

Grasshopper上のインタラクティブかつリアルタイムな有限要素解析インターフェースの開発

Development of an interactive and real-time finite element analysis interface on Grasshopper

三木優彰¹⁾, 三谷純²⁾, 五十嵐健夫³⁾

Masaaki Miki, Jun Mitani and Takeo Igarashi

1) 博(工) 科学技術振興機構 ERATO 研究員 (E-mail: masaakim@acm.org)

2) 工博 筑波大学 システム情報工学研究科 准教授/ 科学技術振興機構 ERATO (E-mail: mitani@cs.tsukuba.ac.jp)

2) 工博 東京大学 情報理工学系研究科 教授/ 科学技術振興機構 ERATO (E-mail: takeo@acm.org)

We developed a set of Grasshopper components which enables interactive physics simulation based on the finite element method (FEM). We named this add-on Ricecooker. As a computational method, it is a nonlinear FEM solver that can treat material and geometric nonlinearities. Unlike the usual FEM software, various parameters such as weight coefficients, material coefficients, and the coordinates of the fixed nodes can be varied during computation through interactive interface with real-time visualization. Some nonlinear constraint conditions can be also defined using the provided components, and the constraint values such as the lengths of rigid bars can be also varied during computation.

Key Words : Finite Element Method, Constrained Optimization, Interactive Interface, Grasshopper

1. はじめに

近年建築の意匠設計において、施工技術および計算機の性能の向上、3Dプリンタなどの工作機器の設置コストの減少などを背景に、より自由で斬新な幾何形状に挑戦する建築家が知られるようになった。国立新競技場コンペにおけるザハ・ハジドの案はその象徴である。そのような潮流を背景に、Rhinoceros® (図-1) とGrasshopper (図-2) の組み合わせが意匠設計の現場で積極的に利用されている。Rhinoceros®は商用の3次元モデラーで、NURBS曲面を筆頭に多様な幾何要素を高精度に扱えることなどが評価され積極的に利用されるようになった。Grasshopperは無料のRhinoceros®のAdd-onで、GUIによるコンポーネントの接続という直感的な操作で複雑な幾何生成ルールを定義し実行できる。また、多数のカスタムコンポーネントが活発に開発、共有されている。

本報では筆者らが開発しているGrasshopperコンポーネント群Ricecooker[1]について報告する(図-3)。これはRhinoceros上で力学や材料を考慮した物理シミュレーションを可能とするものである。類似の事例としてKangaroo[2]が知られている。またMAYA®などに搭載されている物理エンジンも同じ性格をもつ。それら先行事例と異なるのは有限要素法による理論的裏付けを与え、工学での利用に耐える性能と使いやすさの両立を目指している点である。また、一般の有限要素解析ソフトと比べ、様々なパラメータをリアルタイムに変更可能な点が優れている。さらに幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮することができる。

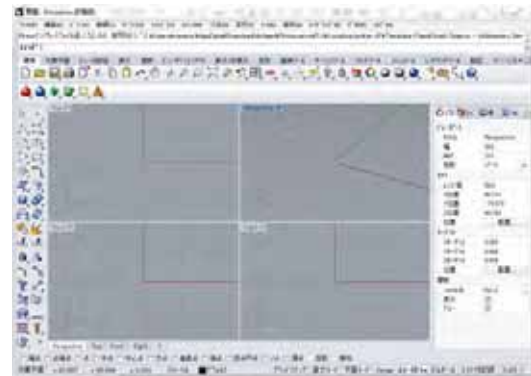


図-1 Rhinoceros®



図-2 Grasshopper



図-3 Ricecooker (筆者ら)

2. 定式化

本研究では連続体の釣り合いの問題に対する有限要素法を、3次元ユークリッド空間に埋め込まれた N 次元リーマン多様体における、リーマン計量に関する最適化と位置づけている。本節で本研究における定式化の特徴を簡潔に述べる。

(1) 形状と変位

\tilde{n} 個の節点の x,y,z 座標を、 $n = 3\tilde{n}$ 次元列ベクトル

$$\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^T \quad (1)$$

としてまとめ、これを未知数ベクトルとして扱う。ただし固定点の座標は取り除かず、含めておくものとする。

微分を受けない参照形状の x,y,z 座標を並べたものを

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n]^T \quad (2)$$

とおく。通常は参照形状として変形前の形状を選択する。本報では定数として扱う量に $\bar{\cdot}$ を付加する。 $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ は変位と呼ばれる。 $\{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}\}$ のうち独立なものは2つであり、 $\{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}\}$ が選ばれることが多い。本研究では形状そのものを未知数とする立場から $\{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\}$ を用いている。

要素は1,2,3次元1次元要素と1,2,3次元2次元アイソパラメトリック要素の6種類(図-4)を定義している。前者は1つの積分点を持ち、後者は3,9,27の積分点をもつ。内挿関数、積分点座標と重み係数は文献[3]に準じている。

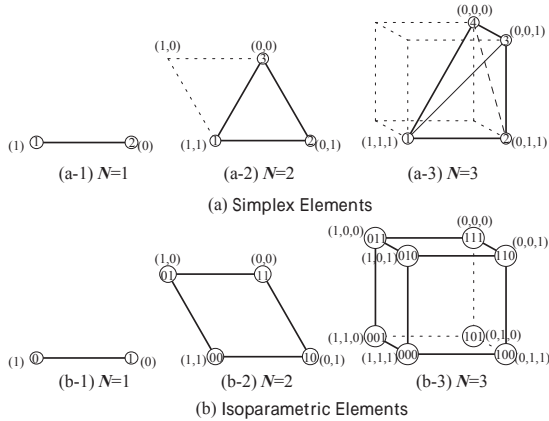


図-4 要素 ()内は要素内座標、○内は節点番号)

N 次元要素の要素内座標を $X = (\theta^1, \dots, \theta^N)$ とおく。 X における全体座標 $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ (3次元デカルト座標)を

$$\mathbf{r}(X) = \mathbf{N}(X)\mathbf{x} \quad (3)$$

と書く。ここで \mathbf{N} は3行 n 列の疎行列で形状関数を纏めたものである。参照形状上の要素内座標 X における全体座標は

$$\bar{\mathbf{r}}(X) = \mathbf{N}(X)\bar{\mathbf{x}} \quad (4)$$

と決まる。要素内座標 X がひとつ固定されたとき $\bar{\mathbf{r}}(X)$ と $\mathbf{r}(X)$ は同じ物質点(変形前と変形後)を表していると仮定する。このような仮定を座標系の埋め込みと呼ぶ。*Green-Lagrange*歪等の様々なテンソル量が、埋め込み座標とリーマン計量を用いて簡潔かつ明快に表現できる[3]。

(2) リーマン計量と *Green-Lagrange* 歪

要素内の各点 $X = (\theta^1, \dots, \theta^N)$ で要素内座標系に付随する共変基底ベクトルが

$$\mathbf{g}_i(X) = \mathbf{C}_i \mathbf{x} \quad (5)$$

として決まる。ただし

$$\mathbf{C}_i(X) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \theta^i} \quad (6)$$

とした。要素内の各点でリーマン計量(第一基本量)と呼ばれる $N \times N$ 対称行列が $\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_j + \mathbf{C}_j^T \mathbf{C}_i)$ を用いて

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{x}^T \mathbf{B}_{ij} \mathbf{x} \quad (7)$$

と計算できる。以下では*Einstein*の総和規約を用いる。また、 \mathbf{g}_{ij} は行列の成分を表しているのと共に、行列そのものも表しているとみなす。参照形状上のリーマン計量も

$$\bar{\mathbf{g}}_{ij} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{B}_{ij} \bar{\mathbf{x}} \quad (8)$$

と計算できる。リーマン計量の逆行列を

$$\mathbf{g}^{ij} = (\mathbf{g}_{ij})^{-1}, \bar{\mathbf{g}}^{ij} = (\bar{\mathbf{g}}_{ij})^{-1} \quad (9)$$

とおく。さらに N 次元体積要素

$$dv^N = \sqrt{\det g_{\mu\nu}} d\theta^1 \cdots d\theta^N \quad (10)$$

$$d\bar{v}^N = \sqrt{\det \bar{g}_{\mu\nu}} d\theta^1 \cdots d\theta^N \quad (11)$$

も定義しておく。

第 j 要素の長さ、面積、体積は

$$v_j^N = \int_{\Omega_j} dv^N \quad (12)$$

により与えられる。ここで Ω_j は第 j 要素の積分領域を表す。 v_j^N の変分は $\delta \sqrt{\det g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$ を用いて

$$\delta v_j^N = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} dv^N \quad (13)$$

として与えられる。 $g^{\alpha\beta}$ を一般の $\mathbf{g}_{ij}, \bar{\mathbf{g}}_{ij}$ の関数 $T^{\alpha\beta}(\mathbf{g}_{ij}, \bar{\mathbf{g}}_{ij})$ に置き換えれば δv_j^N の一般形

$$\delta w_j^N = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} T^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} dv^N \quad (14)$$

が得られる。実際は $T^{\alpha\beta}$ は $\mathbf{g}_{ij}, \bar{\mathbf{g}}_{ij}, \mathbf{g}^{ij}, \bar{\mathbf{g}}^{ij}$ の4つの行列により陽表示される。後者が前者の逆行列であるので $T^{\alpha\beta}(\mathbf{g}_{ij}, \bar{\mathbf{g}}_{ij})$ と表記した。 $T^{\alpha\beta}$ を*Cauchy*応力テンソルの埋め込み座標系における成分とみなすと、 δw_j は要素内仮想仕事とみなすことができる。実際*Green-Lagrange*歪の成分は

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ij} - \bar{\mathbf{g}}_{ij}) \quad (15)$$

と表せるから $\frac{1}{2} \delta \mathbf{g}_{ij} = \delta E_{ij}$ であり、また、 $T^{\alpha\beta}$ と第二*Piola-Kirchhoff*応力テンソル $S^{\alpha\beta}$ の関係

$$S^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} \frac{\sqrt{\det g_{\mu\nu}}}{\sqrt{\det \bar{g}_{\mu\nu}}} \quad (16)$$

より

$$\delta w_j^N = \int_{\Omega_j} S^{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} d\bar{v}^N \quad (17)$$

が得られる。これは非線形有限要素法において頻繁に登場する要素内仮想仕事に他ならない。ある関数 $f(g_{ij}, \bar{g}_{ij})$ が存在し、 $S^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial f}{\partial g_{\alpha\beta}}$ と書けるとき

$$\delta w_j^N = \delta \left[\int_{\Omega_j} f(g_{ij}, \bar{g}_{ij}) dV^N \right] \quad (18)$$

と書ける。このとき $f(g_{ij}, \bar{g}_{ij})$ は要素内歪エネルギー密度を表している。通常は(18)式から出発し(17)式を導く。本研究では(12)式から(14)式を導き、(17)式ではなく(14)式を一貫して用いている点に特徴がある。これは極小曲面問題など、参照形状を指定する必要のない問題も考察の対象としているためである。ただし、 $T^{\alpha\beta}(g_{ij}, \bar{g}_{ij})$ としては $f(g_{ij}, \bar{g}_{ij})$ が見つかるように選ぶべきで、そのような材料は超弾性体と呼ばれる。本研究ではSt. Venant体、Neo Hookean体、Mooney-Rivlin体を実装した。いずれも $g_{ij}, \bar{g}_{ij}, g^{ij}, \bar{g}^{ij}$ の陽な関数として記述できる。

(3) 等価節点力ベクトル

\mathbf{x} の実数値関数 $f = f(\mathbf{x})$ の勾配ベクトルを

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad (19)$$

と定義する。このときリーマン計量の勾配は

$$\nabla g_{ij} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{B}_{ij}$$

と計算できる。Ricecookerは勾配のみを用い、2階微分を用いない点に特徴がある。

与えられたCauchy応力場と丁度釣り合う節点力を等価節点力と呼ぶ。 δw_j^N 内の変分記号 δ を勾配記号 ∇ に形式的に置換することで等価節点力

$$\omega_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} T^{\alpha\beta} \nabla g_{\alpha\beta} dV^N \quad (20)$$

が得られる。一般には(20)式の積分は実行不可能で、代わりにガウス積分

$$\tilde{\omega}_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_U \phi_U \left[T^{\alpha\beta} \nabla g_{\alpha\beta} \sqrt{\det \bar{g}_{\mu\nu}} \right]_{(j,I_U)} \quad (21)$$

を用いる。ただし U 、 ϕ_U は積分点番号とその重み、 $[\cdot]_{(j,I_U)}$ は第 j 要素の第 U 積分点における $[\]$ 内の値を表す。

(4) 幾何学的非線形性と材料非線形性

Ricecookerは2階微分を一切用いないが、ここでは非線形性について議論するために2階微分を吟味する。まず微分を簡単にするため $\tilde{\omega}_j$ を

$$\tilde{\omega}_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_U \phi_U \left[S^{\alpha\beta} \nabla g_{\alpha\beta} \sqrt{\det \bar{g}_{\mu\nu}} \right]_{(j,I_U)} \quad (22)$$

と書き換える。次に微分を実行して要素内剛性行列

$$\nabla \tilde{\omega}_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_U \phi_U \left[\left(S^{\alpha\beta} \nabla^2 g_{\alpha\beta} + \frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial g_{\gamma\eta}} \nabla g_{\gamma\eta}^T \nabla g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{\det \bar{g}_{\mu\nu}} \right]_{(j,I_U)} \quad (23)$$

を得る。ただし $\nabla^2 f$ は関数 $f(\mathbf{x})$ のヘシアンである。 $\nabla g_{\alpha\beta}$ は線形有限要素法における歪-変位関係行列（しばしば \mathbf{B} と表記される）に対応し、 $\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial g_{\gamma\eta}}$ は線形有限要素法における応力-歪関係行列（しばしば \mathbf{D} と表記される）に対応している。すなわち $[\]$ 内第2項はしばしば $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ と表記される

剛性行列の典型的な計算式に対応している。また、 $[\]$ 内第1項は非線形有限要素法において幾何剛性行列と呼ばれているものに他ならない。つまり $\nabla \tilde{\omega}_j(\mathbf{x})$ は非線形有限要素法において接線剛性行列と呼ばれているものに他ならない。従って $\tilde{\omega}_j$ には幾何学的非線形性が含まれている。また、 $\tilde{\omega}_j$ が $S^{\alpha\beta}$ のみ含み、 $\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial g_{\gamma\eta}}$ を含まないことから、 $S^{\alpha\beta}$ には g_{ij} に関して不連続な点が存在してもよいことが分かる。つまり g_{ij} から $S^{\alpha\beta}$ や $T^{\alpha\beta}$ への一意的な写像（構成則）が与えられていれば $\tilde{\omega}_j$ は計算可能である。従って図-5(a)-(d)に表す多様な材料を扱うことができる。図-5(e)に示すような履歴に依存する材料は扱うことができない。Ricecookerは図-5(f)に示す剛な材料も扱える。これについては次節で述べる。

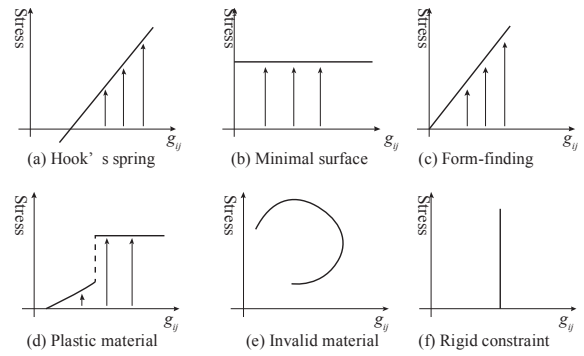


図-5 様々な材料

(5) 剛な拘束条件

Ricecookerは r 個の等式制約条件

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) - \bar{g}_1 &= 0 \\ &\vdots \\ g_r(\mathbf{x}) - \bar{g}_r &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

を組み込める。束縛される量 $g_k(\mathbf{x})$ としてはグループ内の要素の長さ、面積、体積の総和が選択できる。

(6) 解法

Ricecookerが対象とするのは次の形式で与えられる非線形連立方程式である。

$$\sum_j \tilde{\omega}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (25)$$

ただし、 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ は節点外力を表し、体積力を離散化し節点に集中させたものがサポートされている。左辺は要素ごとの等価節点力ベクトルの総和である。解法としては動的緩和法[4]を剛な拘束条件に拡張したものを用いている。動的緩和法はNewtonの運動方程式に基づいた釣り合い形状の探索手法である。その計算過程をリアルタイムに可視化すると、あたかも現実の物体が物理法則に従って運動しているように見えるため、一般のユーザーにとって親しみやすいと期待している。逆行列の計算を含まないため1ステップあたりの計算コストが小さいという利点

があり、リアルタイムなパラメータの変更に適している。

3. 実装

図-6に筆者らの実装したコンポーネントの例を示す。これは4つのポイントを受け取り、4節点アイソパラメトリック要素を指定された分割数に従って配置するものである。他に材料の定義と体積力(重力)の定義を入力する。いずれも典型的な定義が複数のコンポーネントにより提供される。材料としては超弾性体の他に長さや面積、体積に関する最適化に利用できる特別な材料を用意している。材料のパラメータはスライダーと接続することで繰り返し計算の実行中にリアルタイムに変更できる(図-7(a))。固定点の移動もマウスドラッグにより直感的に行える(図-7(b))。

Ricecookerは剛な拘束条件も扱うことができる。図-7(a)は要素長さを総て同じ長さに拘束し、総ての自由節点に下向きに一樣な力を与えることで懸垂線の近似形状を求めている様子である。図-8(b)は母線の長さを与えられた値に束縛するという付帯条件の元での極小曲面を求めている様子である。付帯条件を与えない場合カテナイドと呼ばれる曲面が得られることが広く知られているが、付帯条件の導入により異なる曲面が得られる[5]。

図-9はRicecookerを用いた軽量張力構造の形状決定の様子で、圧縮材、ケーブル、膜からなる構造を解析している。それぞれ剛な拘束条件、2節点アイソパラメトリック要素、4節点アイソパラメトリック要素を用いた。圧縮材の長さや材料に付与された重み係数をリアルタイムに変更することで様々な釣り合い形状のスタディを簡便に行うことができた。図-10はNeo-Hookean体に面荷重をかけたときの大変形を解析している様子である。荷重の大きさをリアルタイムに増減することができた。形状の変化を観察することができた。

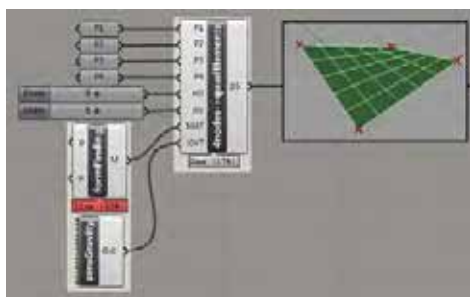
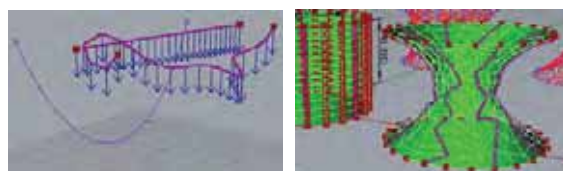


図-6 開発したカスタムコンポーネントの一例



(a) スライダーと材料定義 (b) 固定点の移動

図-7 変更可能なパラメータ



(a) 懸垂線 (b) 付帯条件つき極小曲面

図-8 束縛条件つき最小化

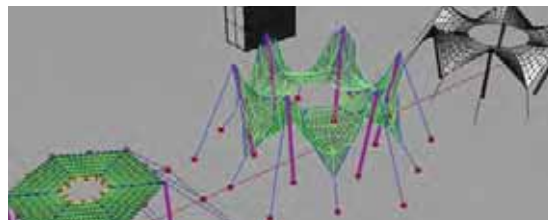


図-9 張力構造の形状決定

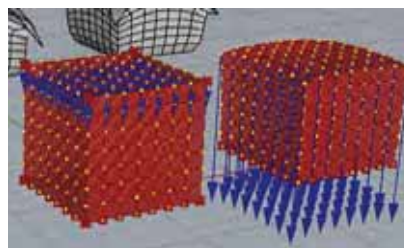


図-10 超弾性体の大変形

4. まとめ

筆者らが開発を行なっているGrasshopperコンポーネント群、Ricecookerについて述べた。これはCAD上で力学や材料を考慮した物理シミュレーションを可能とするものである。有限要素法による理論的裏付けをもち、幾何学的非線形性、材料非線形性、剛な拘束条件を扱える点に特徴があった。また計算を中断することなくリアルタイムにパラメータを変更でき、インタラクティブに釣り合い形状をスタディ出来る点に従来の有限要素法ソフトウェアと区別すべき特徴があった。懸垂線、極小曲面、張力構造の形状決定、超弾性体の大変形など多様な問題の定義と解析が可能であった。今後は実際に利用するユーザー層を想定し、ユーザーの意見を反映したインターフェースの改良が必要と思われる。

参考文献

- [1] Kangaroo: <http://www.grasshopper3d.com/group/kangaroo>
- [2] Ricecooker: <http://www.grasshopper3d.com/group/ricecooker>
- [3] 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用. 丸善, 1995.
- [4] Day A. S., An introduction to dynamic relaxation, The engineer, Vol. 219, pp. 218-221, 1965.
- [5] 川口健一, 柯宛伶, 三木優彰; 付帯条件付き極小曲面と一般化最急降下法に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, vol. 73, no. 63, pp. 1773-1777, 2008