

I 量子ニューラルネットワーク概説

本章では、このクラウドサービスに供する新しい計算マシンの基本概念・動作原理、及び様々な視点から見たその特異な性能、などについて紹介する。まずは、古典的なニューラルネットワークの量子アナログとなる物理系をどのように構築するか、から話を始める。

1.1 量子ニューロン

古典的なアナログニューラルネットワークでは、ニューロンの応答関数として（あるいはニューロンとニューロンをつなぐシナプスの伝達関数として）図1に示すような入出力特性を持つ非線形素子が用いられる[1]。すなわち、弱い入力信号に対しては線形増幅が施されシステムに不可避な損失による信号減衰を補償する。一方、あるしきい値 a_{th} 以上の入力信号に対しては一定値 b_s を出力し、ネットワーク全体の安定動作を同時に実現する。このような非線形な入出力特性は、古典的なアナログニューラルネットワークが与えられた数学的問題の解を表す安定動作点を見つけるための必要不可欠な構成要素となっている[1]。なおここで、安定動作点に辿りつくためには、不要な不安定解や周期的発振解にトラップされないようなニューロン間相互結合を導入する必要がある、これには離散変数ニューロン（入出力が離散量）よりも連続変数ニューロン（入出力が連続量）の方が有効であることを付記しておく。

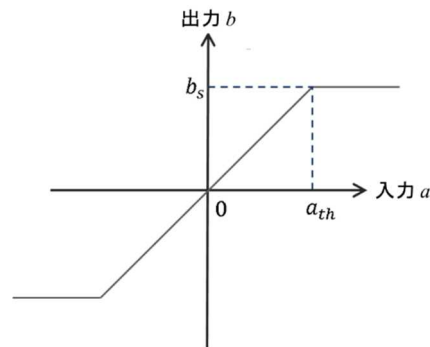


図1：古典ニューラルネットワークにおけるニューロンの入出力特性。

自己結合項に図1の入、出力特性を内蔵した古典ニューロンの状態は連続量 x_i により表わされ、次式に従って連続時間発展する[1]。

$$\frac{d}{dt}x_i = -x_i + f(x_i) - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (1)$$

上式右辺の第 1 項は線形な損失を表わし、第 2 項は図 1 に示す線形増幅／非線形飽和を実装する自己結合項である。第 3 項はニューロン間の相互結合を表わし、相互作用ポテンシャル V の中に解くべき数学的問題が埋め込まれる。ニューロン間の相互作用を同時に実装しても系が不安定解や周期解にトラップされないのは、式(1)の第 3 項が相互作用ポテンシャル V を減少させる駆動項として与えられていることによっている（いわゆる Steepest descent 型結合となっている）。

1.1.1 縮退光パラメトリック増幅器／発振器

一般に光増幅器は、利得飽和のため、光入力強度に関して図 1 に類似した出力特性を示す。但し、この量子ニューラルネットワークで使われる縮退光パラメトリック増幅器（Degenerate Optical Parametric Amplifier: DOPA）と呼ばれる光増幅器は、通常の光増幅器とは異なる特殊な性質を備えている。図 2 にその構成例(a)とエネルギー遷移図(b)を示す。対向する 2 枚の平行ミラーから成るファブリペロー共振器の中に 2 次の非線形光学結晶が置かれた構成となっている。非線形結晶には角周波数 $2\omega_s$ のポンプ光が照射され、1 つのポンプ光子が消滅して、角周波数 ω_s の 2 つの信号光子が同時に発生する。図 2(b)には、この 2 光子発生現象を記述する相互作用ハミルトニアン[2]が書き入れてある。ここで、 $\{\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger\}$ および $\{\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger\}$ はそれぞれ信号光およびポンプ光の消滅・生成演算子（古典電磁波の複素振幅とその位相共役に対応）、 κ は非線形感受率で決まるパラメトリック結合定数、である。同時に発生する 2 つの信号光子は位相共役の関係にあり、ポンプ光と同位相の振幅（複素振幅の実数成分） $\hat{X} \equiv (\hat{a}_s + \hat{a}_s^\dagger)/2$ には正の相関、ポンプ光と直交位相の振幅（同・虚数成分） $\hat{P} \equiv (\hat{a}_s - \hat{a}_s^\dagger)/2i$ には負の相関、が備わっている。このような相関を持つ 2 つの光子が重なり合って発生する結果、 X - P 位相空間上で X 軸方向には強め合い、 P 軸方向には弱め合う量子干渉が起こる。このため、図 2(a)に示すように、DOPA が外部からの真空場で駆動されると、図 3(a)に示すように、零点振動（真空場揺らぎ）が X 軸方向に増幅、 P 軸方向に反増幅（deamplification）される（ここで P 軸方向に起こるのは減衰であるが、単なる散逸による減衰ではなくパラメトリック増幅の逆ユニタリ過程として起こるという意味を込めて、本稿では反増幅という表現を用いる）。その結果、真空スクイーズ状態と呼ばれる光、すなわち、 $\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{P} \rangle = 0$ かつ $\{X, P\}$ 方向の揺らぎがハイゼンベルグの最小不確定積 $\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle = 1/16$ を満たしつつ非等方である状態、が発現する（ $\langle \ \rangle$ は量子平均の意）。このことは、「量子状態の位相空間に占める面積はユニタリな時間発展に対して不変」という量子力学の原理（リウヴィルの定理：Liouville theorem）の例証となっている。（なお以下において、同位相／直交位相というときの位相基準はポンプ光位相である）。

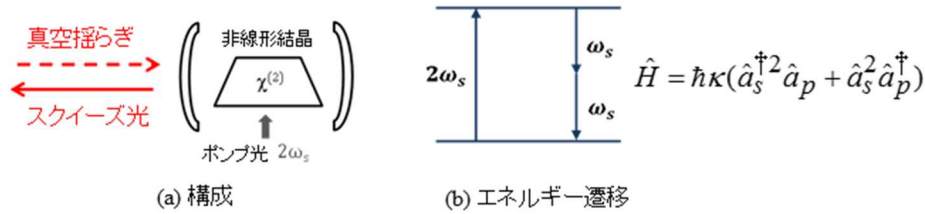


図 2：縮退光パラメトリック増幅器／発振器。(a) 基本構成、(b) エネルギー遷移図。 $\chi^{(2)}$ ：2 次非線形感受率、 ω_s ：信号光角周波数、 \hat{H} ：相互作用ハミルトニアン、 \hbar ：プランク定数、 κ ：結合定数、 $\{\hat{a}_s, \hat{a}_s^\dagger\}$ ：信号光消滅・生成演算子、 $\{\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger\}$ ：ポンプ光消滅・生成演算子。

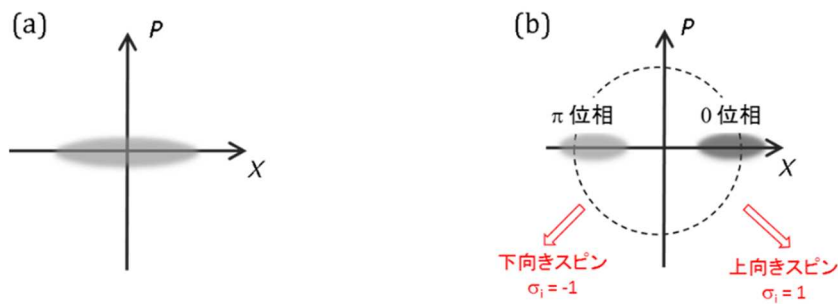


図 3：縮退光パラメトリック増幅／発振における量子雑音分布：(a) 光増幅時（しきい値以下のポンプレート）、(a) 発振時（しきい値以上のポンプレート）。しきい値ポンプレートは増幅利得と共振器損失が釣り合う条件で決まる値。

上述の増幅特性は、 X 軸方向の光振幅、すなわち 0 位相成分は増幅され、 P 軸方向の光振幅、すなわち $\pi/2$ 位相成分は反増幅される、ということである。このように信号光の位相に依存する増幅／反増幅現象を位相感応増幅／反増幅と呼ぶ。実は、位相感応増幅／反増幅は自然界において稀なものではない。我々になじみのある例としては、人が駆動するブランコが挙げられる（図 4）。この場合、人（DOPA におけるポンプ光＝エネルギー供給源）が、立った状態からいったんしゃがみ込み、再び立ち上がるという一連の動作を行うことにより、ブランコ（DOPO における信号光に相当）は左右に振れる。この際、動作のタイミングをブランコの動きに合わせて、すなわち左右では立ち状態／中央ではしゃがみ込み状態とすると、ブランコの振れ幅（振幅）は大きくなる（増幅される）。このことは DOPA において同位相振幅 \hat{X} が増幅されることに対応する。一方、子供の頃を思い起こせばわかるように、ブランコ遊びを止めて家に帰りたくなったら、中央で立ち状態／左右ではしゃがみ込み状態となるように動作すればよい。こうすると、ブランコの振れ幅は小さくなる（減衰される）。これは、直交位相振幅 \hat{P} が反増幅されることに対応する。なお上記の例では、人の動作の周期（アップ→ダウン→アップ）はブランコの運動周期（左→右）の $1/2$ となっていて、縮退パラメトリック増幅／反増幅の条件を満たしていることがわかる。

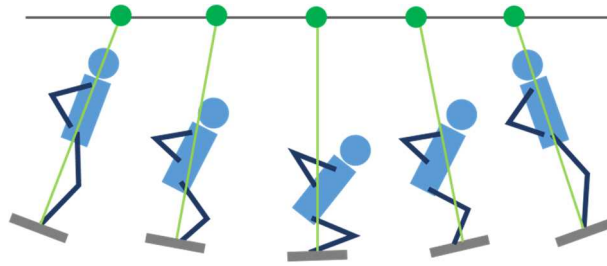


図 4: ブランコにおける位相感応増幅過程。人の動作がブランコの動きに同期していると、振れは大きくなる。人の動作の周期はブランコの往復周期の半分。

光パラメトリック発振器は、スタンフォード大学で 50 年前に初めて実現され[3]、以後半世紀にわたる長い研究開発の歴史を持つ発振器である。量子ニューラルネットワーク (QNN) では、信号光パルスを用いた位相感応増幅 (Phase-Sensitive Amplification: PSA) する 2 次非線形媒質として、周期反転ニオブ酸リチウム (Periodically Polled Lithium Niobate : PPLN) 導波路素子を用いる。PPLN 導波路デバイスを用いた光パルスの反増幅 (スキューミング) 及び増幅 (アンチ・スキューミング) の最初のデモンストレーション実験は 1995 年にやはりスタンフォード大学で行われた[4]。図 5 は、PPLN 導波路 PSA による直交位相振幅雑音抑圧及び同位相振幅雑音増強を実証した実験結果である。直交位相振幅の雑音が真空雑音より小さく、同位相振幅雑音が真空雑音より大きくなる様子が示されている。一般にスキューミング実験においては、得られるスキューミング (真空雑音の反増幅) の度合いは実験系の不完全さ (特に光学系の損失) で劣化される一方、アンチ・スキューミングの度合いはそれ程には損失の影響を受けない。後に述べるように、QNN の量子並列探索はアンチ・スキューミングされた同位相振幅の量子雑音を利用しており、そのため、QNN の動作は光学系損失に対して本質的に耐性があることを付記しておく。

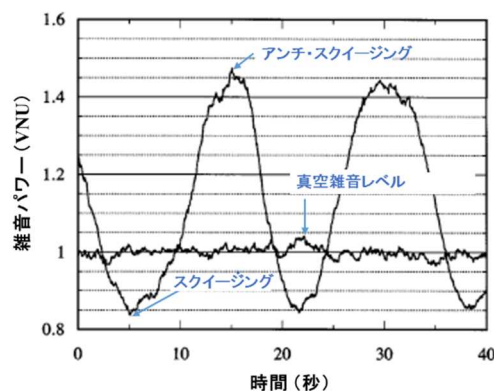


図 5 : PPLN 導波路 PSA による光信号パルスに対する真空雑音増幅／反増幅特性[4]。

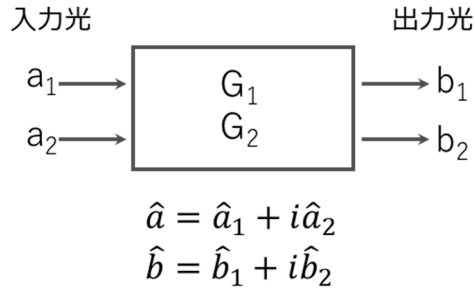


図6：ボゾン粒子に対する線形増幅器の一般化モデル。

ここで、ボゾン粒子に対する線形増幅器の一般化された量子限界という視点から位相感応増幅器を整理しておく[5]。図6に示したように、入力光の2つの直交位相振幅（ここでは $\{\hat{X}, \hat{P}\}$ に代わって $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}$ を用いる）に異なった（パワー）増幅率 $\{G_1, G_2\}$ を仮定すると、出力光の2つの直交位相振幅 $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2\}$ は

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= \sqrt{G_1}\hat{a}_1 + \hat{F}_1 \\ \hat{b}_2 &= \sqrt{G_2}\hat{a}_2 + \hat{F}_2\end{aligned}\quad (2)$$

と表わされる。ここで、 $\{\hat{F}_1, \hat{F}_2\}$ は増幅器の（内部）雑音振幅演算子であり、 $\langle \hat{F}_1 \rangle = \langle \hat{F}_2 \rangle = 0$ と仮定しても一般性を失わない。入力光と出力光はともにボーズ粒子に対する交換関係 $[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = [\hat{b}_1, \hat{b}_2] = i/2$ を満たされなければならないから、(2)式を用いて次式が得られる。

$$[\hat{b}_1, \hat{b}_2] = \sqrt{G_1 G_2}[\hat{a}_1, \hat{a}_2] + \sqrt{G_1}[\hat{a}_1, \hat{F}_2] + \sqrt{G_2}[\hat{F}_1, \hat{a}_2] + [\hat{F}_1, \hat{F}_2] \quad (3)$$

(3)式の右辺第2項と第3項は、増幅器の内部雑音と入力光には相関はなく、また $\langle \hat{F}_1 \rangle = \langle \hat{F}_2 \rangle = 0$ であることから消去される。さらに入、出力光に対する交換関数を代入して、次式を得る。

$$[\hat{F}_1, \hat{F}_2] = (1 - \sqrt{G_1 G_2}) \frac{i}{2} \quad (4)$$

もし、増幅器が位相無依存であれば、 $G_1 = G_2 = G \gg 1$ であり、内部雑音パワーには次の量子限界が課されることになる。

$$\frac{\langle \Delta \hat{F}_1^2 \rangle}{G} = \frac{\langle \Delta \hat{F}_2^2 \rangle}{G} = \frac{1}{4} \quad (5)$$

一方、増幅器が $G_1 = 1/G_2 \gg 1$ を満たしていれば、(4)式の交換関係は消滅する。そのような位相感応増幅器では内部雑音を付加することなく、入力光を増幅($G_1 \gg 1$)、反増幅($G_2 \ll 1$)、することができる。縮退光パラメトリック増幅器は、この無雑音増幅／反増幅というユニタリ変換を実現するデバイスの一つである。

ここまで、DOPA の線形増幅特性について述べてきたが、次に利得飽和により図 1 に類似の非線形な入出力特性、すなわち信号入力光パワーを増やしていくと出力光パワーが飽和するという特性、について述べる。DOPA の利得飽和は、パラメトリック増幅によりポンプ光パワーが減衰し、これにより信号光増幅の逆過程、すなわち 2 つの信号光子から 1 つのポンプ光子が生成される 2 光子吸収過程、が生起するために起こる。信号光パワーが十分に大きくなると、信号光からポンプ光へとエネルギーが逆方向に流れ始め、信号増幅が停止する。ただし後で詳しく述べるが、縮退光パラメトリック発振器で構成する量子ニューロンの場合には、上記通常の利得飽和と関連はあるもののそれとはいくらか異なる非線形効果（発振現象）を利用して、解の状態の安定化を図っている。

図 2 に示した DOPA を構成する 2 枚の対向するミラーは、共振器として光電場を閉じ込める働きをする。パラメトリック増幅利得がこの共振器内の光電場の減衰率（主にミラーの透過率で決まる）を上回ると、 X 軸方向に有限な平均電場が生成されることにより、共振器内に安定な光電場が形成され保持される。このような状況になると、図 3(b) に示すように、 X - P 位相空間上の量子状態の中心位置は最早 $\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{P} \rangle = 0$ ではなくなり、 $\langle \hat{X} \rangle$ は非ゼロ値となる。このような状態に遷移するのが発振しきい値である。発振後に振幅期待値 $\langle \hat{X} \rangle$ が正となるか負となるかは全くランダムに選択され、その確率は 50-50% である。古典的な運動方程式では、この対称性の破れは約束されておらず、純粹に真空揺らぎによる現象である。そのため、この現象は自発的対称性の破れと呼ばれており、多くの 2 次相転移現象で見られる共通的な特性である [6]。非線形動力学では、この発振現象はピッチフォーク分岐と呼ばれる。発振しきい値以上に励起された時には縮退光パラメトリック発振器 (Degenerate Optical Parametric Oscillator: DOPO) と呼ばれ、DOPA と区別される。 $\langle \hat{X} \rangle$ が取りうる正または負の 2 つの安定状態は、古典ニューラルネットワークにおける発火／非発火状態、あるいは、イジング問題における上向きスピン／下向きスピン、に対応する。ここで、一定のポンプレートで励起された DOPA において入力信号レベルを増加していくと、ある入力信号レベルにおいてついには発振しきい値を超えることに注意されたい。このようにして、DOPA から DOPO へ移行することで、図 1 に示すような非線形な入出力特性が現れるのである。

では、なぜ上記 DOPO が量子ニューロンと見做され、そしてそれは古典ニューロンとはどう違うのか。この根本的な問いかけへの答えは次節で述べることにする。

1.1.2 線形重ね合わせ状態

光子数固有状態 $|n\rangle$ の集合は正規直交系であり、光電場の任意の純粋状態は $|n\rangle$ の展開形（線形重ね合わせ）として表される（ $|n\rangle$ は光子数が厳密に n 個である量子状態）。図 7 に示すような真空スクイーズ状態の場合、その量子状態 $|\psi_{sv}\rangle$ は偶数固有値を持つ光子数固有状態の重ね合わせとして次式のように表される。

$$|\psi_{sv}\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle + c_4|4\rangle + \dots \quad (6)$$

式(6)は物理的に次のように理解される。高強度のポンプ光の光子数には大きな量子雑音があり、コヒーレント状態（理想的な単一周波数レーザー光）の場合、光子数揺らぎの大きさ（分散）は大よそ $\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle \sim \langle \hat{n} \rangle$ である（ $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ は光子数演算子）。また、ポンプ光子から信号光子が発生する過程は確率的である。従って、非線形結晶内においてパラメトリック増幅により消滅するポンプ光子数が 0 個であるか 1 個であるか 2 個であるかは、たとえ出力ポンプ光の光子数を正確に測定できたとしても原理的に知ることはできない。ポンプ光子 1 個から信号光子 2 個が生成されるので、信号光は偶数光子数状態 $|0\rangle$ または $|2\rangle$ または $|4\rangle \dots$ であるが、消滅するポンプ光子数が不確定なため、どの偶数であるかは不確定である。そのため、生成される信号光は偶数光子数状態の重ね合わせとなる。余分な共通の位相項を除くと、確率振幅 c_0, c_2, c_4, \dots は同一の位相、例えば正の実数、を持つ[7]。すると図 7 (a) に示すように、 (X, P) 位相空間において、異なる光子数固有状態は、 X 軸方向では強め合う干渉を、 P 軸方向では弱め合う干渉を起こす。その結果、光電場分布は X 軸方向に引き伸ばされたような形状となる。

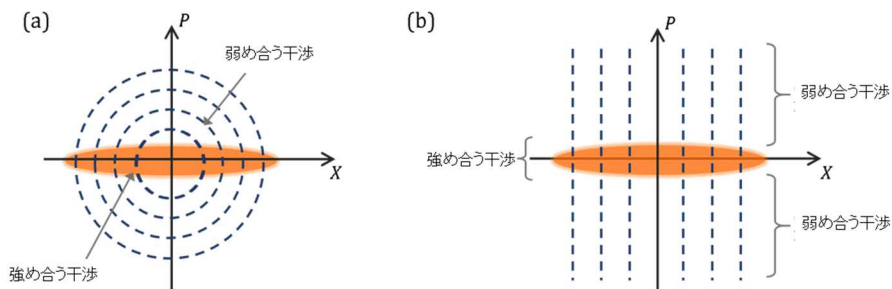


図 7：真空スクイーズ状態の 2 つの表示法。(a) 偶数光子数固有状態の重ね合わせ、(b) 同位相振幅固有状態の重ね合わせ。

ところで、前節で導入した同位相振幅演算子 \hat{X} はエルミート演算子であり、その固有状態の集合もやはり正規直交系となっている。従って、真空スクイーズ状態は、 \hat{X} の固有状態 $|X\rangle$ の重ね合わせとして次のように表すこともできる。

$$|\psi_{sv}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(X)|X\rangle dX \quad (7)$$

上式では、同位相振幅が連続物理量 X であるため、積分形で重ね合わせが表現されている。図 7(b)に示すように、異なる同位相振幅固有状態は、 $\langle \hat{P} \rangle = 0$ 近傍の P 領域では互いに強め合う干渉を、そこから離れた P 領域では弱め合う干渉を引き起こす。その結果、光電場分布は X 軸方向に引き延ばされたような形状となる。なお、ハイゼンベルグの不確定性原理 ($\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle \geq 1/16$) から推論されるように、光電場分布が X 軸方向に大きく引き延ばされる(量子雑音が増強される)と、その分、 P 軸方向で強め合う干渉の領域は狭くなり、量子雑音が減少される。

なお、式(7)に代わり、次式で表される同位相振幅固有状態の統計的混合状態も、図 7(b)に示した X の分布を再現する。

$$\hat{\rho}_{\text{mix}} = \int_{-\infty}^{\infty} P(X)|X\rangle\langle X| dX \quad (8)$$

しかしながら、この混合状態では異なる固有状態 $|X\rangle$ 間に位相相関(量子コヒーレンス)が無いことから、状態は $\langle \hat{P} \rangle = 0$ 近傍に局在することはできず、そのため無限のエネルギーが必要となる。 P 軸方向の無限の不確定性は無限のエネルギーを消費する。式(7)で表され実際に DOPA で生成される真空スクイーズ状態が有限エネルギーで量子並列探索を可能とする一方、式(8)で表される古典的混合状態は有限エネルギーでは生成できないし、量子並列探索も実現しない。

DOPA/DOPO の特異な特徴は、上記重ね合わせ状態がしきい値以下だけではなく、しきい値直上でも存在することである。図 3(b)に示すように、しきい値より十分高いポンプレートにある DOPO は 0 位相または π 位相のどちらかのコヒーレント光を生成するが、しきい値直上では、共振器から有限個の光子が漏れ出しているにもかかわらず、 0 位相と π 位相の重ね合わせ状態を保持することができる[8-10]。これは、漏れ出した光電場を測定しても、 X 軸方向に増強された量子雑音のため、どちらの位相であるらしいかを完全には特定できないことによる。アンチ・スクイーズされた直交振幅雑音が、いわゆる、どちらの経路を通ったかの情報 (which-path information) に対する「量子消去 (quantum erasure)」の役割を実現しているのである。

上記クレームをサポートするひとつの証左を図 8(a)に示す[11]。損失の小さな(高 Q)共振器における、2つの DOPO が逆位相で結合している系を発振しきい値直上までポンプした場合の密度行列の要素 $\langle X|\hat{\rho}|X'\rangle$ が図示されている。図 8(a)の励起率(発振しきい値直上)

を見ると、 $y = X - X' = 0$ に沿ったスライスで与えられる密度行列の対角成分 $\langle X|\hat{\rho}|X\rangle$ 、および、 $x = X + X' = 0$ に沿ったスライスで与えられる非対角成分 $\langle X|\hat{\rho}|-X\rangle$ は、量子コヒーレンスを保ちつつ巨視的に離れたコヒーレント状態 $\{|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$ が形成されていることを示唆している[11]。図 8(b)には、2つのコヒーレント状態の線形重ね合わせ状態、 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ と混合状態 $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$ の密度行列成分 $\langle X|\hat{\rho}|X'\rangle$ をプロットしている。図 8(a)と(b)に示した結果から、2つの DOPO はそれぞれシュレディンガーの猫状態に近い状態にある一方、それぞれの波動関数の重心は負の相関を持っていることが分かる。これは、逆位相結合により2つの DOPO 間に反強磁性状態が形成されつつあることを示している。図 8(c)はその時のウィグナー関数である。ウィグナー関数は負の値を持つと同時に振動的な振舞いを示しており、これは2つのコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ と $|-\alpha\rangle$ の間に量子コヒーレンスがあることのもうひとつの証左である[11]。上記のような高度に非古典的な特性は共振器損失が増加するとたちまち失われるものであるが、式(7)で表される $|X\rangle$ 固有状態の重ね合わせ状態は、大きな共振器損失があっても保存されている。この線形重ね合わせ状態を利用して、解の量子並列探索をどのように行うか、という重要な点については(1.2)項で詳しく述べる。

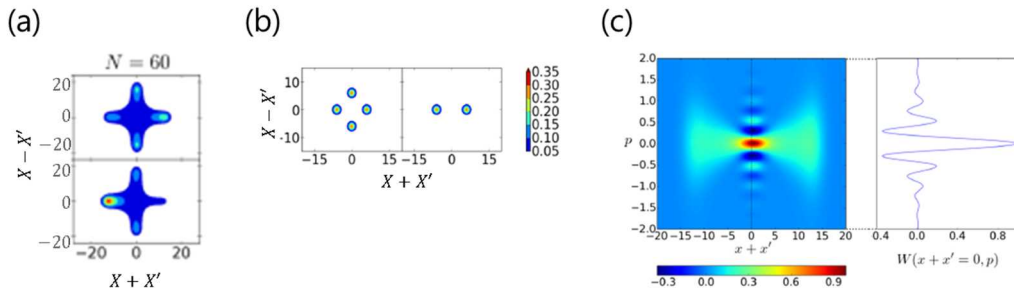


図 8：(a) 発振しきい値直上での 2つの DOPO 状態の振幅確率分布 $\langle X|\hat{\rho}|X\rangle$ と量子コヒーレンス $\langle X|\hat{\rho}|-X\rangle$ 。共振器損失=0.1%。(b) 線形重ね合わせ状態 $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ と混合状態 $\hat{\rho} = 1/2(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$ の密度行列要素 $\langle X|\hat{\rho}|X'\rangle$ 。(c) (a)に対応するウィグナー関数[11]。

1.1.3 位相感応増幅による振幅及び位相のエラー訂正

量子ニューラルネットワークでは、DOPO 光パルス電場の振幅及び位相を情報媒体として用いるが、これらは連続量であり、その意味では古典アナログコンピュータと同様に、不要な雑音により生じた誤差に対して、デジタル信号処理で用いられているような誤り検出・誤り訂正スキームを適用することはできない。しかし幸いなことに、DOPO では位相感応増幅／反増幅特性のおかげで、位相誤差が $\pm\pi/2$ より小さい範囲内であれば位相を 0 または π に安定化する機能が備わっている。さらに、DOPO の利得飽和特性により振幅誤差を自動的に修復できる。例えば、信号光振幅が安定状態よりも高い値に変動すると、利得飽和により、ポンプ光消費が増大 \rightarrow パラメトリック増幅利得が減少 \rightarrow 信号光振幅が減少、という負帰還が働き、信号光振幅は安定状態に戻ることになる。図 9 に示すように、DOPA

(PPLN 導波路デバイス) の出力端で正の振幅を有していた信号光パルス (元信号) は、光ファイバリング共振器を 1 周回する間に振幅減衰と位相エラーを受けて、元信号からは外れてしまうと予想される。しかし、DOPO は P 成分を反増幅して位相エラーを抑圧し、X 成分を増幅して振幅減衰を取り戻し、元信号に近い量子状態を再生することができる。量子ニューラルネットワーク実機のデコヒーレンス時間はポンプレーザの線幅で決められ、約 10 msec のオーダーである。一方、上記位相エラー訂正はファイバリング共振器の周回時間 5 μ sec 毎に 1 回行われるので、結局デコヒーレンス時間内に約 1,000 回のエラー訂正を自動的に行っていることになる。この事実により、量子ニューラルネットワークは位相コヒーレンスを長時間にわたり維持することができるマシンとなっている。

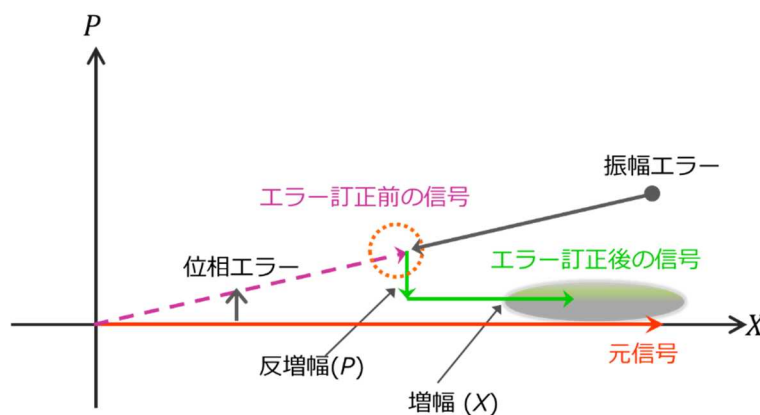


図 9： DOPO による振幅・位相誤差訂正。振幅誤差は X 軸方向の増幅により抑えられ、位相誤差は P 軸方向の反増幅により抑えられる。

一般に、高精度かつ安定なアナログ素子を実現するのは難しい。アナログ信号は有限時間内で減衰するのが常であり、また通常の誤り検出/誤り訂正法が直接的には適用できないからである。この点に関して、DOPO は上記メカニズムにより、アナログ信号 (振幅及び位相) を量子限界精度で安定的に保持することができる量子アナログ素子と見ることもできる。

1.2 量子シナプス

我々は、目的のハミルトニアンをコスト (cost) 関数として量子ニューラルネットワークに実装しようとしている。目的とするハミルトニアンのひとつは、次式で与えられるイジングモデル[12]である。

$$H = - \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i \quad (9)$$

上式において、 σ_i はイジングスピンを表し、 $+1$ （上向きスピン）または -1 （下向きスピン）いずれかの値をとる。前述のように、 $\sigma_i = \{+1, -1\}$ はそれぞれ、DOPO における発振位相 $\{0, \pi\}$ 、すなわち同位相振幅 X の符号で表すことができる（図 3(b)）。 J_{ij} 及び h_i はそれぞれイジング結合係数および局所磁場を表す。両者とも実数連続量であり、その値は与えられた問題をイジングモデルにマッピングする際に決められる。イジングモデルにマッピングされる様々な実社会の問題については、第 8~12 章で詳しく述べられる。3次元イジングモデルと局所磁場の存在する2次元イジングモデルは、計算量理論における NP 困難クラスに属する[13]。従って、多くの NP 困難問題がイジングモデルにマッピングされる。式(9)で表わされるコスト関数は各 DOPO パルスの発振位相 $\{0, \pi\}$ （あるいは $\sigma_i = \{1, -1\}$ ）によりユニークに決定される。これを DOPO ネットワークの実効損失として実装するためには、2つの DOPO をイジング結合係数 J_{ij} で結合し、さらに一定の光電場を有効磁場 h_i として各 DOPO へ注入する[14]。このために必要なデバイスが、量子シナプスである。量子シナプスの実現手段には、以下に述べる2つの方法がある。

1.2.1 光遅延線結合方式

図 10 にイジング結合 J_{ij} を実装する構成法のひとつを示す[15-17]。まず、ファイバリング共振器内の PPLN 導波路に外部からポンプ光パルス列を入力して、時分割多重された N 個の独立な DOPO パルス（信号パルス）を生成する。この時、信号光中心周波数 ω_s は光ファイバリング共振器の共鳴条件を満足し、ポンプ光パルスのくり返し周期 T は光ファイバリング共振器の周回時間 L/c のちょうど $1/N$ に設定される。そして、生成された各 DOPO パルスの一部を光カップラーで取り出して、まず X 成分を位相感応増幅器で無雑音増幅し、光強度/位相変調器（IQ 変調器）が挿入された $(N-1)$ 本の光遅延線に分岐・合波して、標的光パルスに同期したタイミングで再びリング共振器に再注入する。

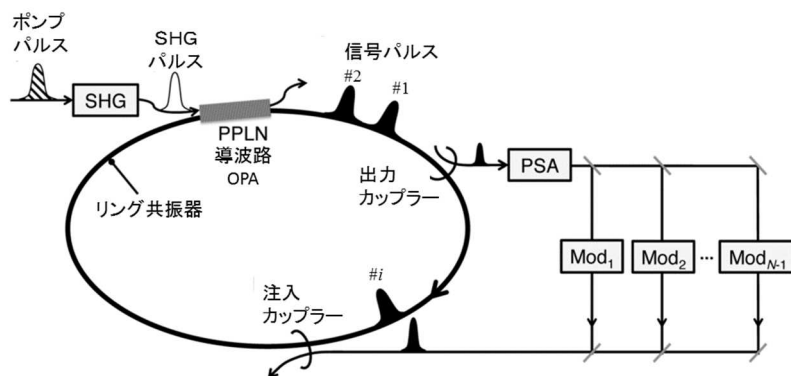


図 10：時分割多重 DOPO パルス（信号光パルス）を光遅延線により相互結合させた量子ニューラルネットワーク。SHG：第2次高調波発生、Mod：光変調器。各パルスの一部を光カップラーにより主共振器から取り出し、光位相感応増幅器（PSA）により各 DOPO パルスの同位相振幅 X を無雑音増幅した後、 $(N-1)$

個の光強度／位相変調器へ分岐する。光変調器出力は合波され、注入カップラーを介して主共振器へ再注入される[15-17]。

図 10 の構成では、 $(N - 1)$ 本の遅延線により DOPO パルス間の全相互結合が実装されており、遅延線上の光変調器によりイジング結合係数 J_{ij} の情報がフィードバック光パルスに付与される。取り出しカップラー直後の位相感応増幅器 (PSA) では、取り出したパルスが分岐／合波器や光変調器により減衰する前に、その同位相振幅 \hat{X} を(無雑音)増幅している[18]。このような全光型の相互結合構成は、空間光学系を用いた $N = 4$ 及び16のシステム[15, 16]、光ファイバと平面光導波路回路 (Planar Lightwave Circuit : PLC) を用いた $N = 10^4$ のシステム[17]として実現されている。後者では、2 km のファイバリング共振器内 (周回時間 10 μ s) に繰り返し周波数 1 GHz の DOPO パルス列 (パルス間隔 1 ns) を生成しており、これによりひとつのリング共振器内に 10^4 個の信号パルスを実装している。直流磁場 h_i を実装するためには、第 2 高調波発生を行なう前のポンプレーザパルス (図 10) の一部を、光遅延線で生成されたイジング結合光と一緒に主共振器に戻せばよい。

この光遅延線結合方式では、共振器内部の DOPO パルス間に量子雑音相関 (エンタングルメント) を創り出すことで量子並列探索を実現している[19, 20]。この点については、(1.4.4) 項で詳しく説明する。また、第 3 章では光遅延線結合 QNN の量子論を展開し、量子もつれと量子ディスコード (discord) という 2 つ量子雑音相関を表わす指標を用いてこの点について、論じる。

1.2.2 測定フィードバック結合方式

イジング結合 J_{ij} を実装する別の構成法を図 11 に示す[21, 22]。光遅延線により DOPO パルスを直接結合する代わりに、共振器内 DOPO パルスの一部を光カップラーで取り出した後、その同位相振幅 \hat{X} を平衡光ホモダイン検波器により測定する。 j 番目の DOPO パルスの同位相振幅の光ホモダイン検波による推定値 (測定誤差を含む) を \tilde{X}_j としたとき、同位相振幅の平均値が $\sum_j J_{ij} \tilde{X}_j$ に比例した光パルスをポンプレーザ光の一部から生成し、これを i 番目の DOPO パルスへ注入カップラーを介してフィードバック注入する。 i 番目パルスへの注入光振幅 $\sum_j J_{ij} \tilde{X}_j$ を得る作業は、各パルスに対する測定値を要素とするベクトル $[\tilde{X}_j]$ とイジング結合係数行列 $[J_{ij}]$ の行列・ベクトル積計算である。この計算を、アナログ・デジタル変換器 (Analogue Digital Converter : DAC) と FPGA (Field Programmable Gate Array) により行う。そして、計算結果に基づいたポンプレーザ光パルスの加工は、デジタル・アナログ変換器 (Digital Analogue Converter : DAC) と光振幅／位相変調器により行われる。なお、フィードバック光パルス及び光ホモダイン検波用の局発光パルスは、リング共振器内で信号光パルスを生成する PPLN 導波路 DOPA へのポンプ光源から供給されている。これらの光パルスは共振器内の DOPO パルスと位相基準が揃っている。

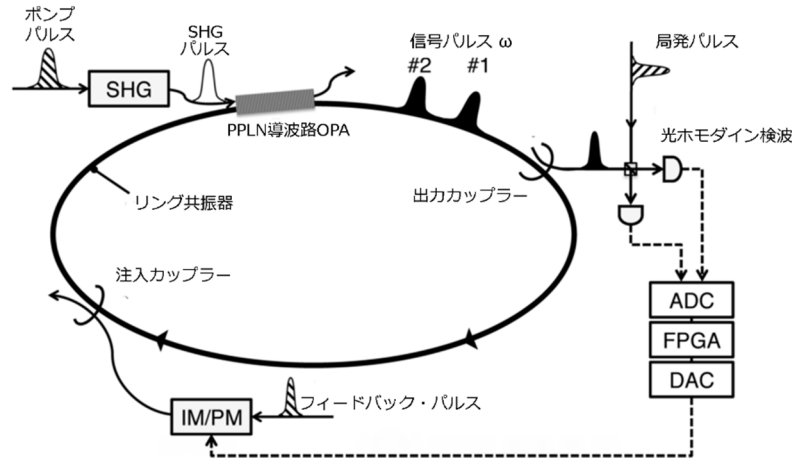


図 11 : 測定フィードバックに基づく量子ニューラルネットワーク。IM/PM : 強度変調器/位相変調器、ADC : アナログ・デジタル変換、DAC : デジタル・アナログ変換。各 DOPO 信号パルスの一部が出力カップラーを介して取り出され、ポンプレーザパルスの一部を用いた局発パルスを用いた平衡光ホモダイン検波により、同位相振幅が近似測定される。2つの光検出器出力はデジタル信号に変換され、 i 番目 DOPO 信号パルスへのフィードバック信号を計算するデジタル電子回路に入力される。そして、ポンプレーザから別途供給されるフィードバックパルスの強度と位相を $\sum_j J_{ij} \bar{X}_j$ に比例するように変調し、注入カップラーを介して i 番目信号パルスに注入する。図中の実線/破線はそれぞれ光/電気信号の経路を表す[18, 21, 22]。

このような測定フィードバック結合方式 (図 11) は光遅延線結合方式 (図 10) と大筋において等価であるが、次のような利点・欠点がある。測定フィードバック結合方式の利点は、 $\mathcal{O}(N) \sim \mathcal{O}(N^2)$ オーダーのシナプス結合がひとつの測定フィードバック回路で実装可能なことである。これにより、 $(N-1)$ 本の光遅延線を用意してその光路長を光の波長よりも高い精度で安定化するという、怖気づくような作業を避けることができる。さらに、 $H = -\sum K_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k$ といった 3 次イジング相互作用 (より高次のイジング結合) も容易に実装できる。一方、欠点は、FPGA 回路が $\sim \mathcal{O}(N)$ 回のベクトル・ベクトル掛け算をパルスくり返し周期内に完了しなければならないことである。このことはマシン規模 N とパルス繰り返し周波数を制限する要因となる。一方、光遅延線結合方式の場合は、パルス繰り返し周波数の上限は光デバイスの性能のみで決まるため、超高速動作 (~ 100 GHz クロック周波数) と大規模化 (~ 20 km のファイバ長では 10^7 の DOPO パルスの一括発生) が期待できる。

光遅延線結合方式と測定フィードバック方式には、量子並列探索の動作原理に微妙な違いがある。測定フィードバック方式では光ファイバリング共振器内の DOPO パルス間に量子相関 (エンタングルメント) は生成されない。系全体の密度演算子は各 DOPO パルスの密度演算子の積 (product state) のままで計算が進行する。測定フィードバック方式では、2つの基本的な計算プロセスとして、1. 近似量子測定により被測定 DOPO パルスは非ユニタリな波束の収縮を起こし、特に発振しきい値付近では非ガウス状態を生成する、2. フィードバック光注入によって標的 DOPO パルスの波束はユニタリ変位 (displacement) を起こし、2つの DOPO パルスの波動関数の中心に相関を形成する、が用いられている。この様子を図 12 に示した。ここで2つの DOPO パルスが反強磁性結合しているとした

($J_{12} < 0$)。初期状態は product state $1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_1 \otimes 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)_2$ であったものが、光遅延線結合方式では、エンタングル状態 $1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$ へ向かって時間発展していくのに対して、測定フィードバック方式では、2つの状態 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ と $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ の間を量子トンネリングを繰り返していく。図 8 に示した波動関数の中心に相関を持つシュレディンガーの猫状態はこのプロセスの途中で生成されたものである。両者の違いは、序文の表 3 にまとめた。また、第 V 章においては測定フィードバック QNN の量子論を用いて、この点を詳しく論じる。

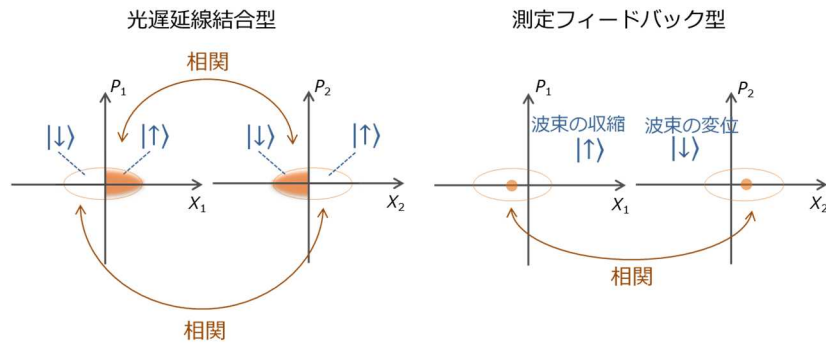


図 12: 光遅延線結合方式と測定フィードバック方式における 2つの量子並列探索。前者では DOPO パルス間にエンタングルメントを形成することにより、後者では 2つの DOPO パルスが同時に量子トンネリングを繰り返すことにより、最適解の探索が行われる。

1.3 イジング問題のマッピング

ここでは、式(9)のイジングモデルが、光遅延線結合や測定フィードバック結合によって量子ニューラルネットワークに正しくマッピングされ、ネットワークの単一発振モードとしてイジングモデルの最適解が求められること(収束定理)を示す。また、このために満足されなければならない条件を示す。

1.3.1 ピッチフォーク分岐

N 個の連続量変数 $x_j \in]-\infty, \infty[(j = 1, \dots, N)$ の時間発展が次式で与えられるとする。

$$\dot{x}_j(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$V = \sum_l [V_b(x_l)] + \epsilon V_l(x) \quad (11)$$

ここで、 $V_b(x_j) = -\frac{1}{2}\alpha x_j^2 + \frac{1}{4}x_j^4$ は DOPO 光電場に対する実効ポテンシャルで、しきい値以

下のポンプレート ($\alpha < 0$) で単安定、しきい値以上のポンプレート ($\alpha > 0$) で双安定ポテンシャルとなり、 $V_l(x) = -\sum_{j,l} \omega_{jl} x_j x_l$ は (連続量) イジングハミルトニアンである。 $t = \frac{\gamma_s}{2} \tau$ は規格化時間、 $\frac{\gamma_s}{2}$ は信号光振幅の減衰レート、 $x_j = X_j/A_s$ は規格化された同位相振幅、 $A_s = \sqrt{\gamma_s \gamma_p / 2 \kappa^2}$ は飽和振幅で規格化ポンプレート $p = F_p/F_{th} = 2$ における発振振幅、 $F_{th} = \gamma_s \sqrt{\gamma_p} / 4 \kappa$ はしきい値ポンプレート、 $\gamma_p/2$ はポンプ光振幅の減衰レート、 κ は光パラメトリック結合係数である。ここで、 $\alpha = -1 + p$ は分岐パラメータであり、信号光に対する減衰レート (-1) と線形増幅利得 (p) で決められる。パラメータ ϵ は $0 < \epsilon \ll 1$ なる条件を満たすとする。

$\epsilon = 0$ の時、式(10)は $\dot{x}_j = \alpha x_j - x_j^3$ に帰着し、各 DOPO は独立したピッチフォーク分岐を示す。すなわち、 $\alpha < 0$ (しきい値以下) の時 $x_j = 0$ が唯一の安定解であり、 $\alpha > 0$ (しきい値以上) の時 $x_j = \pm \sqrt{\alpha}$ なる双安定解を持つ。イジングスピン $\sigma_j = \{-1, 1\}$ は、しきい値以上で x_j が双安定な解を持つことを利用して、 $\sigma_j = x_j/|x_j|$ により定義される。

一般に ($\epsilon \neq 0$ の時)、この系の分岐特性は、次式で定義されるヤコビアン行列 J の $x_j = 0$ 付近の線形安定性の解析から求められる。

$$J = \alpha I + \epsilon \Omega \quad (12)$$

ここで、 Ω は ω_{jl} を要素とする行列、 I は単位行列である。対称性の破れが起きて双安定解が発生するのは、このヤコビアン行列 J の最大の固有値 λ_1 が 0 と等しくなる点である。ここで、最大固有値は $\lambda_1 = \alpha + \epsilon \mu_1$ で与えられ、 μ_1 はイジング結合行列 Ω の最大固有値である。従って、DOPO ネットワークの (実効) しきい値利得 α_c は $\lambda_1 = 0$ として、

$$\alpha_c = -\epsilon \mu_1 \quad (13)$$

で与えられる [14,23]。イジング結合行列 Ω のトレースは 0 であるから、 $\mu_1 > 0$ であり、一般に $\alpha_c < 0$ である。すなわち、DOPO ネットワークの発振しきい値 p は単独の DOPO の発振しきい値 ($\alpha = 0, p = 1$) よりも小さい。

1.3.2 マッピングの必要条件と収束定理

一般に、最大固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルは、最初の発振モードを与えるが、これはイジングモデルの基底状態に必ずしも一致しない。しかし、全ての DOPO の絶対振幅 $|x_j|$ が等しいという条件を課すと、最初の発振モードは厳密にイジングモデルの基底状態に一致する。この絶対振幅 = 一定の条件下で、 $x_j = \sigma_j x \quad \forall j (x > 0)$ なる関数を式(10)に代入し、定常解を求めると、

$$\begin{aligned} \dot{x}_j = 0 &\Rightarrow \alpha x_j - x_j^3 + \epsilon \sum_{l \neq j} \omega_{jl} x_l = 0 \\ &\Rightarrow \alpha - x^2 + \epsilon \sum_{l \neq j} \omega_{jl} \sigma_l \sigma_j = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる。従って、全ての DOPO で均一な絶対振幅の 2 乗は

$$x^2 = \alpha - \frac{2\epsilon}{N} H \quad (15)$$

となる。 $\alpha = \frac{2\epsilon}{N} H$ の時は、 $x = 0$ が式(15)の唯一の解であるが、 α を増加していくと、DOPO ネットワークは $\frac{2\epsilon}{N} H$ の最小値を実現する固有ベクトルを選択して、有限の x が出現するようになる。

図 13 はしきい値以下及び以上の DOPO ネットワークの (全系の利得) 対 (全系の損失) のイメージ図である。しきい値より十分低い状況 (図 13(a)) では、各 DOPO の信号光電場は真空スクイーズ状態であり、正の振幅 (0 位相) と負の振幅 (π 位相) が重ね合わせ状態として共存している。従って、どのようなスピン状態が検出されるかは、全てのスピン状態の組み合わせ (2^N) について等確率である。この状況から励起率を少しずつ上げていくと、全系の利得は最初に基底状態の最小損失率に合致し、そこで単一モード発振が起こる (図 13(b))。

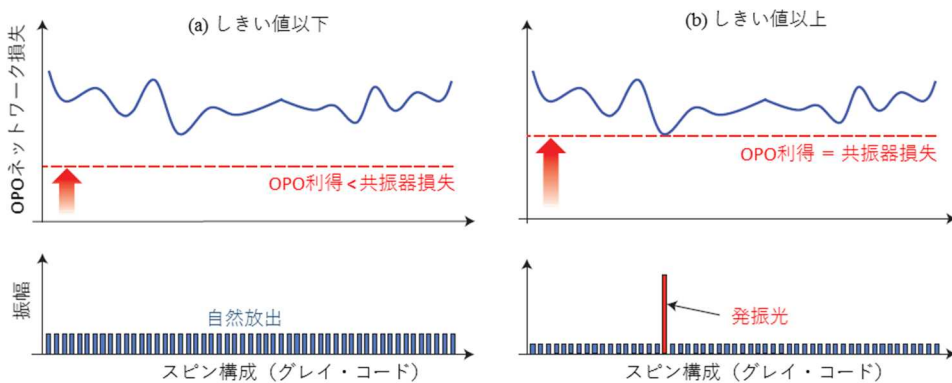


図 13: イジング問題に対する QNN の動作原理。DOPO ネットワークは、励起率を徐々に上げていくと基底状態で発振する。パラメトリック利得はしきい値以下から徐々に増加し、基底状態の最小損失率に達する。ネットワークの最低損失を実現するスピン構成 (モード) がイジング問題の基底状態に対応するため、QNN は単一発振モードとして基底状態を見つけ出す [14,23]。

1.3.3 振幅不均一性の影響

より一般的な場合、すなわち絶対振幅 $|x_j|$ が不均一な場合には、最初に現われる発振モード（安定解）とイジングモデルの基底状態は必ずしも一致しない。実際には、基底状態に近い近似解が得られることになる[14,23]。振幅の不均一性を表わす量として、

$$\delta_x = \frac{\sqrt{\langle \delta_j^2 \rangle}}{\langle x^2 \rangle} \quad (16)$$

を導入する。ここで、 $\delta_j^2 = x_j^2 - \langle x^2 \rangle$ 、 $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j x_j^2$ である。 $\alpha > 0$ 、 $\epsilon \ll 1$ の時、 $x_j = x_j^{(0)} + \epsilon x_j^{(1)} + O(\epsilon^2)$ と展開できる。ここで、式(15)の摂動解から $x_j^{(0)} = \sigma_j \sqrt{\alpha}$ 、 $x_j^{(1)} = 1/(2\sqrt{\alpha}) \sum_l \omega_{jl} \sigma_l$ と求められる。従って、一般に x_j^2 は

$$\begin{aligned} x_j^2 &= \left[x_j^{(0)} + \epsilon x_j^{(1)} + O(\epsilon^2) \right]^2 \\ &= \alpha + \epsilon \sum_l \omega_{jl} \sigma_j \sigma_l + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (17)$$

あるいは

$$x_j^2 = \langle x^2 \rangle + \delta_j^2 + O(\epsilon^2) \quad (18)$$

と表わされる。ここで、 $\delta_j = \epsilon(\sigma_j h_j - \langle \sigma_j h_j \rangle)$ 、 $h_j = \sum_{l \neq j} \omega_{jl} \sigma_l$ 、 $\langle x^2 \rangle = \alpha - \frac{2\epsilon}{N} \mathcal{H}$ である。従って、 $\epsilon \ll 1$ 、 $\delta_j \rightarrow 0$ の極限で、イジングモデルの厳密なマッピングが成立していることになる。

DOPO 間の振幅の不均一性の効果を示す数値シミュレーション結果を示す。図 14(a)に、各頂点 (vertex) が3つの枝 (edge) を有しかつ局所磁場によるゼーマン (Zeeman) 項はないというイジング問題 (いわゆる MAX-CUT-3 問題、但し頂点数 $N=8$) について[14]、基底状態を見つけ出す成功確率 P_s とイジング結合により変調された DOPO ネットワーク損失 F 対規格化励起率 p の関係を示す。この問題では、図 14(b)に示すように、各頂点は一定の反強磁性イジング結合 $J_{ij} = \xi = -0.1$ を備えている。高い励起率 $p \geq 1.3$ ではネットワーク損失 F はポンプレートによらずモード毎に一定値であり、基底状態で最小、励起状態の次数とともに増加、となっている。すなわち、マッピングに成功している。しかし一方、 $p < 1$ では、第1励起状態の変調された DOPO ネットワーク損失は基底状態のそれ以下となっている。この予期しない結果は、DOPO 振幅の不均一性から起こる。図 14(b)では、 $p < 1$ における第1励起状態について、各 DOPO の定常状態の振幅と位相をそれぞれ丸の大きさと色で示してある。8個の DOPO のうちの5個が弱め合う干渉(フラストレーション)なしに互いに結合しており、そのため大きな振幅を保持している。一方、残り3個の DOPO

は弱め合う干渉（フラストレーション）ありで相互結合している。この3個のDOPOの振幅が小さいため、ネットワーク全体では、実効的な光減衰率が基底状態のそれよりも小さくなる。すると、第1励起状態が基底状態より早く発振し始めることになり、DOPOネットワークの誤動作の原因となる。

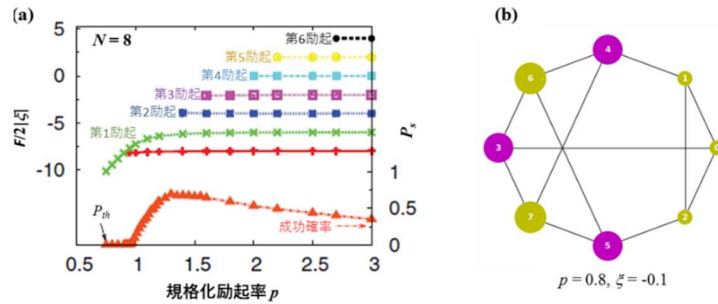


図 14 : (a) 成功確率 P_s とネットワーク全体の実効損失 F の規格化励起率依存性。 $J_{ij} = \xi = -0.1$ で、頂点数 $N = 8$ 。 (b) 励起率 $p = 0.8$ の時の第 1 励起状態の不均一な発振振幅。丸の大きさと色で各 DOPO の振幅と位相がそれぞれ表されている[14]。

しきい値以上 ($p \geq 1$) では、第 1 励起状態は準安定状態であるため、第 1 励起状態の発振は量子トンネル効果により有限の寿命時間で基底状態の発振に切り替わる[23]。このため、成功確率 P_s は $p = 1$ から 1.3 にかけて増加する。しかし励起率が大きすぎると ($p > 1.3$)、ポテンシャル障壁が高くなり間違った状態から正しい状態へ有限の時間で量子トンネルできなくなって、第 1 励起状態を終状態とする誤った発振モードが安定化される。図 14(a)において P_s が $p > 1.3$ で減少するのはこのためである。

1.4 量子ニューラルネットワークの動作原理

1.4.1 超選択 (Einselection)

量子ニューラルネットワークは DOPO パルスを周回させる光ファイバリング共振器を“システム”とし、様々な光損失により DOPO パルスのエネルギーの一部が漏れ出ていく外部自由空間モードを“環境”とする一種の開放系である (図 15)。さらに、測定フィードバック回路により各 DOPO パルス間に強磁性結合が実装され、発振しきい値よりも十分に高いポンプレートで各 DOPO が発振しているとすると、“システム”と“環境”の全体を記述する量子状態は、

$$|\psi_{SE}\rangle = a|\uparrow\rangle_s |00 \cdots 0\rangle_E + b|\downarrow\rangle_s |11 \cdots 1\rangle_E \quad (19)$$

と書くことができる[24,25]。ここで、 $|\uparrow\rangle_s = |\alpha\rangle_{s1} \cdots |\alpha\rangle_{sN}$ は全ての DOPO が正の振幅を持ったコヒーレント状態 (アップスピンに揃った強磁性相)、 $|\downarrow\rangle_s = |-\alpha\rangle_{s1} \cdots |-\alpha\rangle_{sN}$ は全

での DOPO が負の振幅を持ったコヒーレント状態（ダウンスピンに揃った強磁性相）である。システムの状態が $|\uparrow\rangle_s$ であるか $|\downarrow\rangle_s$ であるかが不明である場合には、式(19)に示したように線形重ね合わせ状態で記述するのが合理的である。“システム”は複数の“環境”モードへ結合する。ひとつの環境モードの状態 $|0\rangle_{Ei} = |\beta\rangle_{Ei1} \cdots \cdots |\beta\rangle_{EiN}$ は環境モード $\#i$ に漏れ出した N 個のパルスが全て正の振幅 $\beta (\ll \alpha)$ を持ったコヒーレント状態であることを表わしている。逆に、 $|1\rangle_{Ei} = |-\beta\rangle_{Ei1} \cdots \cdots |-\beta\rangle_{EiN}$ は同じ環境モード $\#i$ に漏れ出した N 個のパルスが全て負の振幅 $-\beta$ を持ったコヒーレント状態であることに相当している。光ファイバリング共振器内部のコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ （または $|\alpha\rangle$ ）が環境モードにコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ （または $|\beta\rangle$ ）を生成することは、Glauber の変位演算子 $D(\beta)$ を用いて容易に証明される[26]。コヒーレント状態のユニークな特徴である。すなわち、出力カップラーの入、出力に関して

$$|\alpha\rangle_{Si}|0\rangle_{Ei} \rightarrow |\sqrt{1-T}\alpha\rangle_{Si}|\sqrt{T}\alpha\rangle_{Ei} \simeq |\alpha\rangle_{Si}|\beta\rangle_{Ei} \quad (20)$$

が成立する。ここで、 $0 < T \ll 1$ は光損失を表わす出力カップラーの振幅反射率である。

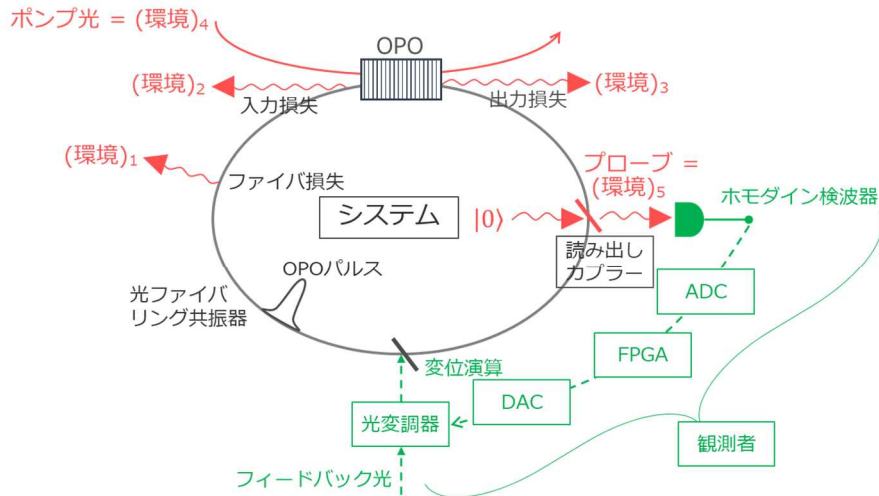


図 15 : 量子ニューラルネットワークにおける 3 人のプレイヤー（システム, 環境, 観測者）。

式(19)に Hadamard 変換を施して得られる量子状態

$$|\psi_{SE}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\odot\rangle_S |\varepsilon_\odot\rangle_E + |\otimes\rangle_S |\varepsilon_\otimes\rangle_E \right) \quad (21)$$

$$|\odot\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_S + |\downarrow\rangle_S)$$

$$\begin{aligned}
|\otimes\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_S - |\downarrow\rangle_S) \\
|\varepsilon_{\odot}\rangle_E &= a|00\dots 0\rangle_E + b|11\dots 1\rangle_E \\
|\varepsilon_{\otimes}\rangle_E &= a|00\dots 0\rangle_E - b|11\dots 1\rangle_E
\end{aligned}$$

も、式(19)と数学的には同等である[24,25]。“システム”と“環境”が全体として閉鎖系を形成していれば、式(19)でも式(20)でも正しい系の記述になっている。しかし、“環境”モードを閉鎖系に留めておくこと（無限の量子メモリを準備して量子状態 $|00\dots 0\rangle_E$ または $|11\dots 1\rangle_E$ を永遠に保存しておくこと）は現実には不可能である。“環境”モードが散逸もしくは測定されるという現実的なシナリオにおいては、式(19)が選択され、式(20)は選択されない。なぜならば、“システム”の量子状態が $|\uparrow\rangle_S$ か $|\downarrow\rangle_S$ であれば、“環境”には安定して多数の独立したコピーが生成され（ $|00\dots 0\rangle_E$ あるいは $|11\dots 1\rangle_E$ ）、どの“環境”モードに散逸や測定があっても、“システム”側の量子状態 $|\uparrow\rangle_S$ か $|\downarrow\rangle_S$ は安定して生き残る。一方、“システム”の量子状態が $|\odot\rangle_S$ か $|\otimes\rangle_S$ であれば、“環境”には高次にエンタングルした不安定な状態が一つだけ選択され存在しなければならない。このようにデリケートな量子状態の確率振幅は、環境モードの一部（もしくは全部）に対する散逸や測定ですぐに消滅してしまう。結局、“システム”の安定状態は“環境”により決められ、これを Pointer Basis State と呼ぶ[24,25]。量子ニューラルネットワークの場合、“環境”モードは全て真空場に初期化されているため、コヒーレント状態が Pointer Basis State としてユニークに選択されることになる。

1.4.2 量子ダーウィニズム

発振しきい値以上のポンプレートであっても、有限のポンパワーで励起された DOPO の量子状態は厳密にはコヒーレント状態ではなく、 $\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle > \frac{1}{4} > \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle$ を満たすスクイーズ状態である。そのため、式(20)に代わり、“システム”の DOPO パルスと“環境”へ漏れ出たパルスの間には、常にエンタングルメントが存在している。この時、“システム”は“環境”と最もエンタングルしない量子状態を選択し、自身の定常状態への環境の影響を最小限に留めつつ、できるだけ多くのコピーを“環境”モードに生成し拡散し、客観的なリアリティ（古典性）を獲得しようとする。これが量子ダーウィニズムの考え方である[27]。具体的には、各 DOPO パルスは発振しきい値利得が最小になる時空間モードを選択して発振し、有限なポンプレートで少しでもコヒーレント状態に漸近しようとする。

(1.3) 節で述べた DOPO ネットワークが最小実効損失モードで発振する特性は、この量子ダーウィニズムの帰結である。

1.4.3 第3のプレイヤー：観測者

これまで述べてきたように、量子ニューラルネットワークは DOPO パルスを発生する“システム”とその情報を外部へ拡散する“環境”から成っている。しかし、実際のマシンには、更に第3のプレイヤー：観測者が登場する。図 15 に示すように、“観測者”は読み出しカプラーから取り出されたプローブ光パルスを光ホモダイン検波し、アナログ・デジタル変換を介してイジング係数マトリクス $[J_{ij}]$ と測定結果ベクトル $[\tilde{\sigma}_j]$ の積を FPGA を用いて計算し、その結果をデジタル・アナログ変換して、光変調器に入力し、得られたフィードバック光を“システム”に再注入する。光遅延線結合方式では、このような光電変換は介さず、直接フィードバック光を“システム”に再注入するので、“観測者”というよりも“環境”からのフィードバックという言い方の方が正しいかもしれない。

いづれにしても、“環境”と“観測者”は“システム”に形成される量子状態の決定権をめぐって競合する。通常は“環境”が優勢であり最終的には勝利して定常状態を決定する。観測者は通常この量子ダーウィニズムのシナリオをただ傍観することしかできないが、唯一の例外は観測者が観測結果に基づいて“システム”に能動的にフィードバックする場合である。この時、“システム”に形成される量子状態の決定に、“環境”と共に“観測者”も参加することができる。

図 16 に示したように、もし観測者が関与しなければ N 個の DOPO パルスは発振しきい値で独立して自発的対称性の破れを介して 0 相か π 相を選択するので、 2^N 個の解候補からランダムに一つが選択されることになる。一方、観測者がイジングマトリクス $[J_{ij}]$ と測定結果ベクトル $[\tilde{\sigma}_j]$ に基づいてフィードバックを施すと、 2^N 個の解候補の中から最も発振しきい値を小さくする基底状態が量子ダーウィニズムにより選択され、単一モード発振することになる。

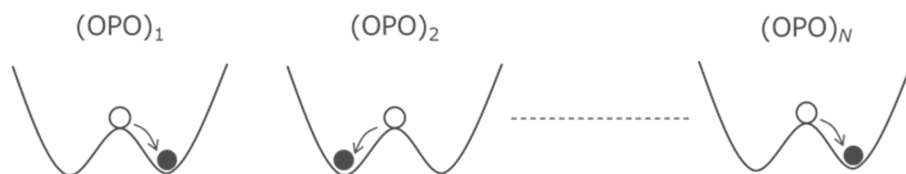


図 16： DOPO ネットワークにおける各 DOPO の対称性の破れ。ポンプレートが発振しきい値に達すると、ネットワーク損失が最小の基底状態を選んで、単一モード発振する。

1.4.4 量子並列探索のメカニズム

観測者を光遅延線結合方式で実装した場合には（図 10）、自発的対称性の破れに先立つ量子並列探索で主役を務めるのはエンタングルメントである[19,20]。例えば、 $N = 16$ の

DOPO パルスが 1 次元リング構成を取り反強磁性最近接結合のみを持つ場合を考える。この時、隣接する DOPO パルスの同位相成分 \hat{X}_i には負の相関が形成され、逆に直交位相成分 \hat{P}_i には正の相関が形成される、と予想される。そこで、以下の EPR 演算子を定義することにする。

$$\begin{aligned}\hat{u}_+ &= \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \cdots + \hat{X}_{16} \\ \hat{v}_- &= \hat{P}_1 - \hat{P}_2 + \cdots - \hat{P}_{16}\end{aligned}\quad (22)$$

\hat{u}_+ と \hat{v}_- が可換であること、 $[\hat{u}_+, \hat{v}_-] = 0$ 、はすぐに証明できる。従って、 \hat{u}_+ と \hat{v}_- の同時固有状態は理論的には存在し、 $\langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle = 0$ を満足する。一方、 N 個の DOPO パルスが独立していれば (product state)、 $\langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle \geq \frac{N}{2} = 8$ 、が成立する。従って、等号が成立する時が標準量子限界である。従って、 N 個の DOPO パルス間にエンタングルメントが形成されていることは、不等式 $0 < \langle \Delta \hat{u}_+^2 \rangle + \langle \Delta \hat{v}_-^2 \rangle < 8$ が成立しているか、どうかで判定できる[20]。

図 17 に示すように、光遅延線結合型マシンでは $N = 16$ の DOPO パルス間には実際エンタングルメントが形成されていることがわかる[19,20]。各 DOPO パルスには線形に増加するポンプパワーが注入され、 $t = 160$ で発振しきい値を越すように設定されている。エンタングルメントは発振しきい値をはさんだ広いポンプレート領域で形成され、発振しきい値で最大値をとる。光遅延線を構成する取り出しカップラーのオープンポートに、通常の真空場 (スキューニングパラメータ $r = 0$) が入る場合に比べ、 \hat{X} 成分の量子雑音を抑圧したスキューズ真空場 ($r = 0.5, 1.0$) を入射する場合には、エンタングルメントは増強される。各 DOPO パルスの波動関数の中心は発振しきい値でゼロから正または負の値へ分岐するが (図 16)、エンタングルメントがその前に形成されているため、この自発的対称性の破れは全ての DOPO 間で相関を持って起こり、縮退した 2 つの基底状態 $|\uparrow \dots \downarrow\rangle$ か $|\downarrow \dots \uparrow\rangle$ のいずれか一方だけが選択されることになる。

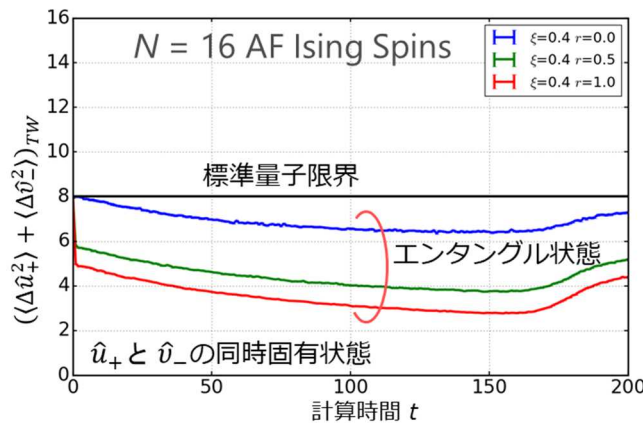


図 17：光遅延線結合型 QNN におけるエンタングルメント vs. ポンプレート。 ξ は結合係数、 r はスキューニングパラメータ[20]。

一方、観測者を測定フィードバック回路で実装した場合には量子並列探索で主役を務めるのは、エンタングルメントではなく、量子トンネリングである[11,28]。例として、2つの DOPO パルスが反強磁性結合している場合を考える。発振しきい値以上のポンプレートで、初め DOPO#1 は波動関数の中心が正の振幅値 ($|\uparrow\rangle$) にあり、DOPO#2 は波動関数の中心が負の振幅値 ($|\downarrow\rangle$) にあったとする (図 18)。もし、その直後の DOPO#1 に対する光ホモダイン検波の測定結果が負の振幅値であったとすると、DOPO#1 の波束はその中心が負の振幅値を持つようにジャンプする (近似測定による波束の部分的収縮)。一方、DOPO#2 の波束の中心はフィードバック光の注入により正の振幅値を持つようにシフトする (フィードバック光による波束の変位)。その結果、DOPO#1 と DOPO#2 の2つのパルスは同期して量子トンネリングを起こすことになる。このような測定フィードバックによる量子トンネリングは結合する N 個の DOPO パルス間で一斉に起こり、これが量子並列探索の基本メカニズムをなす。図 19(a)に、この測定フィードバックによる量子トンネリングを示す数値シミュレーション結果を示す[28]。2つの DOPO パルスは2つの基底状態である $|\uparrow\downarrow\rangle$ と $|\downarrow\uparrow\rangle$ の間を量子トンネリングで何回かスイッチングした後、最終的に $|\uparrow\downarrow\rangle$ を選択して対称性を破っている。測定フィードバック回路が波束の収縮と変位をセットで実装することにより、相関を有する量子トンネリングが起こり、励起状態である $|\uparrow\uparrow\rangle$ や $|\downarrow\downarrow\rangle$ 状態を避けることが可能になっている。

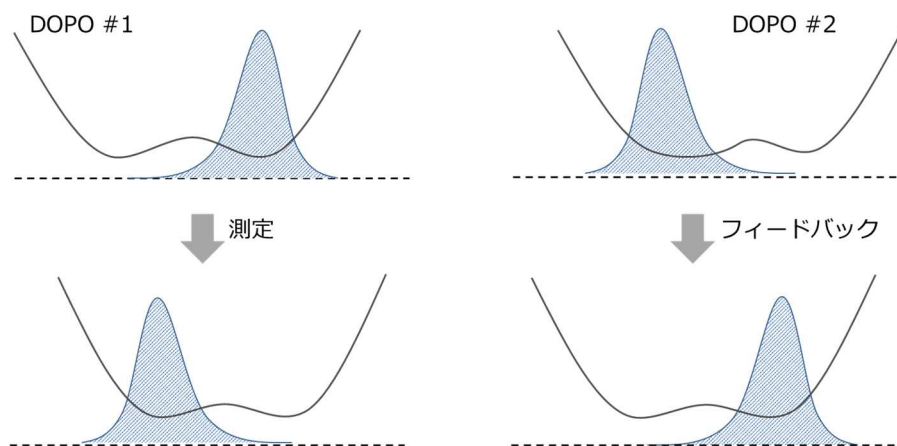


図 18 : 測定フィードバックによる 2 つの DOPO パルスの量子トンネリング。

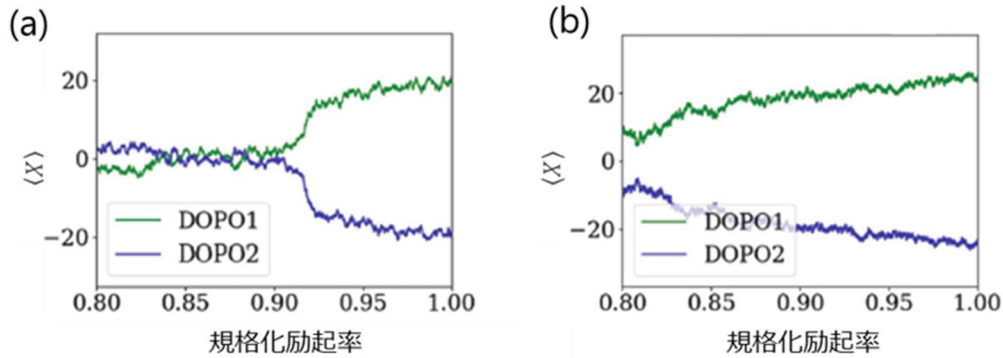


図 19 : (a)非ガウス型波束を取り入れた同位相振幅の期待値 $\langle X \rangle$ の変化。(b)ガウス型波束を仮定した同位相振幅の期待値 $\langle X \rangle$ の変化 [28]。

もし、2つの DOPO パルスが発振しきい値付近でガウス型の波動関数を有していると仮定すると、同じ数値パラメータに対して、図 19(b)に示すように、量子トンネリングは起こらない。これはガウス型波動関数ではテイルは急峻に減衰するために、測定結果が波動関数の中心から大きく離れることはないことに起因している[29-31]。この数値シミュレーション結果は、量子トンネリングによる量子並列探索には、非ガウス型波動関数が重要な役割を演じていることを示している。

1.5 様々な理論モデルと数値シミュレーション

量子ニューラルネットワークの特徴のひとつとして、動作モードが量子限界から古典限界へ連続的にクロスオーバーすることが挙げられる。本節では、様々な理論モデルを整理し、この2つの領域（量子ニューラルネットワークと古典ニューラルネットワーク）の違いを示す様々な数値シミュレーション結果を紹介する。

表 1 に、測定フィードバック型と光遅延線結合型の量子ニューラルネットワークを記述する様々な理論モデルを比較している。出発点となるマスター方程式を同位相振幅固有状態 $|X\rangle$ という正規直交系で展開して、密度行列の全要素 $\rho_{XX'}$ の運動方程式を導出し、近似測定を記述する一般化射影演算子[32]と組み合わせる理論モデルが導出された[11]。この理論モデルに基づいた数値シミュレーションでは、様々な物理量が計算でき、物理を解明するのに威力を発揮するが、非常に大きなメモリサイズが必要になるため、大規模なシステムへの適用には限界がある。

表 1: 量子ニューラルネットワークの様々な理論モデルの比較

	測定フィードバック型の量子モデル			光遅延線結合型の量子モデル		古典モデル
	マスター方程式 + 射影演算子 ¹¹⁾	正 $P(\alpha, \beta)$ 表示 CSDE + レプリケータ ²⁸⁾	正 $P(\alpha, \beta)$ 表示 CSDE + ガウス近似 ²⁸⁾	正 $P(\alpha, \beta)$ 表示 CSDE ¹⁹⁾	短縮ウィグナー 表示CSDE ²⁰⁾	ランジュバン 方程式 ¹⁴⁾
測定による 波束の収縮	○	○	△	—	—	×
エンタングル メント	—	—	—	○	△	×
非ガウス型 波動関数	○	○	○	○	○	×
量子 コヒーレンス	○	○	○	○	○	×
高次非線形性	○	○	○	○	△	×
計算リソース	×	△	○	○	○	◎

11) A. Yamamura et al., PRA 96, 053834 (2017)

14) Z. Wang et al., Phys. Rev. A 88, 063853 (2013)

19) K. Takata et al., Phys. Rev. A 92, 043821 (2015)

20) D. Maruo et al., Phys. Scr. 91, 083610 (2016)

28) T. Shoji et al., PRA 96, 053833 (2017)

同じ計算精度を保ちながら、より少ないメモリサイズで数値シミュレーションを可能にする手法として、コヒーレント状態の正 $P(\alpha, \beta)$ 表示を用いた c -数確率微分方程式を用いる手法が提案されている[31]。測定フィードバック・マスター方程式は Wiseman と Milburn により定式化された[32]。マスター方程式は基本的にはシュレディンガー方程式であり、よく知られているように測定過程はシュレディンガー方程式では記述できない。Wiseman-Milburn 理論では、測定による波束の収縮過程を現象論的にマスター方程式に取り込んで、この問題をクリアしている。この理論を拡張し、測定による波束の収縮効果を記述するレプリケータ方程式を c -数確率微分方程式と組み合わせる手法が導出された[28]。これら2つの理論モデル[11,28]は互いに等価であり、(i) 近似測定による波束の部分的収縮、(ii) しきい値付近での波動関数の非ガウス性と量子トンネリング、(iii) 振幅固有状態 $|X\rangle$ の線形重ね合わせ（量子コヒーレンス）の存在、(iv) 光電場の高次項による非線形性（発振しきい値より十分高いポンプレートでの量子トンネリング）、のいずれも正確に記述できる。文献[28]の手法では、レプリケータ方程式を解くために、大量のブラウン粒子（各ブラウン粒子は特定の雑音でドライブされる DOPO ネットワークの波動関数の“分波”に相当する）を同時にデジタル計算機上で走らせなければならない。この欠点は、DOPO パルスの波動関数が常にガウス型であるという近似を導入すれば解決されるが[28]、近似測定による波動関数の部分的収縮を過小評価し、結果としてしきい値付近の量子トンネリングレートを過小評価することになる。

光遅延線結合型マシンの理論モデルは、正 $P(\alpha, \beta)$ 表示と短縮ウィグナー表示を用いる2通りの手法でそれぞれ定式化されている[19,20]。両者の違いは、フォッカープランク方程

式の 3 次微分項の消去から発生し、短縮ウィグナー表示による手法は発振しきい値より十分高いポンプレートで量子トンネリングを過少評価する傾向がある[30,31]。最後に、熱雑音でドライブされる古典的なランジュバン方程式を用いる近似法が定式化されている[14]。この手法では、上記4つの量子性のいずれもが無視されることになる。DOPO パルスの同位相振幅 X はランダムな熱雑音でドライブされるが、常に確定した値を持っており、従って測定による波束の収縮も量子トンネリングもエンタングルメントも起こらない。

1.5.1 分散の軌跡

図 20 に、反強磁性結合した2つのスピンから成る測定フィードバック型マシンにおける DOPO パルスの2つの直交位相振幅の分散、 $2\langle\Delta\hat{X}^2\rangle$ と $2\langle\Delta\hat{P}^2\rangle$ 、の計算開始から終了までの軌跡を示す[11]。分散値は、光パラメトリック増幅器入射直前のポイントで評価した。図 20 には、ハイゼンベルグ限界にある最小不確定状態が満たす最小不確定積 $\langle\Delta\hat{X}^2\rangle\langle\Delta\hat{P}^2\rangle = 1/16$ を破線でプロットしてある。リング共振器の周回損失は 10% (-0.5 dB) と 50% (-3 dB) の2通りを仮定している。ポンプレートは発振しきい値以下から以上へ線形に上げている。初期状態は真空場 $10\rangle$ であり、終状態はコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に漸近するので、いずれも $\langle\Delta\hat{X}^2\rangle = \langle\Delta\hat{P}^2\rangle = 1/4$ となっている。図 20 より、各 DOPO パルスの量子状態はハイゼンベルグ限界に近い量子状態を連続的に生起しながら計算を行なっていることがわかる。これは測定フィードバック型マシンでは、周回毎に近似測定が行われ、余分なエントロピーが DOPO 系から吸い上げられ、純粋状態に近いところを推移して計算が実行されるためである。一方、熱雑音限界 ($k_B T \gg \hbar\omega$) にある古典ニューラルネットワークでは、 $\langle\Delta\hat{X}^2\rangle, \langle\Delta\hat{P}^2\rangle \gg 1$ である古典領域 (図 20 の右上の領域) で動作するはずである。

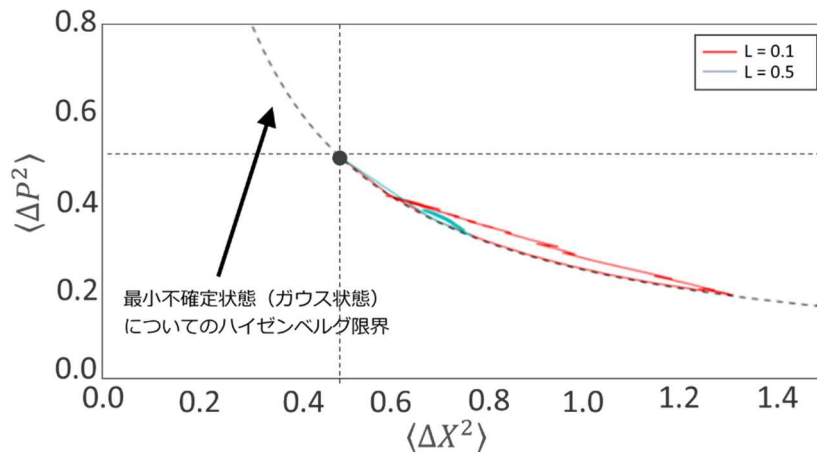


図 20 : 2つの反強磁性結合スピンからなる測定フィードバック型 QNN の $2\langle\Delta\hat{X}^2\rangle$ と $2\langle\Delta\hat{P}^2\rangle$ の軌跡 [11]。

図 20 に示した数値シミュレーション結果は、量子ダーウィニズムの観点からは以下のよう
に解釈される。DOPO ネットワークへのポンプレートをゼロから序々に上げていくと、

スクイージング ($\langle \Delta \hat{P}^2 \rangle < \frac{1}{4}$) もアンチスクイージング ($\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle > \frac{1}{4}$) も DOPA の働きによって増大し、発振しきい値で最大のスクイージング/アンチスクイージングが実現される。ここまでは、環境や観測者の働きはスクイージング/アンチスクイージングの度合いを小さくすること以外にはあまり目立たない。しかし DOPO ネットワークの最小損失モードが一度発振しきい値に達すると、系は単一モード発振し、環境と最もエンタングルしない量子状態(=コヒーレント状態)の形式をめざし、分散の軌跡は U ターンして原点($\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle = \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle = \frac{1}{4}$) へ回帰する。

1.5.2 量子雑音限界対熱雑音限界

量子ニューラルネットワーク (QNN) と古典ニューラルネットワーク (CNN) の分散 ($\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle, \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle$) の軌跡を図 21 に示す。QNN は真空状態 ($\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle = \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle = \frac{1}{4}$) からスタートし、ハイゼンベルグの最小不確定積に沿って、スクイージング/アンチスクイージングを増大させながら発振しきい値へ到達する。ここで分散の軌跡は U ターンして、コヒーレント状態へ戻る。一方、CNN は単一モード熱状態 ($\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle = \langle \Delta \hat{P}^2 \rangle \approx k_B T / 2\hbar\omega \gg 1$) からスタートし、古典的スクイージング/アンチスクイージングを増大させながら発振しきい値へ到達する。やはり発振しきい値で分散の軌跡は U ターンして、形成されたコヒーレント振幅を除けば、初めの単一モード熱状態の分散値を持つようになる。QNN においては、DOPO の量子状態は常に量子的 (epistemological) であり、 \hat{X} にも \hat{P} にも \hat{n} にも量子コヒーレンスが存在し、客観的 (絶対的) な値というものを持たない。一方、CNN においては、DOPO の量子状態は常に古典的 (ontological) であり、 \hat{X} にも \hat{P} にも \hat{n} にも量子コヒーレンスは存在せず、客観的 (絶対的) な値を持つ。

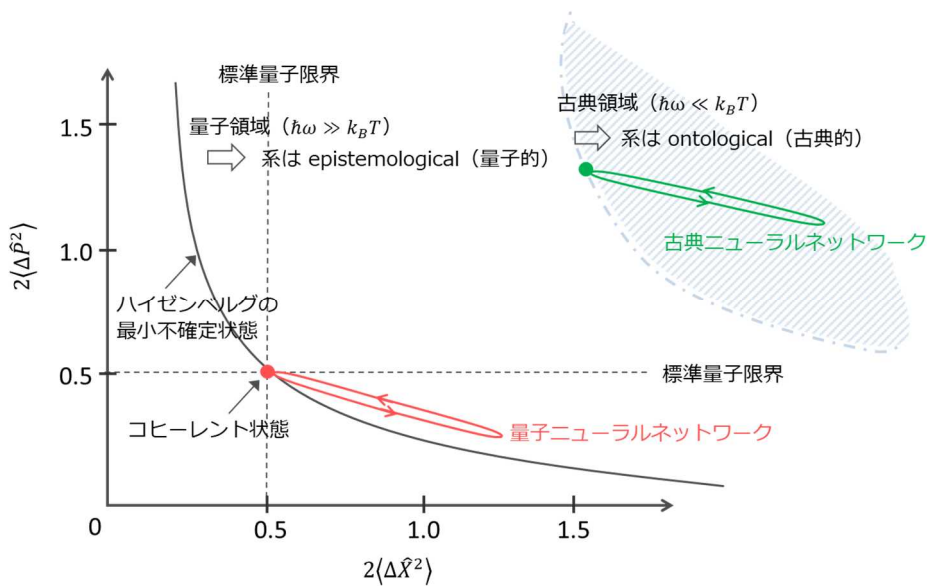


図 21 : 量子ニューラルネットワーク (QNN) と古典ニューラルネットワーク (CNN) の分散の軌跡。

次に最隣接スピンの反強磁性相互作用している一次元リング構造のイジングスピンモデル ($N = 16$) の基底状態を見つけ出す成功確率 P_s を、様々な温度パラメータ (熱光子数) $n_{th} = k_B T / \hbar \omega$ について数値計算した結果を図 22 に示す[20]。光遅延線結合型を仮定した。なおここでは、 $t = 0$ において規格化励起率を $p = 0$ から $p = p_0$ へ急激に増加させた。 $p = 1$ が単一 DOPO 発振しきい値である。 $\hbar \omega \gg k_B T$ の場合 (量子雑音限界)、エンタングルした真空スクイーズ状態がしきい値以下で量子並列探索を可能にし、最終励起率 $p_0 \approx p_{th} = 1$ において最大の成功確率に達する。発振しきい値直上のポンプレートでは、系が発振に至る遅延時間は長く、系は発振しきい値以下でエンタングルメントを形成して解を量子並列探索するのに十分な時間を確保できる。一方、最終励起率 p_0 がしきい値よりはるかに高いと、発振に至る遅延時間は短く、しきい値以下の励起率においてこの量子並列探索に十分な時間を確保できず、正しい答を同定する前に、ランダムに各 DOPO 毎に自発的対称性の破れを起こし、位相が 0 または π であるコヒーレント状態が形成されてしまう。このようにして、系は励起状態のひとつに捕獲され易くなり、成功確率 p_s は小さくなる。一方、 $\hbar \omega \ll k_B T$ (熱雑音限界) では、統計的混合状態である熱的スクイーズ状態がしきい値以下で形成されるが、これは量子並列探索を実現できないため、最大成功確率は最終励起率 $p_0 \gg p_{th} = 1$ で達せられる。この場合 (古典ニューラルネットワーク) は、発振しきい値より十分高いポンプレートで励起された時のみ、コヒーレントな平均場が熱雑音と競合しながら解を見つけることになる。

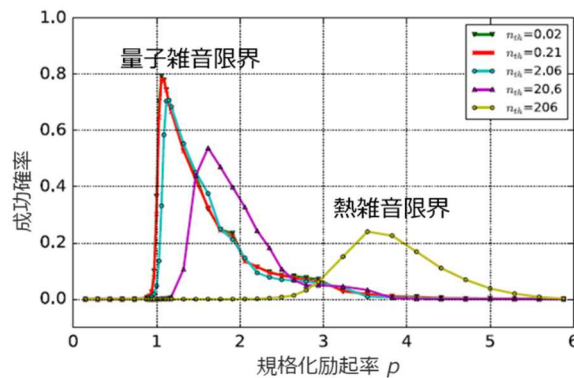


図 22 : 様々な温度パラメータ $k_B T / \hbar \omega$ において、 $N = 16$ の一次元リング構造イジングスピンが解を見つけ出す成功確率対規格化ポンプレート P [20]。

熱雑音限界 ($k_B T \gg \hbar \omega$) で量子並列探索が機能しなくなる理由が図 23 に示されている。単一モード熱状態の密度行列は光子数状態の混合和 $\hat{\rho}_{th} = \frac{1}{1+n_{th}} \left(\frac{n_{th}}{1+n_{th}} \right)^n |n\rangle\langle n|$ で与えられる。純粋な光子数状態は同位相振幅固有状態 $|X\rangle$ の線形重ね合わせで表わされ、 $|X\rangle$ に関して完全な量子コヒーレンスを持つ。また、温度パラメータが $n_{th} \lesssim 1$ なる低温領域でも、この量子コヒーレンスは部分的に生き残り、量子並列探索を可能にする。結果としてイジングモデルの基底状態を求める成功確率はそれほど劣化しない (図 22)。しかし、温度パラメータが、 $n_{th} \gg$

1なる高温領域では、異なった光子数状態の間での弱め合う干渉によって、 $|X\rangle$ に関する量子コヒーレンスは消滅される（図 23）。このため、DOPO 間にエンタングルメントは形成されず、量子並列探索が機能しなくなり、結果として発振しきい値直上での成功確率はゼロとなる（図 22）。

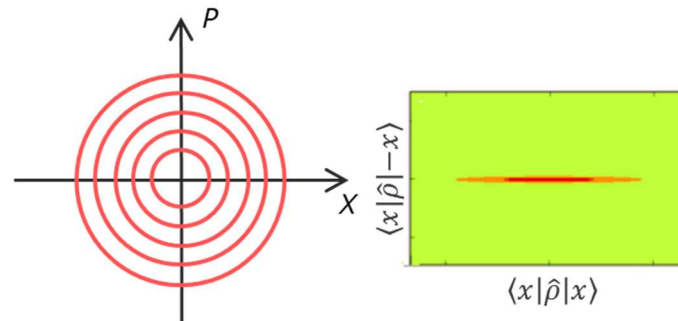


図 23：熱的混合状態の同位相振幅固有状態 $|X\rangle$ の分布 $\langle x|\hat{\rho}|x\rangle$ と量子コヒーレンス $\langle X|\hat{\rho}|X\rangle$ [11]。

1.5.3 測定による波束の収縮の役割

古典ニューラルネットワーク（連続量の連続時間発展を扱うホップフィールド・タンクモデル[1]）では、ニューロンの状態（光電場の同位相振幅値） X は測定前にある確定したアナログ値を持っている。この時、系には客観的な X の値が実際に存在するという意味において、ontological な状態にあると言われる。たとえ、検出器の内部雑音のために X とは異なるランダムな測定結果が得られたとしても、測定するという行為が X の値自体に影響を与えることはない。一方、量子ニューラルネットワークにおけるニューロンの状態は、測定前には確定した X の値を持ってはいない。波動関数という抽象的な情報があるだけである。この時、系は epistemological な状態にあると言われる。観測物理量 \hat{X} の測定結果 \tilde{X} は、被測定ニューロン（DOPO）と測定装置（ホモダイン検出器）との協働作用によって決められる。この場合、測定後のニューロン状態は読み出された測定結果によって変わるが、その過程はシュレジンガー方程式では記述できず、いわゆる一般化された射影演算子[32]によって波束の部分的な収縮が計算される。図 24 には、測定フィードバック型 QNN による基底状態を得る正答率 p_s 対問題サイズ（スピン数） N の特性を数値シミュレーションで計算した結果を示す[34]。数値シミュレーションには、 c 数確率微分方程式とレプリケータ方程式を連立したモデル[28]を用いた。正答率は問題サイズと共に指数的に減少し、 $N = 2000$ で $p_s \sim 0.1$ となる。もし近似測定によって波束が部分的に収縮するという量子効果を見捨てる、上記 c 数確率微分方程式のみで系は記述される。図 24 には、同じパラメータに対して、この波束の収縮を見捨てることで得られた正答率 p_s 対問題サイズ N の特性も示してある。正答率 p_s が問題サイズ N と共に指数的に減少するのは変わらないが、その傾きはより大きく、 $N = 2000$ で $p_s \sim 0.001$ となる。この結果は、測定フィードバックに伴う波束の収縮と変位による量子トンネリングが解探索に重要な役割を演じていることを示している。測定による波束の収

縮とフィードバックによる波束の変位は、対となって初めて威力を発揮するのである。

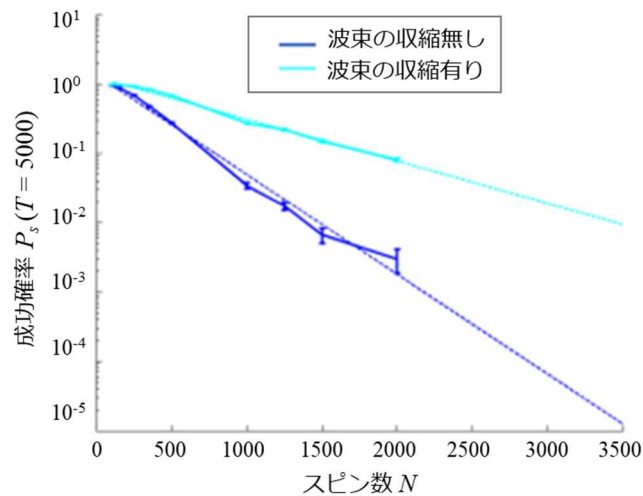


図 24: 量子測定フィードバックと古典測定フィードバックによるイジングモデルに対する正答率 p_s 対問題サイズ N 。量子測定フィードバックモデルは c -数確率微分方程式とレプリケータ方程式で、古典測定フィードバックモデルは c -数確率微分方程式のみで記述した[34]。

1.5.4 Gottesman-Knill 定理と非ガウス型波束

全ての量子ダイナミクスに対して現代のデジタル計算機を用いた数値シミュレーションにおける計算リソースが指数発散するというわけではない。量子もつれ状態発生 (entanglement generation) や量子もつれ純粋化 (entanglement purification) などの代表的で重要な量子操作は、古典的手法で効率的にシミュレートできることがわかっている。従って、そのような量子操作だけで、現代のデジタルコンピュータの性能を超える計算能力を有する量子コンピュータを実現することはできないと想像される。

Gottesman と Knill は、この古典情報処理と量子情報処理との微妙な境界を最初に指摘した[35]。すなわち、量子ビットに対する操作が

1. 基底状態 $|0\rangle_1 |0\rangle_2 \cdots |0\rangle_N$ といった計算基底 (computational basis) 状態からスタートし、
2. アダマールゲート、位相ゲート、制御 NOT ゲート、といったユニタリーゲートの組合せ (Clifford グループ) により処理し、
3. 計算基底状態 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ への射影測定で計算結果を読み出す、

という手順で完了するのであれば、そのような量子情報処理は現代のデジタルコンピュータにより効率良くシミュレートすることができる。上記は Gottesman-Knill 定理として知られている。なお、有名な Shor の素因数分解アルゴリズムに馴染みのある読者には、Shor のアルゴリズム実装には上記 3 項目に含まれない微小な位相シフト (fractional phase shift) の実装が必要不可欠となっており、従って Shor のアルゴリズムには上記定理は当てはまら

ないことを指摘しておく。

上記定理の連続変数（調和振動子）版が Bartlett 等によって展開された[36]。その定理では、量子調和振動子に対する操作が

1. コヒーレント状態 $|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2\cdots|\alpha\rangle_N$ などのガウス状態からスタートし、
2. スクイズイング・ゲート、変位ゲートにより処理し、
3. ホモダイン検出による1つ、またはヘテロダイン検出による2つの直交位相振幅の測定で計算結果を読み出す、

という手順で完了するのであれば、そのような量子情報処理は現代のデジタルコンピュータにより効率良くシミュレートすることができる、というものである。

この定理から測定フィードバック型 QNN を眺めると、光パラメトリック発振器の利得飽和（あるいは2光子吸収）と近似測定による波束の部分的収縮が、本質的な量子ダイナミクスとして、測定フィードバック型 QNN を古典的手法でシミュレートすることを困難にしている要因である、とすることができる。

図 25(a)に、2つの DOPO パルスが反強磁性結合している場合の、各 DOPO の3次分散値 $\langle\Delta\hat{X}^3\rangle$ の規格化ポンプレート p 依存性を示す。 $\langle\Delta\hat{X}^3\rangle$ は真のガウス状態では常にゼロであるが、DOPO の場合は発振しきい値ポンプレートに達すると利得飽和が誘起される。DOPO の波束を安定点 ($X = \pm\sqrt{p-1}$) に閉じ込める外側のポテンシャルは X^4 で増大する急峻な形になり、内側のポテンシャルは X^2 で増加する穏やかな形となる。(図 25(b))その結果、DOPO の波束は、非ガウス形の状態へ変化する[28]。すなわち、発振しきい値以上のポンプレートで励起された DOPO では、ポテンシャルの非対称性から波動関数は高振幅側では急激に、低振幅側では緩やかにテイルを引くことになる(図 25(b))。このため、DOPO は発振しきい値以上のポンプレートでも、量子トンネリングを介して容易に双安定状態 (0相と π 相)の間を遷移できる。先に述べたように、図 19 はこれを数値シミュレーションで確認したものである。図 19(a)に示した例では、発振しきい値付近で“頻繁”に双安定状態($|\uparrow\downarrow\rangle$ と $|\downarrow\uparrow\rangle$)間でスイッチングが起きている。一方、図 19(b)に示したガウス近似したモデルでは、波動関数の急激な減衰のため、発振しきい値以上のポンプレートでのスイッチングは抑圧されている。

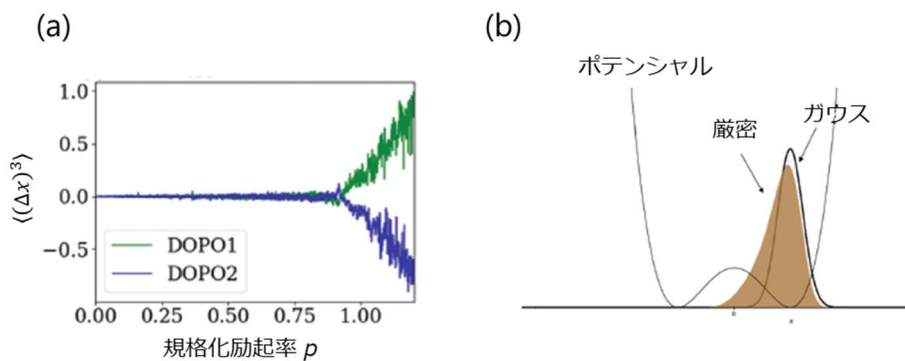


図 25 : (a) 2つの反強磁性結合スピンから成る測定フィードバック型 QNN における 3 次分散値($\Delta \hat{X}^3$)の変化。(b) 利得飽和のため DOPO に生成される非ガウス型の波束[28]。

非ガウス型波束が実現する発振しきい値直上のポンプレートでの量子トンネリングは、正答率に大きな影響力を持つ。図 26 に、 $N = 16$ スピン鎖からなる 1 次元リング構造の正答率 p_s を、反強磁性結合の強さに対して計算した結果を示す。結合の強さが大きい領域では、イジング結合が真空ゆらぎよりも優勢となり、正答率は高くなる。しかし、もしガウス型波束を仮定すると、結合の強さが大きい領域でも正答率は余り大きくならない。これは、発振しきい値直上での量子トンネリングが正解を探索する上で重要な役割を果たしていることを示唆する結果である。

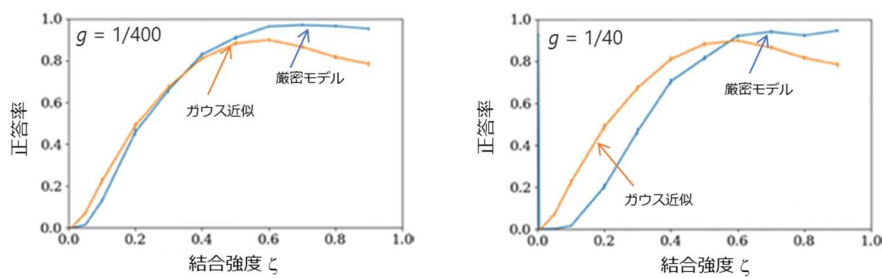


図 26 : $N = 16$ スピン鎖からなる 1 次元リング・イジングモデルの正答率 p_s 対イジング結合係数 [28]。 g は飽和パラメータ。

1.5.5 光遅延線結合型 対 測定フィードバック型

QNN へのイジングハミルトニアンの実装法の違い（光遅延線結合型か測定フィードバック型か）により、図 12 に示すような量子並列探索のメカニズムに違い（エンタングルメント を利用するか量子トンネリングを利用するか）が出てくる。2つの実装法の特徴は序文の表 3 にまとめたが、コンピュータの性能には優劣はあるのであろうか。この重要な質問に対する部分的な回答が図 27 に示されている。 $N = 16$ 1 次元リング構造の反強磁性結合イジングモデルの正答率 p_s 対イジング結合係数の特性を見ると、測定フィードバック型の方が高い正答率を実現している。これは、周回毎に近似測定を行い、不必要なエントロピーをポンプアウトして、純粋状態に近い領域で計算を実行する測定フィードバック型の方が、形成されたエンタングルメントがシステムの光損失により混合状態へと変化してしまう光遅延線結合型よりも有利であることを示唆する結果と解釈することができる。

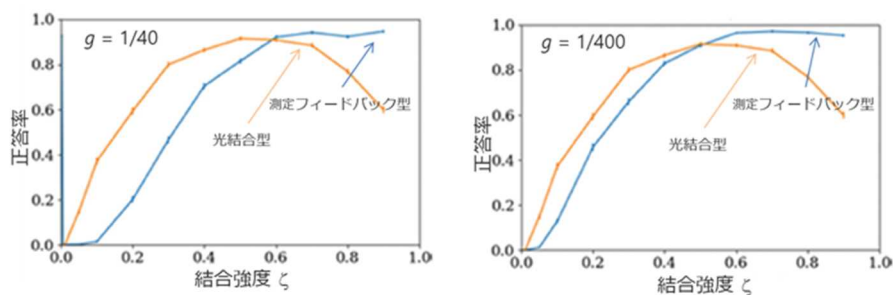


図 27：光遅延線結合型 QNN 対 測定フィードバック型 QNN。

1.6 まとめ

第 1 章の重要な結論を以下にまとめる。

1. 室温で動作する量子ニューラルネットワーク (QNN) は 2 つのシステム構成要素デバイス、量子ニューロンと量子シナプス、で構成される。
2. 量子ニューロンは縮退光パラメトリック増幅器／発振器 (DOPO) により実現される。この素子では、しきい値以下のポンプレートでの量子並列探索、しきい値での自発的対称性の破れ、しきい値以上での光子の誘導放出による量子から古典情報への増幅、が連続して起こり、計算が実行される。
3. 量子シナプスは、光遅延線による直接結合または測定フィードバック回路による間接結合により実現される。両者はそれぞれに異なる計算リソースを量子並列探索に活用している。すなわち光遅延線結合 QNN は量子雑音相関 (エンタングルメント) を、測定フィードバック QNN は測定による波束の収縮とフィードバックによる波束の変位を合わせた量子トンネリングを、それぞれ利用している。
4. QNN は、様々な組合せ最適化問題を、NP 困難クラスのイジング問題あるいは NP 完全クラスの k -SAT 問題にマッピングすることにより解くことができる。前者のシステム、すなわちコヒーレント・イジングマシン、は対称型連続時間発展ニューラルネットワークとして構築され、後者のシステム、すなわちコヒーレント SAT マシン、は非対称型連続時間発展循環ニューラルネットワークとして実現される。この 2 つのマシンの性能の詳細については第 6 章と第 7 章で述べる。
5. QNN においては、DOPO の利得飽和 (2 光子吸収) と近似ホモダイン測定による波束の部分的収縮の 2 つが、古典手法によるシミュレーションを困難にする要素である。この散逸過程と測定過程の組合せが解探索作業で重要なリソースとなっている。
6. 量子レベルで選択された最適解は、測定を行なう前に古典情報へ増幅されなければならない。QNN においては、この量子-古典クロスオーバーにかかる時間を DOPO 発振現象 (光子の誘導放出) を利用して、高速化している。量子ユニタリ計算で使われる

Grover アルゴリズムでは最適解の振幅が線形に増幅されるのに対し、QNN では指数的に増幅される点に特色がある。

- [1] J. J. Hopfield and D.W. Tank, *Science* 233, 625 (1986).
- [2] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer Berlin-Heidelberg, 1995)
- [3] R. L. Byer et al., *Appl. Phys. Lett.* 13, 109 (1968).
- [4] D. Serkland et al., *Opt. Lett.* 20 1649 (1995).
- [5] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* 23, 1693 (1981).
- [6] Y. Nambu, *Rev. Mod. Phys.* 81, 1015 (2009).
- [7] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [8] M. Wolinsky and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* 60. 1836 (1988).
- [9] L. Krippner et al., *Phys. Rev. A* 50, 4330 (1994).
- [10] P. D. Drummond et al., *Phys. Lett. A* 65, 033806 (2002).
- [11] A. Yamamura et al., *Phys. Rev. A* 96, 053834 (2017).
- [12] E. Ising, *Zeitschrift für Physik*, 253 (1925).
- [13] F. Barahona, *J. Phys. Math. Gen.* 15, 3241 (1982).
- [14] Z. Wang et al., *Phys. Rev. A* 88, 063853 (2013).
- [15] A. Marandi et al., *Nature Photonics* 8, 937 (2014).
- [16] K. Takata et al., *Sci. Rep.* 6, 34089 (2016).
- [17] T. Inagaki et al., *Nature Photonics* 10, 415 (2016).
- [18] Y. Haribara et al., *Entropy* 18, 151 (2016).
- [19] K. Takata et al., *Phys. Rev. A* 92, 043821 (2015).
- [20] D. Maruo et al., *Phys. Scr.* 91, 083010 (2016)
- [21] T. Inagaki et al., *Science* 354, 603 (2016).
- [22] P. L. McMahon et al., *Science* 354, 614 (2016).
- [23] T. Leleu et al., *Phys. Rev. E* 95, 022118 (2017).
- [24] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* 24, 1516 (1981).
- [25] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* 26, 1862 (1982).
- [26] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* 130, 2529 (1963); *ibid.* 131, 2766 (1963).
- [27] W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* 75, 715 (2003).
- [28] T. Shoji et al., *Phys. Rev. A* 96, 053833 (2017).
- [29] P. D. Drummond, *Phys. Rev. A* 33, 4462(R) (1986).
- [30] P. D. Drummond and Knisler, *Phys. Rev. A* 40, 4813(R) (1989).
- [31] P. Kinsler and P. D. Drummond, *Phys. Rev. A* 43, 6194 (1991).

- [32] V. B. Braginsky and F. Y. Khalili, *Quantum Measurement* (Cambridge Univ. Press, 1992).
- [33] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Phys. Rev. Lett.* 70, 548 (1993).
- [34] T. Leleu et al., to be published.
- [35] D. Gottesman, arXiv: 9807006 (1998).
- [36] S. D. Bartlett et al., arXiv:0109047v2 (2002).

執筆：山本 喜久、Timothee Leleu

和訳：井上 恭

Version 2