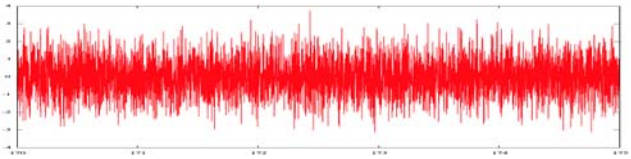
生命ダイナミクスを捉える：確率微分方程式

寺前順之介
理化学研究所　脳科学総合研究センター
科学技術振興機構　さきがけ

質問，コメント等は
teramae@riken.jp

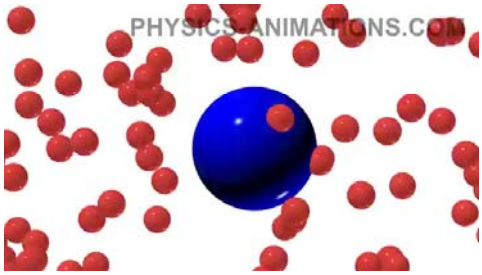


揺らぎ

熱揺らぎ：ブラウン運動

揺らぎ

熱揺らぎ：ブラウン運動
微粒子が、水分子の熱揺らぎでキックされる



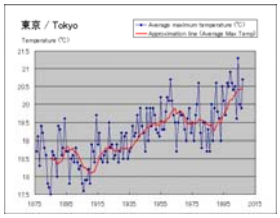
揺らぎ

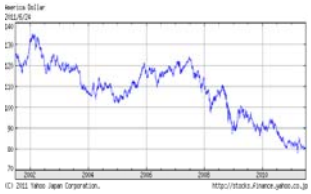
熱揺らぎ：ブラウン運動
微粒子が、水分子の熱揺らぎでキックされる

Robert Brown, 1773-1858

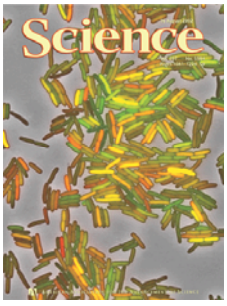
Albert Einstein, 1879-1955

揺らぎ

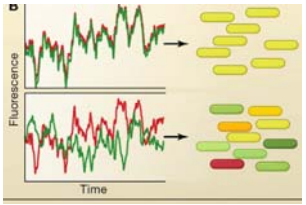




揺らぎ



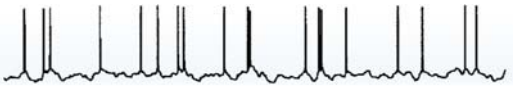
Science (2002) 297



Raj et al. 2008

揺らぎ

神経細胞： 膜電位



神経細胞： スパイク列

揺らぎ

Robert Brown, 1773-1858

Albert Einstein, 1879-1955

Paul Langevin, 1872-1946

Langevin方程式 （ランジュバン方程式）

決定論的に動く現象の数学

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

確率的に動く現象の数学

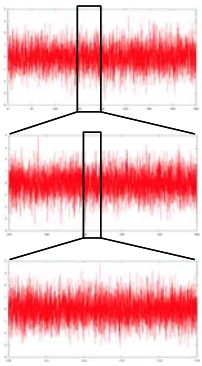
$$\frac{dX}{dt} = F(X) + \text{noise}$$

確率微分方程式 $$\frac{dX}{dt} = F(X) + G(X)\xi(t)$$

$\xi(t)$ ：白色ガウスノイズ

White Gaussian noise (白色ガウスノイズ)

$\xi(t)$

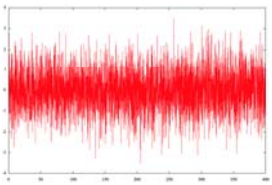


$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s)$$

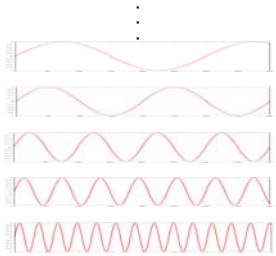
白色ノイズ

$\xi(t)$



=

フーリエ展開



すべての波長（色）を均等に含む

確率微分方程式の定義

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + G(X)\xi(t)$$

実は、数学的には定義出来ていない！

では、どうするか？

「2つのトリック」

1. 白色ノイズを追放し、
2. 確率積分を定義しよう！

トリック1：白色ノイズ追放計画

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + G(X)\xi(t)$$

形式的に積分

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dX}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} F(X) dt + \int_{t_1}^{t_2} G(X)\xi(t) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dX = X(t_2) - X(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} G(X)\frac{dW}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} G(X) dW$$

$$\frac{dW}{dt} = \xi$$

$$W(t) = \int_0^t \xi(t) dt$$

W(t)を「ウィナー過程」と呼ぶ

トリック1：白色ノイズ追放計画

$$\int_{t_1}^{t_2} dX = \int_{t_1}^{t_2} F(X) dt + \int_{t_1}^{t_2} G(X) dW$$

形式的に　$dX = F(X)dt + G(X)dW$　こう書く

実は、むしろ確率積分方程式

ウィナー過程の性質　$W(t) = \int_0^t \xi(t) dt$

ガウス分布であり、

$$\langle dW(t) \rangle = 0$$

$$\langle dW(t) dW(t+s) \rangle = s$$

$\langle dW^2 \rangle = dt$　と思って良い。

トリック2：確率積分を定義

$$\int_{t_1}^{t_2} G(X) dW = \sum_{t_i} G(X(s_i)) dW(t_i)$$

$$\sum_{t_i} G(X(t_i)) dW(t_i)$$

Itoの定義

$$\sum_{t_i} G\left(X\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)\right) dW(t_i)$$

Stratonovichの定義

確率微分方程式の二つの異なる定義

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + G(X)\xi(t)$$

Ito（伊藤）の定義

伊藤清
1915-2008

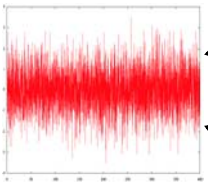
$G(X(t)) \cdot \xi(t)$

Stratonovich（ストラトノヴィッチ）の定義

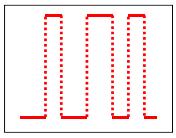
Ruslan L. Stratonovich
1930-1997

$G(X(t)) \circ \xi(t)$

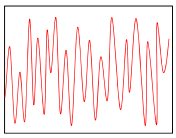
白色ノイズ vs. 現実のノイズ



もともと
不連続な過程



もともと
連続な過程

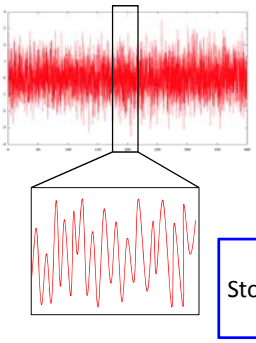


白色ノイズ vs. 現実のノイズ

無数の売り買いの重ね合わせ
↓
本当に不連続な過程

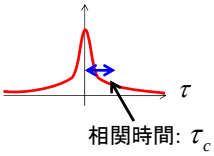
確率微分方程式の定義に
Ito（伊藤）型を用いる

白色ノイズ vs. 現実のノイズ



自己相関関数

$$C(\tau)=\langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle$$



相関時間: $\tau_c > 0$

確率微分方程式の定義に
Storatonovich（ストラトノヴィッチ）型
を用いる

伊藤公式

Itoの確率微分方程式では、変数変換に二次まで入る

$$\frac{dX}{dt}=F(X(t))+G(X(t))\xi(t)$$ の時、

$Y(X)$ が従う方程式は？

$$\frac{dY}{dt}=\frac{dY}{dX}\left(F(X)+G(X)\xi\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2Y}{dX^2}G(X)^2$$

応用例:株価の従う方程式が分かっている時に、
オプション（後で買う権利）価格をどう決めるか？　ブラック・ショールズ方程式

Ito vs. Stratonovich

$$\frac{dX}{dt}=F(X(t))+G(X(t))\xi(t)$$

Ito

- もとは不連続 $\tau_c=0$
- 計算には伊藤公式を用いる必要
- $\langle g(X(t))\xi(t)\rangle=0$

Stratonovich

- $\tau_c\to 0$
- 普通に計算可能
- $\langle g(X(t))\circ\xi(t)\rangle\neq 0$

（未来の ξ(t)が現在に紛れ込む）

Ito vs. Stratonovich

Stratonovichの

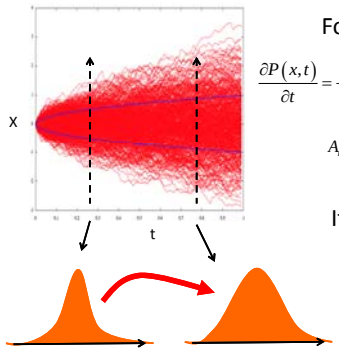
$$\frac{dX}{dt}=F(X(t))+G(X(t))\circ\xi(t)$$

Itoの

$$\frac{dX}{dt}=F(X(t))+\frac{G'(X(t))G(X(t))}{2}+G(X(t))\xi(t)$$

に等しい

確率分布の時間発展



Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(A_1(x)P(x,t)\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_2(x)P(x,t)\right)$$

$$A_n(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{n!t}\left\langle\left(X(t)-X(0)\right)^n\right\rangle\Big|_{X(0)=x}$$

Itoの確率微分方程式なら

$$A_1(x)=F(x)$$

$$A_2(x)=G^2(x)$$