演算子はボゾン粒子に対する交換関係を満足していなければならないから、

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad (9)$$

もしくは、

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = [\hat{b}_1, \hat{b}_2] = \frac{i}{2} \quad (10)$$

が成立する。(8)式を(10)式に代入すると、

$$\begin{aligned}[\hat{b}_1, \hat{b}_2] &= [\sqrt{G_1}\hat{a}_1 + \hat{F}_1, \sqrt{G_2}\hat{a}_2 + \hat{F}_2] \\ &= \sqrt{G_1 G_2}[\hat{a}_1, \hat{a}_2] + [\hat{F}_1, \hat{F}_2]\end{aligned}\quad (11)$$

ここで、線形増幅器への入力信号と内部雑音は独立した場なので可換であるとした。(10)式を(11)式に代入して、次式を得る。

$$[\hat{F}_1, \hat{F}_2] = (1 - \sqrt{G_1 G_2}) \frac{i}{2} \quad (12)$$

(12)式から以下の結論が導き出せる。もし、線形増幅器が $G_1 G_2 = 1$ （または、 $G_1 = 1/G_2 \gg 1$ ）を満足したとすると、雑音演算子は可換となり（ $[\hat{F}_1, \hat{F}_2] = 0$ ）、そのような位相感応増幅器は増幅／反増幅された信号に内部雑音を付加する必要はなくなる。一方、位相無依存増幅器の場合には、 $G_1 = G_2 \gg 1$ であり、増幅された信号に内部雑音、 $\langle \Delta \hat{F}_1^2 \rangle = \langle \Delta \hat{F}_2^2 \rangle = G^2/4$ 、が必ず付加される。これが線形増幅器に対する量子限界である[3]。

上記の議論は、非可換観測量の同時測定に対する一般化されたハイゼンベルグ不確定性原理の一例である[4]。すなわち、もし2つの非可換観測量（ \hat{a}_1, \hat{a}_2 ）を同時に増幅して測定しようとする、そのような測定器（この場合は位相無依存増幅器）は、被測定系の固有雑音以外に、独立した雑音を付加しなければならない。その結果、不確定積は通常のハイゼンベルグ限界の2倍になる。一方、縮退型光パラメトリック発振器は、同位相成分の振幅 \hat{a}_1 を増幅し、読み出しを許すが、直交位相成分の振幅 \hat{a}_2 は反増幅するので読み出しを許さない。そのような1つの観測のみを読み出す測定器は雑音を付加する必要はない。

2.3 ピッチフォーク分岐

OPO 単体は、前項で述べた OPA を共振器内に配置することにより構築される。ここで、共振器の周回損失は G_0^{-1} であり、位相感応増幅利得は式(7)で与えられる。光電場振幅 a は1周回する間は大きくは変わらないとすると、 a の時間発展を記述する差分方程式は次の微分方程式に書き換えられる。

$$\frac{da}{dt} = \left[\frac{\log(G_0)}{2} (p-1) - \frac{G_0 - (1 + \log G_0)}{8} (a/b_0)^2 \right] a \equiv \frac{\partial V(a)}{\partial a} \quad (13)$$

ここで、 $V(a)$ は信号光電場に対する実効ポテンシャルである。図3に、実効ポテンシャル $V(a)$ と信号光波動関数のポンプレートを変化させた時のふるまいを示す。 $p < 1$ （しきい値以下）では、この解は定常値 $a = 0$ である。これは、しきい値以下の OPO 内に存在する真空スクイーズ状態の古典的極限である。しきい値以上では、 $a = 0$ は不安定状態となり、次の2つの安定状態が現れる。

$$a = \pm b_0 \sqrt{\frac{4 \log(G_0)}{G_0 - (1 + \log G_0)} (p-1)} \quad (14)$$

これは、しきい値以上の OPO の量子状態（スクイーズ状態からコヒーレント状態へ変化する）の古典的極限である。多くの物理系が相転移臨界点で同様のふるまいを示し、スーパー臨界ピッチフォーク分岐と呼ばれる。

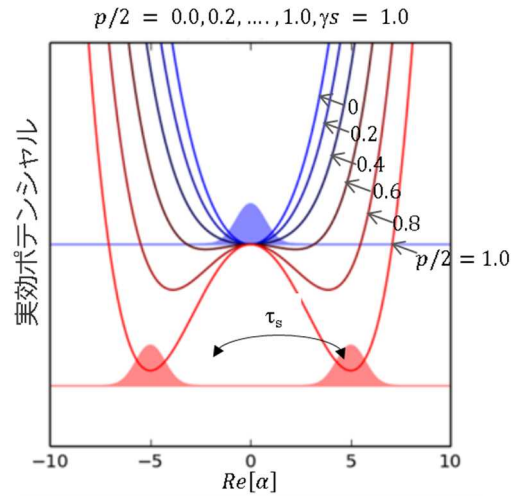


図 3 : 実効ポテンシャル $V(a)$ と信号光波動関数のポンプレート p を変化させた時のふるまい。

2.4 OPO ネットワーク

単一の共振器内に N 個の OPO パルスを有する QNN は、時分割多重 (Time Division Multiplexing, TDM) により実装することができる (図 4)。これは、ひとつの OPO 共振器を、共振器の自由スペクトル幅 (free spectral range) の N 倍の繰り返し周波数のパルスレーザにより、非線系光学結晶を同期的に励振する手法である[5]。共振器内の各パルスが各 OPO に対応する。パルスの動特性が各 OPO に新たな自由度を与えることになり、これが高ポンプパワーにおける特異な動特性を引き起こし得るが、しきい値近傍では我々のモデルによりよく記述できる[6]。

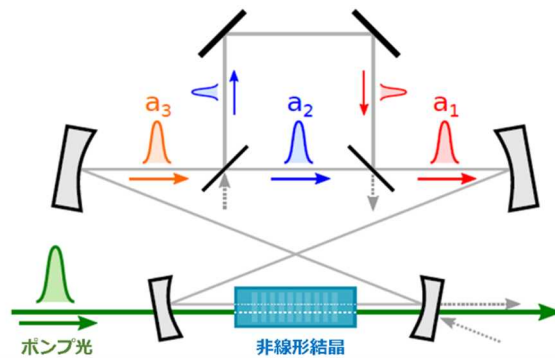


図 4 : 遅延線を用いた時分割多重によるイジングスピン・ネットワークの実装[7]。

ポテンシャル (i.e., ハミルトニアン) が常に保たれる量子アニーリングや high-Q の OPO 量子ビットとは異なり[8,9]、QNN のイジングポテンシャル $J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ は OPO 間の結合を通して散逸的に実現される。このことはイジングマシンを他の量子計算手法とは根本的に異なるものとしている。(時分割多重されたパルスとして実装された) OPO 間を結合するには、パルスを遅延させ、後の時刻に到着する標的パルスに再入力する何らかの手段が必要であ

る。ひとつのやり方は、遅延線(図5)を用いる構成である。例えば d -ビット遅延線により、次のような相互作用が実装される。

$$a_i \rightarrow t^2 a_i + r^2 a_{i-d} \quad (15)$$

但し、 (t, r) は(潜在的に時間に依存する)ミラー振幅透過率/反射率である。遅延線が時間依存の位相シフトを備えていると、任意の光結合が $(n-1)$ 本の遅延線により構築される[10]。結合率 r が十分小さい場合、遅延線は可換であり順序は不問、よってその運動方程式への効果は次のように記述される。

$$\frac{da_i}{dt} = \underbrace{\left[\frac{\log(G_0)}{2} (p-1) \right]}_{\text{利得損失}} a_i - \underbrace{\left[\frac{G_0 - (1 + \log G_0)}{8} (a_i/b_0)^2 \right]}_{\text{飽和}} a_i + \underbrace{\sum_d r_d^2 (a_{i-d} - a_i)}_{\text{結合損失}} \quad (16)$$

時間 t を光子寿命時間で規格化すると、式(16)は次のような標準形となる。

$$\boxed{\frac{da_i}{dt} = [(p-1) - \beta a_i^2] a_i + \eta \sum_j J_{ij} a_j} \quad (17)$$

但し、 β は利得飽和パラメータ、 J_{ij} はイジングハミルトニアン結合マトリクス、 η は結合強度であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\beta = \frac{G_0 - (1 + \log G_0)}{4b_0^2 \log(G_0)}, \quad \eta J_{ij} = \sum_d r_d^2 (\delta_{i-d,j} - \delta_{i,j}) \quad (18)$$

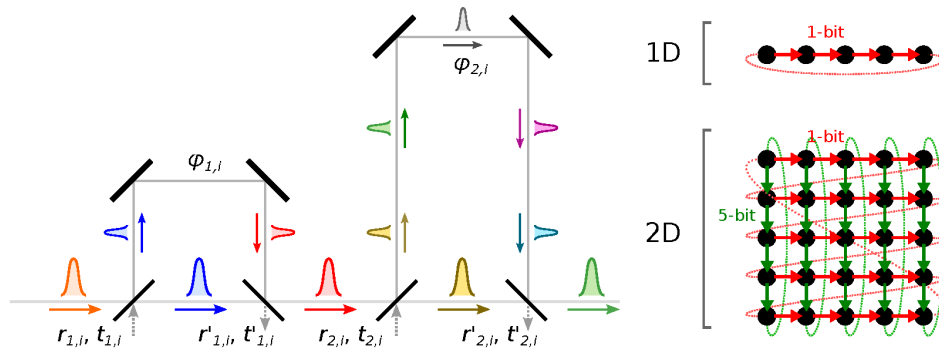


図5：左図：1ビット及び4ビット遅延線結合。右図：単一結合(上)及び2つの結合(下)で実装されるイジング格子[7]。

2.5 立方体グラフ上のイジングスピン

図6に $N = 4$ の OPO パルスが3本の光遅延線で結合された自由空間リング共振器の実験系を示す[5]。1ビット遅延線は、時計回りの最近接結合 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$) を実装し、2ビット遅延線は双方向の対角線結合 ($1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4$) を実装し、3ビット遅延線は反時計回りの最近接結合 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$) を実装する。各 OPO は他の3つの OPO と結合しているため、グラフの次数は3 (立方体グラフ) である。OPO ネットワークが定常状態に達した後の出力信号光に対する1ビット遅延検波波形とこれに対応する位相 (スピン) パターンを図7(a)に示す。 $2^4 = 16$ 通りあるスピン配列は、4つの1ビット遅延検波波形に分類される。図7(b)に、1000回の実験に対する測定結果のヒストグラムを、イジング結合をオン・オフした場合について示す[5]。全てのイジング結合係数は、同じ強さを持った反強磁性タイプ ($J_{ij} = -1$) である。イジング結合がオフの時、各 OPO は独立、ランダムに0相か π 相で発振するので、16通りのスピン配列は同一の確率で現われる (図7(b)では縮退する状態をまとめて8通りで表示)。一方、イジング結合がオンの時、縮退した基底状態に相当する3通りのスピン配列が同じ確率で観測され、5つの励起状態は全く観測されなかった。

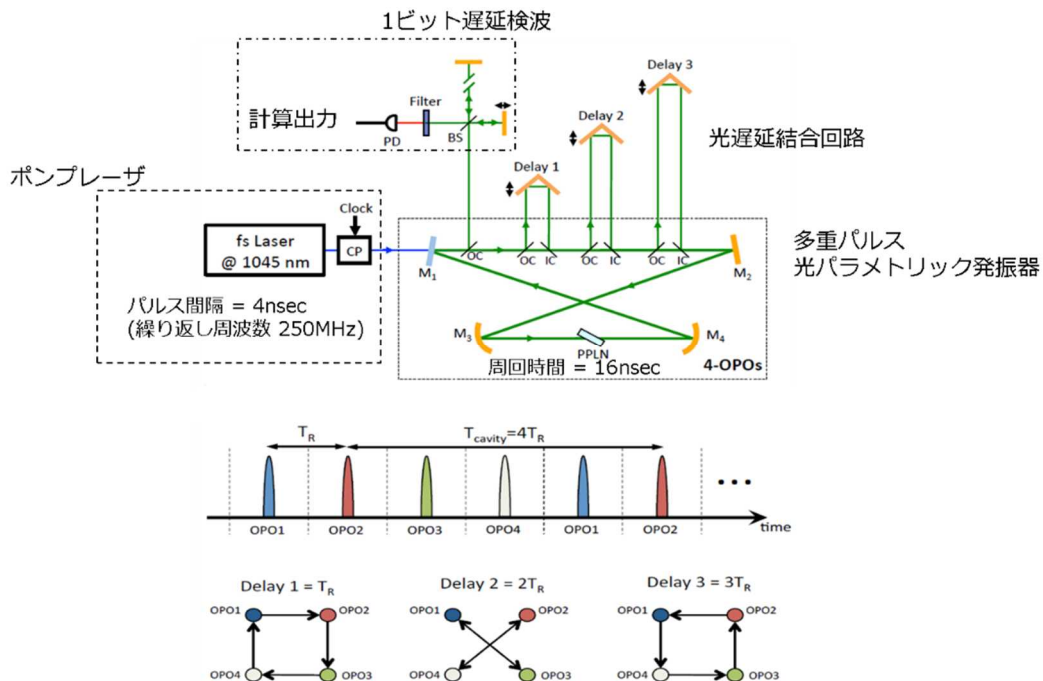


図6: $N = 4$ の OPO パルスが3本の光遅延線で結合された自由空間リング共振器の実験系[5]。

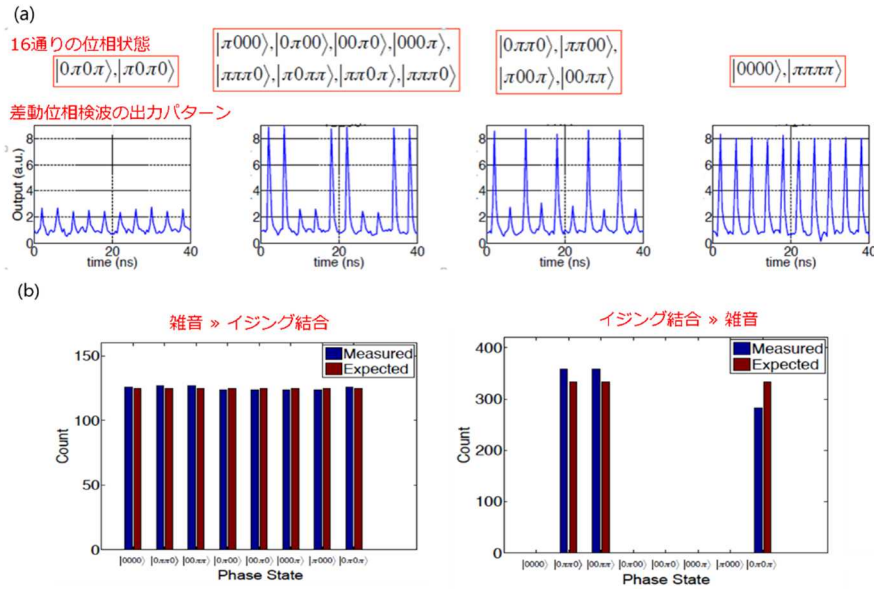


図 7 : NP 困難 MAX-CUT 問題 ($N = 4$) を解いた実験結果。 (a) 4 通りの差動位相測定パターン。 (b) イジング結合をオン・オフした場合の測定結果[5]。

図 8(a)に $N = 16$ の OPO パルスが 3 本の光遅延線で結合された自由空間リング共振器の実験系を示す[11]。図 8(b)に示すように 1 ビット遅延線は時計回りの最近接結合 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow 16 \rightarrow 1$) を実装し、8 ビット遅延線は双方向の対角線結合 ($1 \leftrightarrow 9, 2 \leftrightarrow 11, \dots, 7 \leftrightarrow 16$) を実装し、15 ビット遅延線は反時計回りの最近接結合 ($1 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$) を実装する。この立方体グラフは Möbius ladder グラフと呼ばれる。3 つの代表的な 1 ビット遅延検波波形を図 9 に示す。3 つの波形は、それぞれ強磁性オーダー、反強磁性オーダー、Möbius ladder グラフ (全てのエッジが反強磁性タイプ: $J_{ij} = -1$) の基底状態に対応している。 $N = 16$ スピンのイジング問題では全部で $\sim 10^5$ のスピン配列があるが、表 1 に示すように、2000 回の実験に対して縮退した 16 の基底状態のいずれかが 100% の確率で得られた[11]。

表 1 : 16 ビットイジングマシンの実験およびシミュレーション結果[11]。

	一次元リング、強磁性	一次元リング、反強磁性	立方体グラフ、反強磁性 ($N = 16$)
結合	$J_{i,i+1} = J_{i+1,i} = 1$ (delay 1, 2)	$J_{i,i+1} = J_{i+1,i} = -1$ (delay 1, 2)	$J_{i,i+1} = J_{i+1,i} = -1$ $J_{i,i+8} = J_{i+8,i} = -1$ (delay 1, 2, 3)
基底状態数	2	2	16
基底状態の例 $\{s_i\}$	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1\}$	$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1\}$
極小値の数	0	0	34
基底状態のエネルギー	-16	-16	-20
励起パワーの平均値	1.00 W	900 mW	1.00 W
実験結果	1000/1000	996/1000	2000/2000
シミュレーション1 (single-mode, 10000 round trips)	604/1000	588/1000	1000/1000
シミュレーション2 (multimode, 200 round trips)	1000/1000	1000/1000	1000/1000

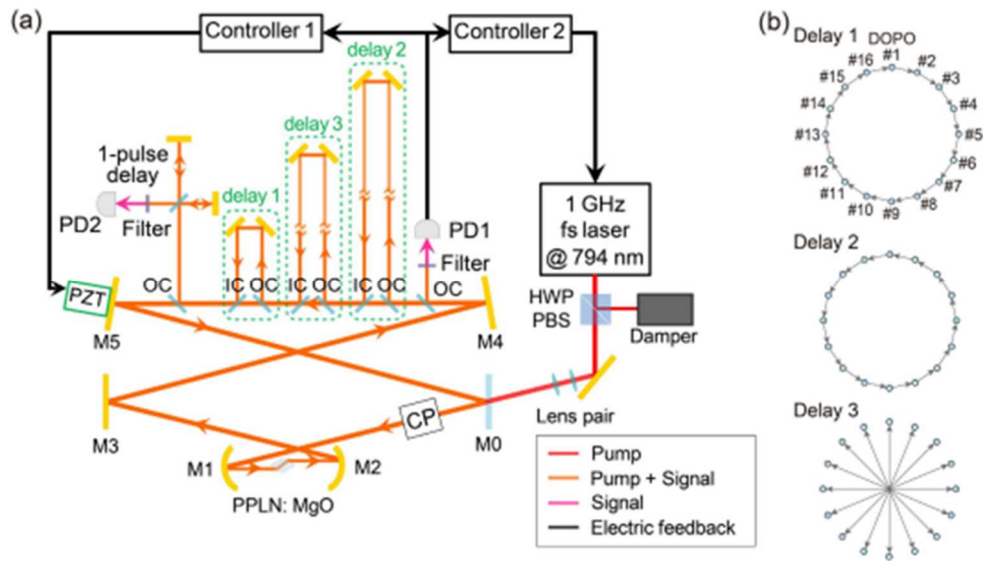


図 8 : $N = 16$ の OPO パルスが 3 本の光遅延線で結合された自由空間リング共振器の実験系[11]。

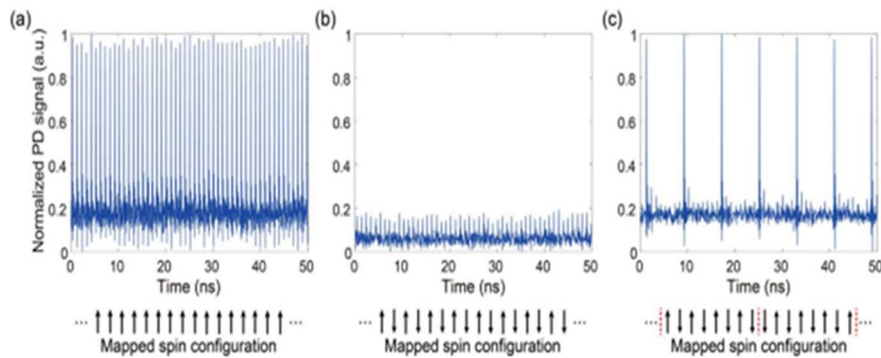


図 9 : NP 困難 MAX-CUT 問題 ($N = 16$) を解いた場合の差動位相検波出力の例。(a) 強磁性結合 1 次元リング問題。(b) 反強磁性結合 1 次元リング問題。(c) 立方体 (Möbius ladder) グラフ問題 [11]。

2.6 1次元イジングスピン鎖

モデルシステムとして、1次元 (1D) イジングスピン鎖を考える。このイジングモデルを実装するのはごく単純である。すなわち、単一もしくは 2 本の遅延線を用いればよい [7,12]。1D システムは古典統計力学の分野でよく研究されており、本システムとの比較対象となる多くの文献がある。

1D イジングスピン鎖は 2 段階の過程で評価される。第 1 段階は成長段階である。この段階では、光電場は飽和値に比べて弱く、ポンプ・デプレッションが無視でき、信号光は真空状態から指数関数的に成長する。パルス内結合のため、異なる (フーリエ) モードは異なる率で成長し、その中では強磁性モードが最も速く成長する。この第 1 段階は、飽和パワー

の対数と規格化ポンプ光振幅の逆数に比例する立ち上がり時間 T の間、継続する。

次は飽和段階である。この段階では、光電場は、 $a \rightarrow \pm a_0$ のように、2値のいずれかに飽和する。どちらの符号となるかは、成長段階後の光電場の符号で決まる。異なる領域にいれば異なる符号となる。この領域は古典強磁性体との類似性からドメインと呼ばれ、ドメインはトポロジー上の欠陥（ドメイン壁）により分けられている。ドメイン壁の密度は系の実効的「温度」の尺度となり、高密度は高エネルギー状態に対応する。

2.6.1 成長段階

成長段階では、光電場 $a_i(t)$ は式(16)に従う。単一遅延線を用いた1D連結[7,12]に限定すると、式(16)は次式となる。

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\log(G_0)}{2} (p-1)a_i + r^2(a_{i-1} - a_i) \quad (19)$$

この線形方程式(19)は、フーリエ領域 $a_i \rightarrow \tilde{a}_k$ で考えることにより対角化することができ、小さい k については次式が得られる。

$$\tilde{a}_k(T) = \underbrace{G_0^{\frac{1}{2}(p-1)T} e^{-2t^2 r^2 (\pi k/N)^2 T}}_{\text{利得}} \underbrace{e^{ik(2\pi r^2/N)T}}_{\text{ドリフト}} \tilde{a}_k(0) \quad (20)$$

上式では、2つの効果、すなわち利得とドリフトが分離している。ドリフトは一方向の結合の結果である。単一遅延線の場合、ドリフト速度は $v_d = r^2$ で与えられる（なお、双方向結合ではこの項は現れない。e.g., [5,11]）。利得項は k に依存しており、従って、異なるモードは異なる率で増幅される。この増幅は光電場が飽和値に達すると停止する。飽和時の光子数を N_{sat} とし、増幅が真空雑音から始まるとすると、およそ $\log(N_{\text{sat}})/\log(G/G_0)$ 周回で飽和に達する。すなわち、立ち上がり（飽和到達）時間 T は次のように表される。

$$T = \frac{1}{p-1} \frac{\log(N_{\text{sat}})}{\log(G_0)} \quad (21)$$

N_{sat} に対する T の対数的な依存性（ファイバーOPOでは N_{sat} は $O(10^5 - 10^7)$ のオーダー）は、2,3倍程度の違いは問題でないことを意味する。そのため、 $N_{\text{sat}} \rightarrow b_0^2$ （毎秒当たりの出力信号光子数 \approx 毎秒当たりの入力ポンプ光子数）と見積もることができる。

真空状態を初期状態とし、成長を表す式(20)を時間 T ステップで逐次計算すると、成長最

終段でのフーリエ・モードが次のように得られる。

$$\tilde{a}_k(T) \sim \sqrt{N_{\text{sat}}} e^{-2r^2 t^2 T (\pi k/N)^2} \quad (22)$$

k が小さいモードほど大きな振幅となっており、このことは最近接相互作用がある種の近距離秩序を形成することを示唆する。このことの良い指標は、自己相関関数 $R(x)$ である。飽和前は、 $R(x)$ は次のようなガウス型となっている。

$$R(x) \sim \langle a_i a_{i+x} \rangle = \sum_k e^{2\pi i k x / N} \langle \tilde{a}_k^* \tilde{a}_k \rangle \sim e^{-x^2 / 2x_0^2} \quad (23)$$

但し、飽和時の相関長は次式で与えられる。

$$x_0 \equiv \sqrt{2T} r t \quad (24)$$

2.6.2 飽和段階

第2段階では、ポンプ・デプレッションが始まり、OPO 内部の光電場が飽和する。この状況をモデル化する最も簡単な手法は、この段階での相互作用項 J_{ij} は無視できると仮定するやり方である。この簡便な飽和の仮定 (Simple Saturation Assumption : SSA) の下では、各 OPO の光電場は2つの飽和値 $\pm \sqrt{(p-1)/\beta}$ のいずれかに達するまで独立に成長する。初期電場 $c_i(T)$ の符号は保持されるが、振幅情報は全て失われる。このことは、次の符号関数により記述される。

$$a_i(\infty) \approx a_{\text{sat}} \text{sign}[a_i(T)] \quad (25)$$

系は、単一の強磁性状態に崩壊 (collapse) というより、固定のドメイン壁で区切られた固定スピンのドメインを形成する。

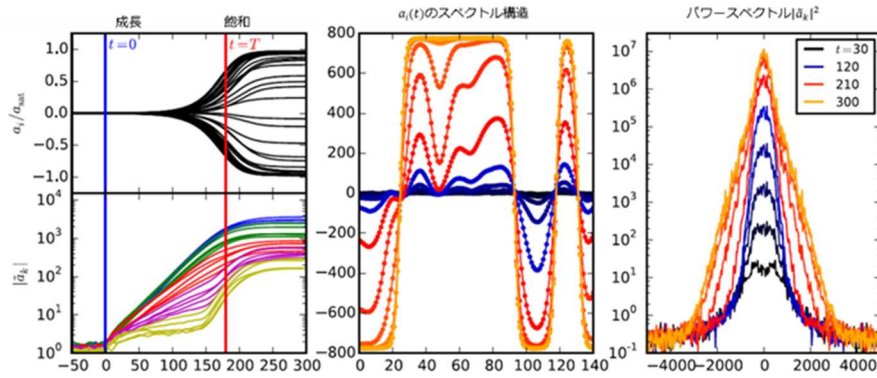


図 10：左図：OPO パルス振幅の成長（上）とフーリエ・モード \tilde{a}_k （下）。中図：1D 連結における時刻 $t = 30, 60, \dots, 300$ での光電場 $a_i(t)$ (x 軸はドリフト項を相殺するようにシフト)。右図：時刻 $t = 30, 60, \dots, 300$ でのパワースペクトル $|\tilde{a}_k|^2$ 。計算に用いたパラメータは、 $G_0 = 7$ dB、 $b/b_0 = 1.05$ [7]。

ただし図 10 は、ドメイン壁は必ずしも式(25)にあるような急峻な位相ジャンプではないことを示している。結合強度及びポンプ強度によっては、ドメイン壁は非常に広くなり得る。しきい値近傍では、その形は式(19)を通した解析解となる。 $a_i(t)$ の指数 i を連続変数に置き換え、その変数を縮尺し直すと、次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{t}} = (1 - \bar{a}^2)\bar{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \bar{x}^2} \quad (26)$$

$$(\bar{a} = a_0^{-1}a, \quad \bar{x} = (x - vt)/l, \quad \bar{t} = t/\tau) \quad (27)$$

ここで、

$$a_0 = 2b_0 \sqrt{\frac{(b/b_0 - 1)\log G_0}{G_0 - (1 + \log G_0)}}, \quad l = \sqrt{\frac{2r^2(1-r^2)}{(b/b_0 - 1)\log G_0}}, \quad v = r^2, \quad \tau = \frac{2}{(b/b_0 - 1)\log G_0} \quad (28)$$

は、それぞれ、飽和光電場、ドメイン壁、拡散速度、緩和時間、である。式(26)は解析解 $\bar{a} = \pm \tanh(\bar{x} - \bar{x}_w)$ を持つ。これがドメイン壁である。

図 11 左図はドメイン壁付近の拡大図である。ポンプ光が大きくなるにつれて、壁が鋭くなり、その幅は式(28)で与えられる $(b/b_0 - 1)^{-1/2}$ に従って減少する。ポンプ光が非常に大きいか結合が弱い場合は、 $l \leq 1$ であり、式(26)の背後にある、なだらかに変化する場という近似は成り立たない。しかしながら、ここで想定したパラメータ値については、その仮定は十分成り立っているよう見える（図中の実線は \tanh 解）。

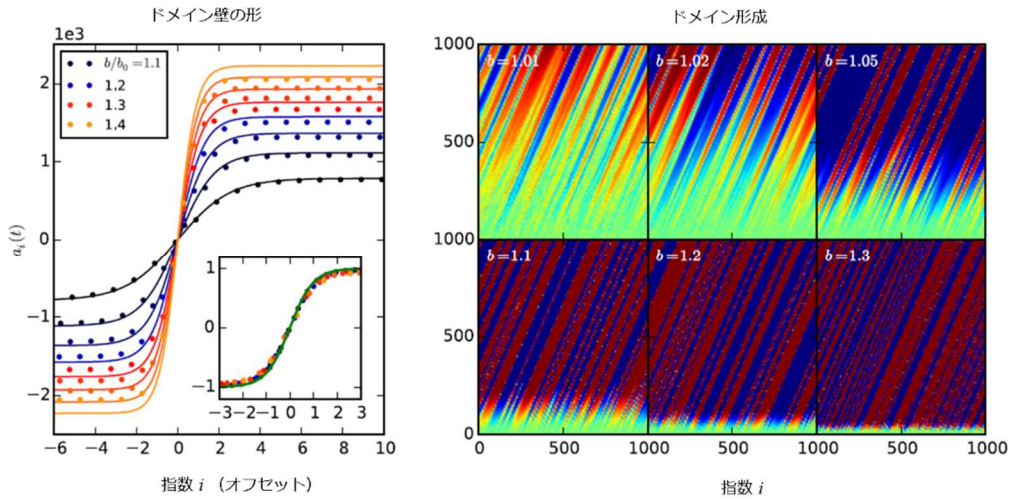


図 11 : 左図 : ポンプを $b/b_0 = 1.0$ から 1.4 (挿入図にある正規化単位) までゆっくり挿引したときのドメイン壁付近のパルス振幅 $a_i(t)$ 。右図 : 指数 i (横軸) 及び時間 t (縦軸) に対するパルス振幅 $a_i(t)$ の色付け図 [7]。

ドメイン壁は時間的に変化し得るものであり、摂動があると移動する。tanh 解について摂動理論を適用すると、Hessian が特異点であることが分かる。すなわち、固有値のほとんどは $0(1)$ またはそれ以上、但し、ベクトル $\partial a / \partial x$ についてはゼロ、となる。他の摂動は強く閉じ込められる一方、 $\partial a / \partial x$ 方向に沿った摂動は妨げられない。これは左または右へ移動するドメイン壁に対応する。内積をとることにより (固有値は直交)、ドメイン壁速度は次のように表される。

$$\bar{v}_w = \left[\int \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right]^{-1} \int \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} = -\frac{3}{4} \int \text{sech}^2(\bar{x} - \bar{x}_w) \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{t}} d\bar{x} \quad (29)$$

$\pm \bar{L}/2$ において 2 つのドメイン壁を有する関数 $\bar{a}(x, t)$ を考える。それらが $\bar{x} \approx 0$ において「接着されている」ような正確な手法が問題となるのは摂動論の 2 次までであり、 $a = \tanh(\bar{L}/2 - |\bar{x}|)$ は正しい解となる。式(29)を適用すると、ドメイン壁速度及び衝突時間が次のように表される。

$$\bar{v}_w = \frac{3}{2} \text{sech}^4(\bar{L}/2), \quad \bar{T}_L = \frac{1}{48} e^{2\bar{L}} \quad (30)$$

ドメイン壁が動くにつれ、より大きいドメインは影響を受けない一方、より小さいドメインは蒸発する。時間 t 後に生き残るドメインの大きさは、すべからく $\bar{L} \geq (1/2) \log(48t)$ となる。

図 11 右図は、パルス指数 i と時間 t に対する壁の移動・形成の様子を色付け表示したものである。ドメイン・ドリフトが明瞭に示されている。また、系がしきい値から離れるに従っ

て、ドメインの平均的な大きさが明らかに縮小している。注意深くみると、ドメイン壁がより小さいドメインのいくつかと衝突し消滅させていることも分かる。但し、一般にはこの現象は稀である。時間 T で形成されるドメインは中規模となる傾向があり、式(30)の寿命時間は非常に長くなり得るためである。

2.7 相関長と欠陥密度

イジングマシンの計算性能は、終状態 ($t \rightarrow \infty$) の解が正しい基底状態にどれだけ一致するかにより評価される。上記のように、有限時間の計算では、マシンは常に所望の(反)強磁性状態にあるとは限らず、少数のドメイン壁のある低エネルギーの励起状態となることがしばしば起こる。このような状況では、次の統計量が計算性能のよい指標となる。

1. 基底状態確率 P 。これは、連結サイズと共に指数関数的に減少する一方、飽和に達する時間と共に増加する。
2. 自己相関関数 $R(x) = \langle a_i a_{i+x} \rangle$ 。CIM 及び熱平衡イジングモデルいずれも自己相関はおおよそ指数関数 e^{-x/x'_0} であり、自己相関長 x'_0 が性能指数となる。完璧なイジングマシンでは $x'_0 \gg N$ (N は総スピン数) となる。
3. 欠陥密度 n_d 。これは、イジング連結におけるドメイン壁の平均数に比例する。完璧なイジングマシンでは $n_d \ll 1$ となる。

$R(x) = \langle a_i a_{i+x} \rangle / \langle a_i^2 \rangle$ で与えられる自己相関関数は、熱平衡イジングモデル $H = -\frac{1}{2} J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}$ では $R(x) = \tanh(\beta J)^x$ となる。 $\beta = 1/k_B T$ は温度パラメータ。この表式は e^{-x/x'_0} と書くことができ、この時の相関長は $x'_0 = -\log(\tanh(\beta J))^{-1}$ である。イジングマシンは非平衡系であるので、 $R(x)$ が指数関数であると予め予測することはできない。 $t \rightarrow \infty$ の時の $R(x)$ を計算する簡易な手法は、単純な飽和近似式(25)を仮定するやり方である。 $a_i(\infty) \rightarrow \text{sign}(a_i(T))$ と置き換えると、終状態の自己相関は次式となる。

$$R(x; \infty) = 1 - 2P(a_i(T)a_{i+x}(T) < 0) = 1 - \frac{4}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\tanh(x^2/4x_0^2)} \quad (31)$$

但し、式(24)にあるように、 T は飽和時間、 $x_0 = \sqrt{2T}rt$ である。

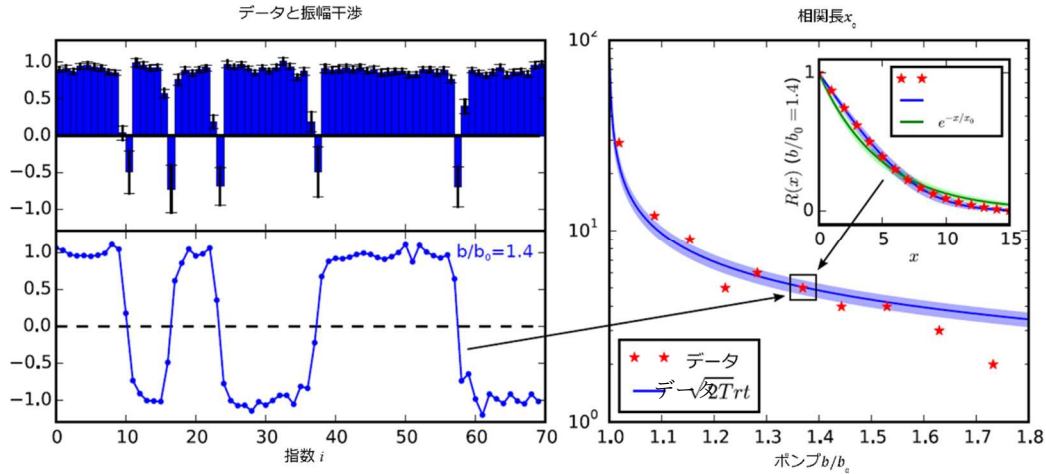


図 12：左図：ファイバー-OPO における $\cos(\Delta\theta_i)$ のデータ（上）と再構築された振幅 a_i （下）。右図：式(24)と比較した、ポンプ b/b_0 対自己相関長。挿入図：自己相関 $R(x)$ と解析フィッティング。青は式(31)、緑は指数関数。赤星は実験データ。影をつけた領域は、 4×10^5 から 4×10^7 までの N_{sat} に対する解析曲線の感度を示す[7,12]。

$R(x)$ を実験データから計算するには、まず、測定記録（図 12 左図）からパルス振幅 $a_i(t)$ を再構築する。稲垣等の実験[12]では、局発振振器は使わずに、信号光を 1 ビット遅延マツハ・ツェンダー干渉計に通して $I_{\pm,i} = |a_i \pm a_{i+1}|^2$ を測定している。この測定では、パルス・エネルギー $|a_i|^2$ が各パルスで同じであるとして、隣接パルス間の位相差が $\cos(\Delta\theta_i) = (I_{+,i} - I_{-,i}) / (I_{+,i} + I_{-,i})$ として与えられる。ここで、 $\cos(\Delta\theta_i)$ が負であることは位相反転を意味する。これらのデータから a_i を再構築すると、自己相関長が、実験データを式(31)にフィッティングすることにより得られるポンプ振幅の関数として計算される（図 12 右図）。挿入図に示されている $p = b/b_0 \approx 1.4$ にフィッティングさせた場合、実験値 x_0 は式(24)に一致する。厳密な関数式(31)はそれほど指数関数状ではないが、 $x'_0 = 1.00463x_0$ とすると、 $R(x) \approx e^{-x/x'_0}$ と近似される。従って、自己相関と指数関数状にフィッティングすることにより、実験データから x_0 を得ることができる。図 12 右図に示すように、単純な飽和近似から得られる $x_0 = \sqrt{2T}rt$ という関係式は極めて良い近似となっている。

他の鍵となる統計量は欠陥（ドメイン壁）密度である。これは、連結サイズ $n_d = N_d/N$ で分けられるドメイン壁の平均数である。平均ドメイン長は $L_d = 1/n_d$ となる。 $H = -\frac{1}{2}J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}$ の熱的イジングモデルでは、 $n_d = (1 + e^{\beta J})^{-1}$ である。 $a_i(\infty)$ は固定振幅値なので、単純飽和近似を使って、自己相関関数から n_d を $n_d = (1 - R(1))/2$ と計算することができる。 $x_0 \geq 10$ では、 $R(x)$ は $x = 0$ について線形化され、次の結果となる。

$$n_d = \frac{1}{\pi x_0}, \quad L_d = \pi x_0, \quad x_0 = \sqrt{2T}rt \quad (32)$$

表 2 に以上の考察をまとめる。

表 2 : 熱的イジングモデルとコヒーレントイジングマシンとの比較[7]。

	熱的	CIM 理論
メカニズム	熱的に活性化されたフリップがボルツマン分布を形成	OPO 振幅の線形的成長とそれに続く飽和
相関関数 $R(x)$	e^{-x/x_0}	式(31)参照
相関長 x_0	$-1/\log[\tanh(\beta J/2)]$	$\sqrt{2T}rt$
欠陥密度 n_d	$1/(1 + e^{\beta J})$	$1/\pi x_0$
成功確率 P_s	$\text{sech}(Ne^{\beta J})$	図 11 参照

図 13 (左図) は、稲垣等の実験データ[12] (図 4) を式(32)及び数値シミュレーションと比較した図である。 $t \rightarrow \infty$ では、実験データはシミュレーションに合致する一方、式(32)からはずれている。このことは、全てを取り込んだ数値シミュレーションはよく機能しており、飽和段階におけるドメイン壁の衝突ダイナミクスが、イジングマシンの性能を単純飽和仮定[式(25)]に比して向上させていること示唆する。

成功確率 P_s は、 $T_{\text{final}} \gg T$ なる時刻においてイジングマシンが基底状態を見つける確率を表わす。図 13 (右図) では、問題サイズ N と規格化ポンプレート $P = b/b_0$ の関数として成功確率をプロットしている。成功確率はポンプレートが発振しきい値に近いほど、システムサイズが小さいほど高い。数値シミュレーションの結果は、 $P_s = \text{sech}(N/\pi x_0)$ なる表式に大体一致している。この事は、成功確率は問題サイズ N と共に指数関数で減少するが、相関長 x_0 は立ち上がり時間 T を長くすることにより増加できることを示している。結果として、基底状態へ到達する時間は問題サイズの 2 乗でしか増加しない (多項式時間)。

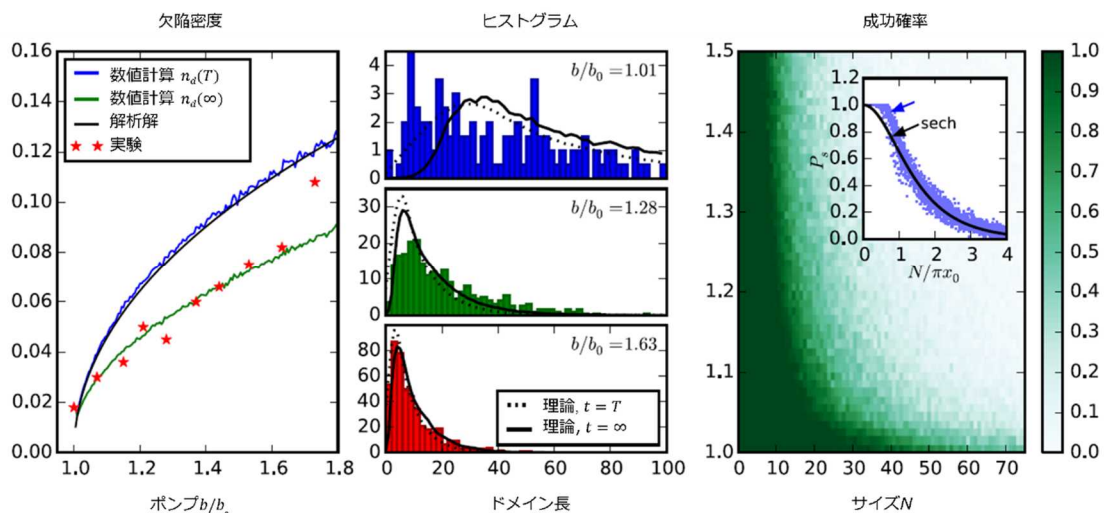


図 13 : 左図 : ポンプ b/b_0 対欠陥密度。数値計算及び解析モデル (式(32)) を実験データと比較している。中図 : $b/b_0 = 1.01, 1.28, 1.63$ についてのドメイン長のヒストグラム。バーは実験データを示す。右図 : システムサイズ N 及びポンプ b/b_0 に対する成功確率 P_s [7,12]。

2.8 多モードトンネリング

時分割多重化された OPO パルスは、基底であるガウス関数モードのみで発振するわけではなく、時に高次のエルミートガウス関数モードを励起しながら、0相から π 相へ、 π 相から0相へトンネリングすることがある。リング発振器のパルスくり返し時間に比べて十分に短いパルス時間幅を有する CIM では、総パルス数に比べて非常に大きな光の共振器モード（軸モード）がサポートされているため、このような多モードトンネリングが可能になる。

2.8.1 多モード理論

文献[13]に従って定式化する。共振器長 L の共振器の任意の地点における信号光演算子は次式で定義される。

$$\hat{E}_s(z, t) = \sum_m i\mathcal{E}\hat{s}_m(t)e^{i\omega_{s,m}(z/v-t)} + \text{H. c.} \quad (33)$$

ここで \mathcal{E} は単一光子の光電場振幅、 $\hat{s}_m(t)$ は信号光の消滅演算子である。 m 番目の共振器軸モードの周波数は $\omega_{s,m} = \omega_0 + m\Omega (m \in \mathbb{Z})$ で与えられる。共振器自由スペクトル幅は Ω 、利得の中心周波数は ω_0 である。ポンプ光を断熱消去した後の信号光演算子の時間発振は

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{s}_m}{dt} = & -\Upsilon_s\hat{s}_m - i(\Delta + m\Delta\Omega) + \sqrt{2\Upsilon_s}\hat{s}_{in,m} \\ & + K \sum_q f_{m,q}\hat{s}_q^\dagger\hat{p}_{in,m+q} - \frac{K^2}{4} \sum_{q,m} f_{m,q}f_{n,m+q-n}\hat{s}_q^\dagger\hat{s}_n\hat{s}_{m+q-n}. \end{aligned} \quad (34)$$

で支配される。ここで、 $\Upsilon_s = \Omega T_s/4\pi$ は信号光の振幅減衰率、 T_s は共振器からの透過率、 $\Delta = \omega_s - \omega_p/2$ は信号光-ポンプ光間の離調の大きさ、 $m\Delta\Omega$ はポンプ光の信号光へ対する到着時間ミスマッチ、 $K = 2\kappa\sqrt{L/c}$ は光パラメトリック結合係数である。位相ミスマッチパラメータ $f_{m,q}$ は2つの共振器軸モード(m, q)間で定義され、位相ミスマッチ角度の sinc 関数で与えられる。

軸モード間のパラメトリック結合の大きさは、マトリクス $\mathcal{L}_{m,q} = f_{m,q}\alpha_{m+q}$ で与えられる。 $f_{m,q}$ は離調パラメータ、 α_m はスペクトル成分の複素振幅である。高次モード(k)の波動関数（軸モード分布）はエルミートガウス型となり、

$$\psi_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{k! 2^k \sqrt{\pi} N_s}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m}{N_s}\right)^2} H_k \left(\frac{m}{N_s}\right) \quad (35)$$

で与えられる。 $H_k(m/N_s)$ は k 次エルミート関数、軸モード数 N は $N_s = (\Omega \tau_s)^{-1}$ で与えられる。

信号光の消滅演算子は、このエルミートガウス関数を用いて、 $\hat{s}_m = \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_{k,m} \hat{S}_k$ と表わされ、各軸モードの消滅演算子 \hat{S}_i は次式に従う。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}_i}{dt} = & -(\gamma_s + i\Delta)\hat{S}_i + \sqrt{2\gamma_s}\hat{S}_{in,i} \\ & -i\Delta\Omega \sum_{j,m} m\psi_{i,m}^* \psi_{j,m} \hat{S}_j + K \sum_{j,m,q} f_{m,q-m} p_{in,q} \psi_{i,m}^* \psi_{j,q-m}^* \hat{S}_j^\dagger \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{K^2}{4} \sum_{j,k,l,m,q,n} f_{m,q-m} f_{n,q-n} \psi_{i,m}^* \psi_{j,q-m}^* \psi_{k,n} \psi_{l,q-n} \hat{S}_j^\dagger \hat{S}_k \hat{S}_l \\ = & :-(\gamma_s + i\Delta)\hat{S}_i + \sqrt{2\gamma_s}\hat{S}_{in,i} \\ & -i\Delta\Omega \sum_j D_{ij} \hat{S}_j + K \sum_j G_{ij}(p_{in}) \hat{S}_j^\dagger - \frac{K^2}{4} \sum_{j,k,l} L_{ijkl} \hat{S}_j^\dagger \hat{S}_k \hat{S}_l \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 D_{ij} はポンプタイミングミスマッチ、 G_{ij} はOPA利得、 L_{ijkl} は信号光軸モード (i,j) ペアと (k,l) ペアの結合を表わす。コヒーレント・イジングマシンでは、 N 個のDOPOは所定の結合定数で相互に結合されている[14]。CIMにおけるOPOパルス間の結合を取り入れた(37)式の組が数値シミュレーションに使われる。

2.8.2 多モードトンネリングの描像

図14(a)に多モードトンネリングの描像を示す。単一モードOPOでは、巨視的な発振状態が $(0, \pi)$ 間で位相フリップを実現するためには、発振モードの励起振幅は一度ゼロに減衰されなければならない。発振しきい値より十分高いポンプレートで、これが起こることはまれである。一方、多モードOPOでは、 $(0, \pi)$ 間の位相フリップは、高次のエルミートガウス型の時空間モードを励起しながら容易に起こる。このメカニズムは、CIMが局所最適解から脱出して、基底状態を効率よく見つけ出すことを助ける。図14(b)に、この多モードトンネリングにより1次元イジングスピン鎖におけるOPOの位相がごく小さな結合($\xi = 0.008$)でも0相から π 相へフリップする様子を示す。基本ガウスモードの振幅は正からゼロをはさんで負へフリップしているが、高次のエルミートガウスモードが一時的に励起され、OPOパルスは一定の強度を保っている。詳細は他で発表される予定である[15]。

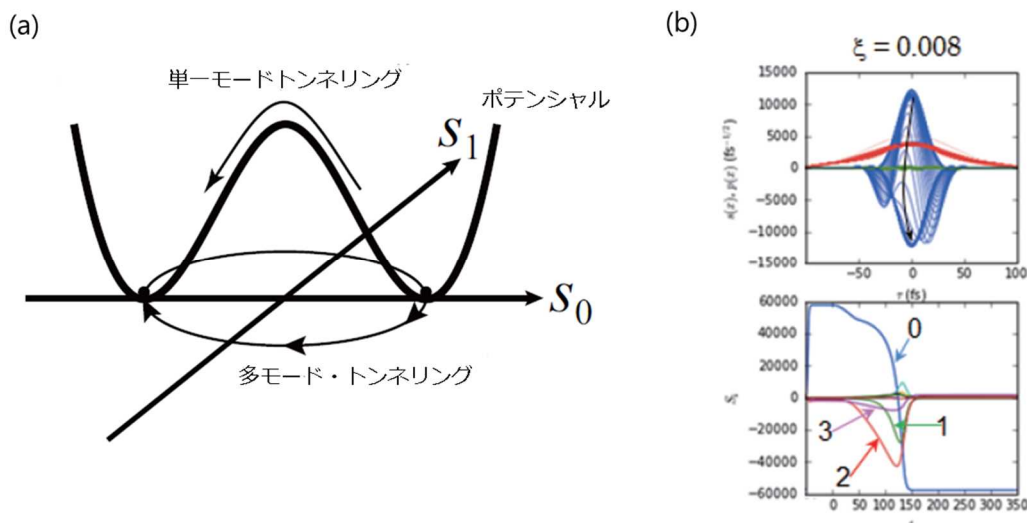


図 14 : (a) 単一モードトンネリングと多モードトンネリングの違い。(b)上図：多モードトンネリングによる OPO パルスが位相フリップする時のパルス振幅の変化。下図：基本ガウス波と高次エルミートガウス波の振幅変化 [11]。

2.8.3 数値シミュレーション

$N = 16$ の 1 次元イジングスピン鎖モデルに対する多モード理論によるシミュレーション結果を実験結果と比較した。それぞれの OPO パルスは $k = 1$ (基本ガウス波) から $k = 5$ (最大次数エルミートガウス波) までの多モードで展開した。ポンプ光強度は $t = 0$ でゼロから発振しきい値 (単独 OPO に対する) の 1.1 倍へステップ状に印加した。毎回、信号光子寿命の 100 倍の時間が経過した後、 $N = 16$ OPO の位相を読み出し、1000 回のシミュレーションから成功確率を算出した。表 3 に結合係数が 7.5% の時の成功確率を示す。強磁性結合、反強磁性結合 1 次元リングの場合、単一モードモデルでは成功確率はそれぞれ 0.593、0.599 であるのに対し、多モードモデルでは成功確率は両者共に 100% であった。このシミュレーション結果を表 1 に示した実験結果と比較すると、CIM 実機において多モードトンネリングが実際に起きていると推定される。また $N = 4$ 立方体グラフに対するシミュレーション結果と CIM 実験結果の比較からも同じ結論が導き出される [5]。

表 3 : 単一モードと多モード理論による 1 次元リング鎖と立方体グラフ問題に対する成功確率の数値シミュレーション結果 [11]。

	強磁性 1 次元リング鎖	反強磁性 1 次元リング鎖	立方体グラフ ($N = 16$)	立方体グラフ ($N = 4$)
単一モード	0.593	0.599	1.000	0.930
多モード	1.000	1.000	1.000	1.000

2.9 非縮退型光パラメトリック発振器に基づく XY マシン

統計物理学では、XY モデルは、ハミルトニアン $U(\sigma) = -(1/2) \sum_{ij} J_{ij} \sigma_i \cdot \sigma_j$ を備えたスピン $\sigma_i \in \mathcal{R}^2$, $|\sigma_i|^2 = 1$ のネットワークとみなされる。各スピンは、離散値ではなく、連続的な $U(1)$ の自由度を持つ。これは、等価的に、次式で表されるポテンシャルにある $\sigma_i = (\cos\phi_i, \sin\phi_i)$ の角度で定式化される。

$$U(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (38)$$

ところで、しきい値以上の非縮退 OPO も $U(1)$ の自由度を有する。そのため、XY マシンの動特性を非縮退 OPO に重ね合わせるの自然な流れとなる。

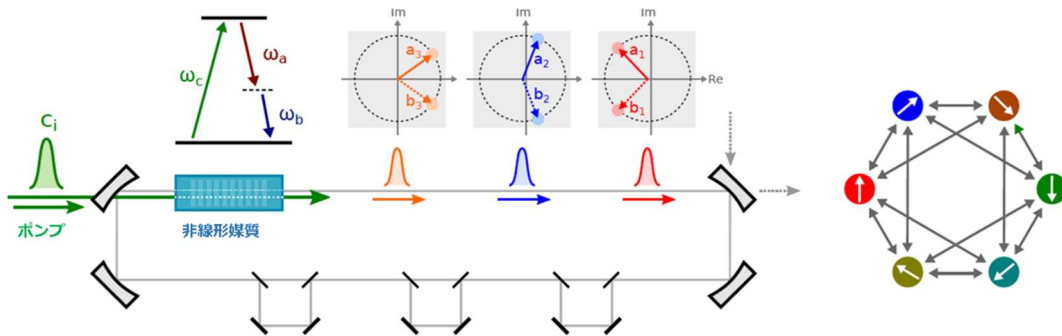


図 15 : 非縮退光パラメトリック発振器に基づく時分割多重 XY マシンの構成 [7]。

2.9.1 動作原理

2.1 節では縮退 OPO の非線形方程式を論じた。ここでは、 $\chi^{(2)}$ 光非線形性が縮退過程 $E(\omega_1) + E(\omega_1) \leftrightarrow E(2\omega_1)$ の媒介であった。位相整合状態が適当であると、これと同様に、 $E(\omega_1) + E(\omega_2) \leftrightarrow E(\omega_1 + \omega_2)$ という非縮退過程 ($\omega_1 \neq \omega_2$) が誘起される (図 15)。この場合、角周波数 ω_3 のポンプ光子が、量子相関を持ったシグナル光子 (角周波数 ω_1) とアイドラー光子 (角周波数 ω_2) の対に下方変換される。その様子は次の運動方程式で記述される。

$$\frac{da}{dz} = \epsilon b^* c \quad (39)$$

$$\frac{db}{dz} = \epsilon a^* c \quad (40)$$

$$\frac{dc}{dz} = -\epsilon ab \quad (41)$$

縮退の場合と同じく、ポンプ場 c は共鳴しない。一般性を失わずに、ポンプ場は実数と仮定することができる（系の位相基準をポンプ場とすることに相当）。 a と b の位相が同相または逆相、すなわち $ab \in \mathbb{R}$ の時に、シグナルは利得を得る。OPOにおいて (a, b) が定常状態であると、 $(ae^{i\phi}, be^{-i\phi})$ も定常状態となる。従って、非縮退 OPO は信号光、アイドラー光が位相共役の関係を保ちつつ、定常状態の輪を有する。スピン $\vec{\sigma}_i$ はこの位相で表現される。

上記運動方程式の解法は 3.1 節と同様である。一般に 3 光波混合問題は Jacobi 楕円関数を用いて解析的に解くことができるが[1]、 $ab \in \mathbb{R}$ を仮定すると、虚数部が損失を被る一方、実数部は利得を得るため、簡便な解の表式を得ることができる。この場合、光電場の絶対値についての運動方程式が次のように書き下される。

$$\frac{d|\bar{a}|}{ds} = \epsilon |\bar{b}| \bar{c}, \quad \frac{d|\bar{b}|}{ds} = \epsilon |\bar{a}| \bar{c}, \quad \frac{d\bar{c}}{ds} = -\epsilon |\bar{a}| |\bar{b}| \quad (42)$$

上式は、2.1 節と同様にして、近似なしに積分可能である。

OPO 状態が 2 つの光電場 (a, b) で定義されるとなると、2 つの可能性が考えられる。単一共鳴（シグナルのみが共鳴）と 2 重共鳴（シグナルとアイドラーが共に共鳴）である。ここでは、2 重共鳴について考える（なお、単一共鳴の場合も同様に取り扱える[7]）。シグナルとアイドラー周波数が十分に近く、一方だけを取り出すことができない場合、系は 2 重共鳴状態となり、両者に対する共振器の Q 値は同じとなる。その結果、 a と b は同じ大きさとなる。さらに、全体の位相が安定化されていると、 $a = b^*$ となる。 $a = b^*$ に直交する全てのモードは、利得媒質内では損失を受けるため、無視できる。

$b_{\text{in}} = a_{\text{in}}^*$ とおくと、式(42)は $da/dz = \epsilon a \sqrt{c_{\text{in}}^2 + a_{\text{in}}^2 - a^2}$ となる。この式より、スケーリング因子までは式(6)に一致する次の入出力関係が得られる。

$$a_{\text{out}} = a_{\text{in}} G_0^{\frac{1}{2} \sqrt{a_{\text{in}}^2 + c_{\text{in}}^2} / c_0} \left[1 + \left(G_0^{\sqrt{a_{\text{in}}^2 + c_{\text{in}}^2} / c_0} - 1 \right) \frac{1 - \sqrt{1 - \left(a_{\text{in}} / \sqrt{a_{\text{in}}^2 + c_{\text{in}}^2} \right)^2}}{2} \right]^{-1} \quad (43)$$

上式を微小入力場について線形化すると、 $a_{\text{out}} = G_0^{c/2c_0} a_{\text{in}}$ となる。従って、しきい値以上に励起された OPO の（パワー）利得は、縮退の場合と同じく、 G_0^{c/c_0} となる。 a_{in} の 3 次まで展開することにより式(7)の XY マシン版を導出することは難しくなく、ポンプがしきい値

近傍とすると、次式が得られる。

$$a_{\text{out}} = a_{\text{in}} \sqrt{G/G_0} \left[1 - \frac{G - (1 + \log G) |a_{\text{in}}|^2}{4c^2} + O((a_{\text{in}}/b)^4) \right] \quad (44)$$

縮退の場合と同じく、量子雑音は、入力ポンプ光電場に真空揺らぎを付け加え ($c_{i,\text{in}} \rightarrow c_{i,\text{in}} + w_i^{(c)}$)、さらにシグナル/アイドラーの損失を利得媒質の出力端に置かれた線形素子によるものとして取り扱う ($a_{i,\text{out}} \rightarrow a_{i,\text{out}} + \sqrt{1-1/G_0} w_i^{(a)}$ 、2重共鳴の場合はさらに $b_{i,\text{out}} \rightarrow b_{i,\text{out}} + \sqrt{1-1/G_0} w_i^{(b)}$) ことでモデル化することができる。但し、 w は、真空場の統計的性質 $\langle w^* w \rangle = \frac{1}{2}$ を備えた離散時間雑音過程である。

2.4 節と同様に、光結合は遅延線により導入される。正準遅延線ダイアグラム (図 5) の光経路を辿ると、真空場が 1 番目のビームスプリッターから共振器内に入り込んでいる。透過光は遅延されずに共振器に沿って進む一方、反射光は 1 パルス間隔分だけ遅延され、次のように a_{i+1} に寄与する。

$$a_i \rightarrow t_i t'_i a_i + r_i r'_{i-d} e^{i\phi_i} a_{i-d} + \left(t_i r_i w_i^{(J)} + r_i t_{i-d} e^{i\phi} w_{i-d}^{(J)} \right) \quad (45)$$

上式は 5 つのパラメータ $\{r, t, r', t', \phi\}$ を含んでおり、これらは原理的には時間的に変化し得る。

2 重共鳴領域における結合の実装は、シグナル光とアイドラー光とでパラメータ $\{r, t, r', t', \phi\}$ が別物なので、より困難である。 $a = b^*$ という条件を保つためには、次のように、ビームスプリッターの係数がシグナル/アイドラーに対して同じ、かつ位相が逆相である必要がある。

$$\begin{aligned} a_i &\rightarrow t_i t'_i a_i + r_i r'_{i-d} e^{i\phi_i} a_{i-d} + \left(t_i r_i w_i^{(J,a)} + r_i t_{i-d} e^{i\phi} w_{i-d}^{(J,a)} \right) \\ b_i &\rightarrow t_i t'_i b_i + r_i r'_{i-d} e^{-i\phi_i} b_{i-d} + \left(t_i r_i w_i^{(J,b)} + r_i t_{i-d} e^{-i\phi} w_{i-d}^{(J,b)} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

XY マシンの動特性はイジングマシンとほぼ同様であり、計算過程は 2 段階に分けられる。すなわち、シグナル/アイドラーが線形結合項に従う線形成長段階と、振幅が飽和する非線形飽和段階である。振幅が飽和してしまうと、時間変化する変数として残るのは位相 $\phi_i = \arg(a_i)$ となる。この段階では、系は、次のように、倉本モデルに従って時間発展する。

$$\frac{d\phi_i}{dt} \propto -\sum_j J_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) = -\frac{\partial U}{\partial \phi_i} \quad (47)$$

但し、 U は式(38)で与えられる倉本ポテンシャルである。それ故、飽和段階は倉本段階とも呼ばれる。

2.9.2 1次元スピン鎖

強磁性 1D 連結は位相 0 の 1 ビット遅延線により実装される (2.5 節参照)。 $a_i(t)$ の線形動特性は、イジングモデルと同様であり、フーリエ基底 $\tilde{a}_k(t)$ で展開することにより、差分方程式系が対角化される。初期量子雑音が巨視的なレベルまで増幅される。飽和 (立ち上がり) 時間 $T = (c/c_0 - 1)^{-1} \log(N_{\text{sat}})/\log(G_0)$ では、これらのフーリエ・モードの平均振幅は次式となる。

$$\sqrt{\langle |\tilde{a}_k(T)|^2 \rangle} = \sqrt{N_{\text{sat}}} e^{-2r^2 t^2 T (\pi k/N)^2} \quad (48)$$

主要なフーリエ・モードはゼロ・モードであり (1D 問題については XY 基底状態である強磁性相)、より高次のモードは、指数関数的 $e^{-2r^2 t^2 T (\pi k/N)^2}$ に抑圧される。飽和時には、状態の相関長は $x_0 = \sqrt{2T}rt$ となる。縮退の場合との鍵となる違いは、XY モデルでは、 a_i の 2 つの直交位相成分の両方ともに利得を得る点である。成長段階では、振幅 a_i は速やかに飽和する一方、位相は自由に動き回る。 $a_i(t) = a_{\text{sat}} e^{i\phi_i(t)}$ とおくと、位相変化は次の差分方程式に従う。

$$\phi_i(t+1) = [t^2 \phi_i + r^2 \phi_{i-1}] \quad (49)$$

上式は線形方程式であり、その境界条件は $\phi_N = \phi_0 + 2m\pi$ である。成長段階と同様に、上式を解く最も良い手法は、次のようにフーリエ級数を用いるやり方である。

$$\phi_x = \frac{mx}{N} + \sum_k \phi_k e^{2\pi i k x / N} \quad (50)$$

式(49)と(50)は一定利得項まで同じとなっている。従って、 ϕ_k の固有値は次のようになるであろう。

$$\lambda_k = \frac{\phi_i(t+1)}{\phi_i(t)} = t^2 + r^2 e^{-2\pi k/N} = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(rt)^2(2\pi k/N)^2}}_{\text{拡散}} \underbrace{e^{ir^2(2\pi k/N)}}_{\text{ドリフト}} \quad (51)$$

定常状態は、一定ワインディング (winding) $\phi_x = mx/N$ であろう。 $m = 0$ は XY ポテンシャルの全体最小解 (global minimum)、 $m \neq 0$ は励起状態である局所最小解、となる。十分に長い連結 ($N \gg x_0$) では、 $\geq x_0$ で分けられる連結の部分集合は無相関となり、この長さのスケールでは、位相はランダムウォークする。したがって、ワインディングの平均数は、通常は、 $\langle m^2 \rangle^{1/2} \approx 0.232\sqrt{N/x_0}$ (定数は数値的に求められる) に漸近する標準偏差で、ゼロ近傍に分布する。

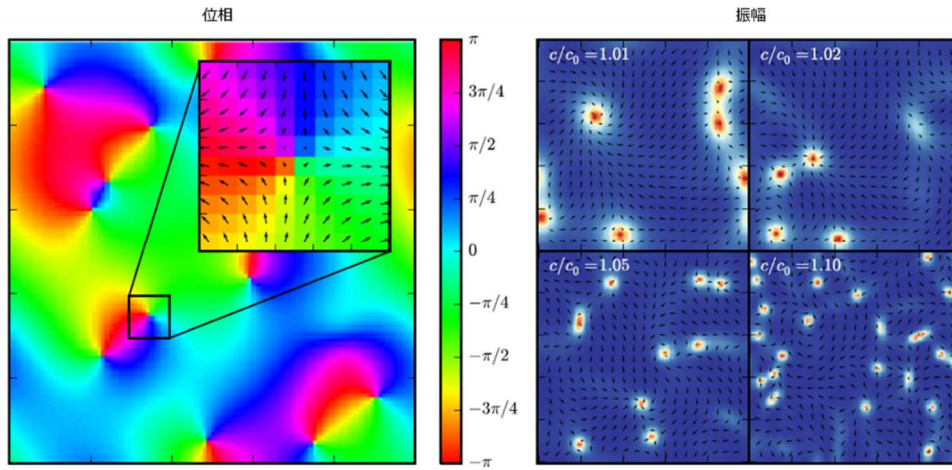


図 16 : 渦のある 2D XY モデルについての位相 (左図) と振幅 (右図) [7]。

この問題には 2 つの時間スケールが存在する。ひとつは、成長段階の時間である。全体最小に到達しようとする、成長段階は $x_0 \approx N$ となる程度に十分長くなければならない。 $x_0 = \sqrt{2T}rt$ なので、この要請より、成長段階時間は $T \geq (N/rt)^2$ となる。一方、局所最小解に到達するためには、倉本段階において位相励起がゼロに減衰にするまで待たなければならず、この時間も $O(N/rt)^2$ である。従って、全体あるいは局所どちらの最小にしても、 $O(N/rt)^2$ の時間だけ待つ必要がある。但し、全体最小を得る場合、光電場が飽和より弱い時には、この事象は成長段階で起こるはずである。

ここで記しておくべきもうひとつの重要な事柄は、非線形入出力写像 $a_{\text{in}} \rightarrow a_{\text{out}}$ の精確な形は問題ではないということである。成長段階では、この写像は線形化されるので、問題となるのは利得だけであり、これにより飽和時間が決まる。倉本段階では、振幅は位相変化よりも急速に飽和するので、 ϕ_i についての方程式は利得素子にさえ依存しない。このことは、1D イジング問題を解く際には、全ての XY マシンは等価であることを示唆するように思える。

2.9.3 2次元スピング子

局所最小解に関する限り、2次元スピング子は2方向の1次元スピング鎖と同様である。スピング子は、 $a_{i,i} \rightarrow a_{i,i+1}$ として結合された2つの座標 $a_{i,j}$ で指し示され、平衡解は一定ワインディング数 $a_{x,y} = e^{i(m_x x + m_y y)}$ の状態となる。成長段階も類似している。すなわち、フーリエ振幅は式(48)に従って成長し、自己相関は $e^{-(x^2+y^2)/2x_0^2}$ となる。

しかし、振幅が飽和し倉本段階に達すると、2Dモデルは全く異なる様相を示す。すなわち、トポロジカルな渦欠陥 (vortex defect) が形成され、動特性は渦間の相互作用に支配される (図 16 左図)。

無限格子では、孤立した渦は OPO の周回方程式に対する定常解となる。式(26)を導いた解析手法 (これはしきい値近傍に限り適用可能) に従うと、周回方程式は、次のように、利得と拡散を備えた非線形偏微分方程式に書き直される。

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \left[\frac{\log G_0}{2} (c/c_0 - 1) - \frac{G_0 - (1 + \log G_0) |a|^2}{4 c_0^2} \right] a + \frac{r^2(1-r^2)}{2} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial \xi_x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \xi_y^2} \right] \quad (52)$$

但し、 $\xi_x = x - r^2 t$ 、 $\xi_y = y - r^2 t$ 、である。 $\{a, x, y, t\}$ をスケールすると、上式は次の正準形に変換される。

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = (1 - |\bar{a}|^2) \bar{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (53)$$

局座標系 (r, ϕ) にすると、渦は、微分方程式 $\frac{1}{2}(A'' + r^{-1}A') + (1 - A^2 - 1/(2r^2))A = 0$ を満たす $A(t)$ を振幅とする解 $A(r)e^{\pm i\phi}$ となる。 $A(r) \approx \tanh(r)$ は振幅についての良い近似となる。

時刻 T における渦の数を計算するために、格子の1単位セルのまわりで位相が 2π 廻る確率を見つける。成長段階では振幅 a_i のどの組み合わせの同時確率も常に共分散が $\langle a_i a_j \rangle = e^{-1/2x_0^2}$ であるガウス形であるので、これはこの段階での直接的な計算で得られる。次元解析より、渦密度は次のように x_0^{-2} に比例して進行する[7]。

$$n_v \equiv P(\text{vortex} | a_{sq}) \approx \frac{0.159}{x_0^2} \quad (54)$$

渦の全数は Nn_v となる (N : 格子サイズ)。1Dリング (イジング及び XY マシンいずれも) についての検討と一致して、欠陥密度は x_0 の増加と共に減少し、飽和までの時間でスケールする ($x_0 \propto T^{1/2}$)。飽和までの時間は、系がしきい値に近いほど長いので、よりゆっくりとしたアニーリング (しきい値により近く励起) は、励起される渦がより少ない状態 (真の基底

状態により近い)へとつながる(図16右図)。

単独の渦は安定である一方、近接する渦は互いに相互作用する。XYモデルにおける渦についての古典的 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 理論[16]に依ると、相互作用はハミルトニアンであり、運動は引き込みまたは反発のいずれでもない。これに反して、コヒーレント XY マシンでは、相互作用は散逸的であり(逆に荷電された渦では)引き込む運動となる。

図17に、XYマシンが倉本段階に達した際の渦相互作用を図示する。任意の振幅の複素場について、渦度は $\nabla a^* \times \nabla a$ で定義される。(光電場が一定振幅である)ループの周りのワインディング数はループ内の渦度の積算に等しい。この渦度を位置と時間の関数としてプロットすると、渦度が非ゼロの領域は、位相が 2π で包む領域に対応する。左から右へプロットを辿ると、渦度が逆の渦が互いに引き込み合い、ついには消滅するのが見てとれる。このことは、上記で述べた渦の相互作用描像と一致する。

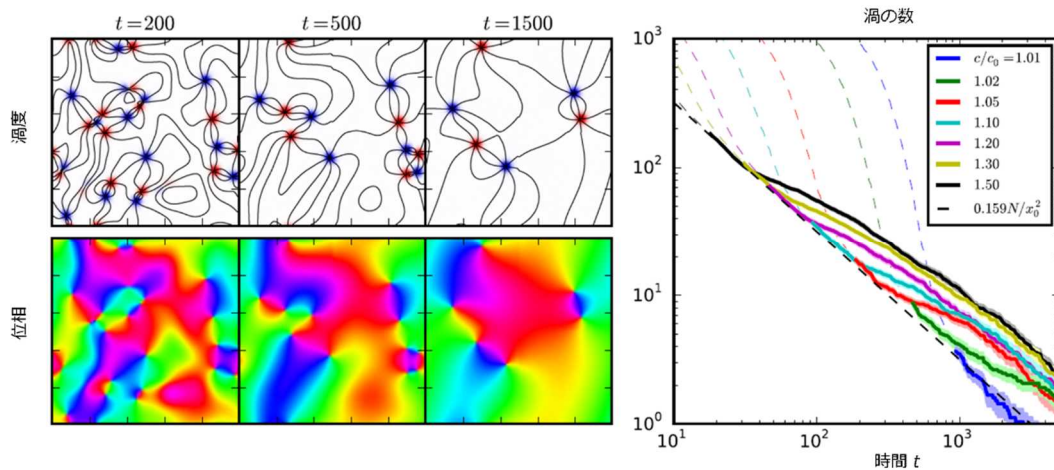


図17: 左図: 時間に対する渦度と位相 ($c/c_0 = 1.1$ を用いたシミュレーション)。右図: 時間及びポンプパワーに対する渦の数(太線は $t > T_{\text{sat}}$) [7]。

図17右図は、ポンプ光振幅を $c/c_0 = 1.01$ から 1.50 とした 100×100 XYモデルの渦の平均数である。この図では、「渦の数」は位相が $\pm\pi$ だけ廻る単位セルの数で定義している。飽和より十分下において、光電場振幅がランダムの際には、そのような「渦」の数は非常に大きい。成長段階の最後までには、渦数は $0.159N/x_0^2$ で安定となっており、これは式(54)に一致する。その後、系は倉本段階に入り、その動特性は渦-渦相互作用で駆動される。

XYモデルを非縮退光パラメトリック発振器ネットワーク、ファイバレーザネットワークで実現した報告がなされている[17,18]。

[1] J. A. Armstrong et al., Phys Rev. 127,1918 (1962).

- [2] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*. Academic Press (2003).
- [3] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* 23, 1963 (1981).
- [4] E. Arthurs et al., *Bell Syst. Tech. J.* 44, 725 (1965).
- [5] A. Marandi et al., *Nature Photonics* 8, 937 (2014).
- [6] R. Hamerly et al., *Phys. Rev. A* 94, 063809 (2016).
- [7] R. Hamerly et al., *Int. J. Mod. Phys B* 30, 1630014 (2016).
- [8] H. Goto, *Scientific Reports* 6, 21686 (2016).
- [9] S. Puri et al., *Nature Commun.* 8, 15785 (2017).
- [10] Y. Haribara et al., in *Principles and Methods of Quantum Information Technologies*, 251, Springer (2016).
- [11] K. Takata, et al., *Scientific Reports* 6, 34089 (2016).
- [12] T. Inagaki et al., *Nature Photonics* 10, 415 (2016).
- [13] G. Patera et al., *The European Physical Journal D* 56, 123 (2010).
- [14] Z. Wang et al., *Phys. Rev. A* 88, 063853 (2013).
- [15] A. Marandi et al., in preparation.
- [16] J. M. Kosterlitz et al., *J. Phys. C: Solid State Phys.* 6, 1181 (1973).
- [17] S. Tamate et al., arXiv:1608.00358 (2016).
- [18] Y. Takeda et al., arXiv:1705.03611 (2017).

英文執筆 : Ryan Hamerly, 山本 喜久

和訳 : 井上 恭

Version 1