曲面の変分問題

— 極小曲面論入門 I —

— 極小曲面研究の歴史概観 —

「さきがけ数学塾」2011 年 3 月 8 日

小磯深幸 (九州大学大学院数理学研究院 & JST さきがけ)

0. はじめに

1. 変分問題 $\approx$ 無限次元空間上の関数の最大・最小値について調べる.

【応用】

1) 数学：変分問題の解は良い性質をもつ標準的なものとなっていることが多い. (例：ポアンカレ予想の解決にもエネルギーを小さくしていく変形が用いられた.)

2) 自然現象の解明：自然現象は「なんらかのエネルギーを最小にする」状態をとると説明がつく場合が多い. (「変分原理」という.)

3) もの作り：エネルギー最小のものは安定だったり効率が良かったりするので, 都合が良い.

2. 曲線，曲面，空間の曲率 $\approx$ ものの曲がり具合い

【応用】

1) 数学：幾何学的な対象の性質を表現するのに必要.

2) 自然現象の解明：

例 1. 自然界に現れるものの形 (ミクロなものからマクロなものまで)

例 2. 一般相対論 (宇宙における重力場の理論)

宇宙空間に星があると，その重力によって空間が曲がると考える.

$\longrightarrow$ 天体の動き，光の進み方，ブラックホール等の解明.

3) もの作り：高速道路やジェットコースターのカーブ，屋根の形，その他.

表 1. 曲面の変分問題の例

	臨界点 $(f' = 0)$	汎関数 f	付加条件	物理的実現
A	極小曲面	面積	なし	石鹸膜
B	平均曲率一定曲面	面積	体積一定	シャボン玉
C	非等方的平均曲率一定 (**CAMC**) 曲面	非等方的表面エネルギー	体積一定	小さい結晶, ある種の液晶
D	平均曲率が高さの 1 次関数である曲面	面積 + 重力エネルギー	体積一定	液滴

$$A \subset B \subset C, \qquad A \subset B \subset D$$

同じ針金枠を張る **2** 種類の石鹸膜 (どちらも向き付け可能)

同じ針金枠を張る石鹸膜 (左：向き付け可能，右：向き付け不可能)

石けん膜 $\Longleftrightarrow$ 極小曲面　　シャボン玉 $\Longleftrightarrow$ 平均曲率一定曲面

【極小曲面の例】

[1] 常らせん面 (helicoid)

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = kv$$

[2] 懸垂曲面 (catenoid)

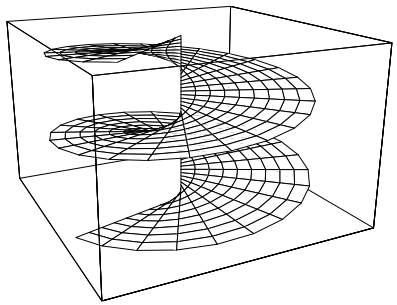
$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{2}\left(e^{z/a}+e^{-z/a}\right),\ (a>0)$$

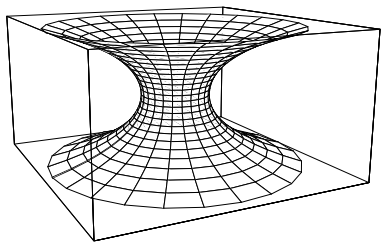
[3] Scherk の極小曲面

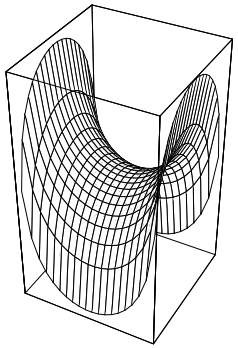
$$z = \log\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

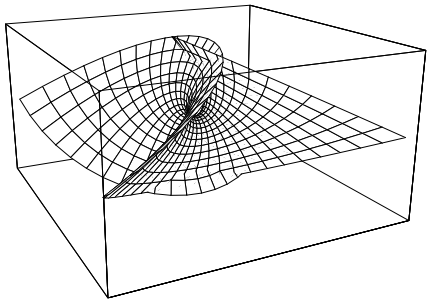
[4] Enneper の極小曲面

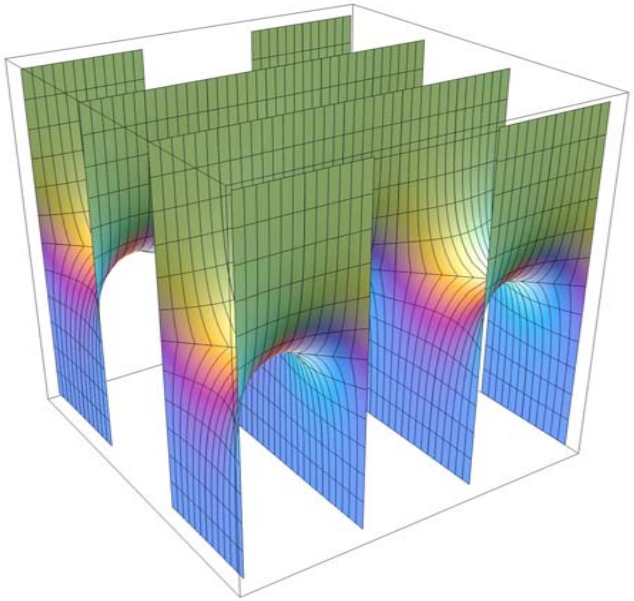
$$x = u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ y = -v+\frac{v^3}{3}-u^2v,\ z = u^2-v^2$$

[1]


[2]


[3]


[4]




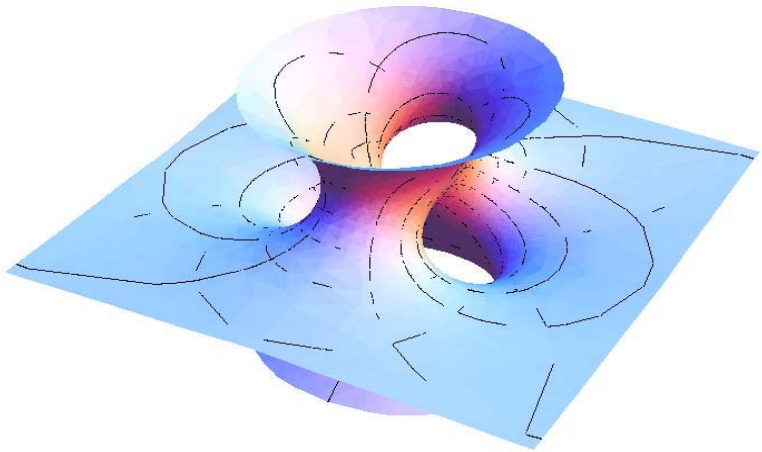


Figure 1: Scherk の極小曲面 (左)，Costa 曲面 (右)

1　極小曲面論の歴史 — 古典的 Plateau 問題を中心に —

1.1 Plateau 問題とは? Plateau 問題誕生前後

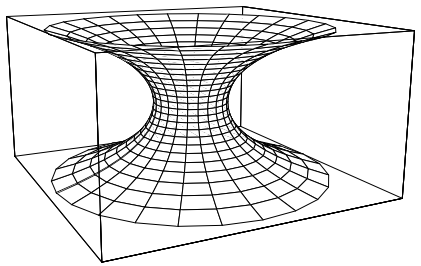
J. L. Lagrange(1762):「与えられた閉曲線を境界にもつ曲面全体の中で面積最小のものをみつけたい」

$f(x,y)$ のグラフ $z=f(x,y)$ が「面積最小」であるための必要条件

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0 \tag{1}$$

例：平面

L.Euler がみつけた「面積最小曲面」の例：懸垂曲面



$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{2}\left(e^{z/a}+e^{-z/a}\right),\ (a>0)$$

J.B.M.C.Meusnier の仕事：

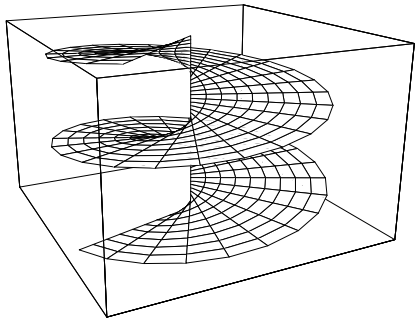
(1) と同値な式 (極小曲面の方程式) を導いた **(1776)**：

$$\left(1+f_y^2\right)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+\left(1+f_x^2\right)f_{yy}=0 \tag{2}$$

(2) が，曲面 $z=f(x,y)$ の平均曲率が 0 であることと同値であることを示した．その後，平均曲率が至るところ 0 であるような曲面が極小曲面と呼ばれるようになった．

常螺旋面が **(2)** を満たすことを示した：

$$\frac{y}{x}=\tan(az), \quad (a\neq 0),$$



極小曲面を，複素関数を用いて表す公式を求める研究： **G.Monge (1784)，A. Legendre (1787)，S.F.Lacroix，A.M.Ampére，他.**

J.D.Gergonne (1816) の問題：

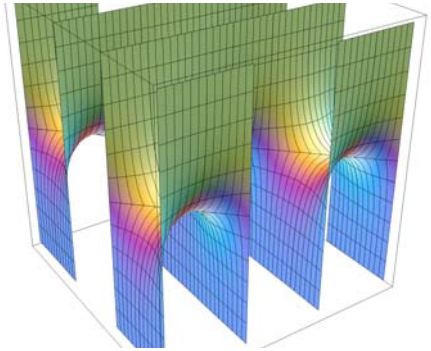
(i) ２つの円柱の交わりで張られる曲面の中で面積最小のものは?

(ii) 空間の四辺形で張られる曲面の中で面積最小のものは?

(iii) ２つの円を通る曲面の中で面積最小のものは?

H.F.Scherk が **5** つの新しい極小曲面の例を発見 **(1832, 1835)**：

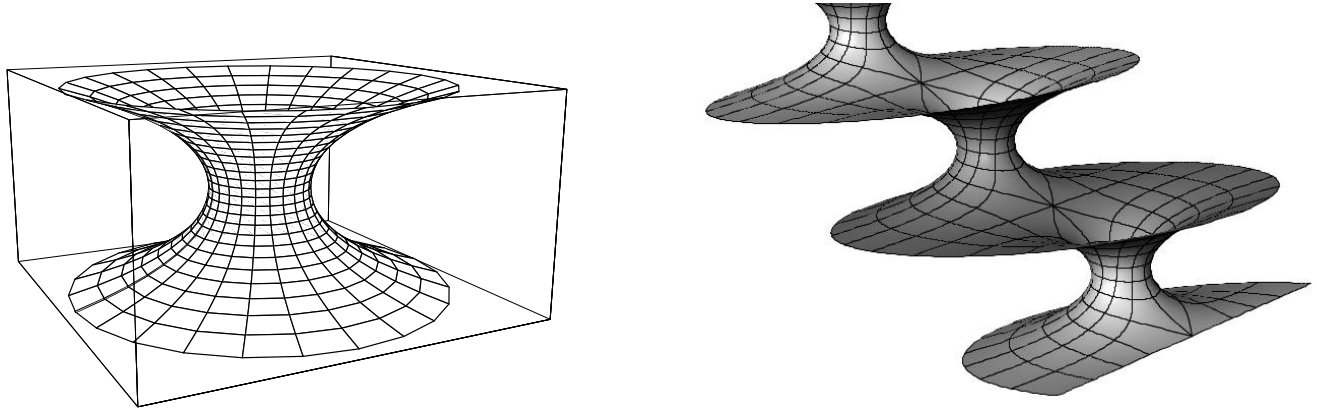
$$z = \log_e\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$



1855 年頃から極小曲面の研究は非常に盛んに:**O.Bonnet**, **J.A.Serret**, **B.Riemann**, **K.Weierstrass**, **A.Enneper**, **H.A.Schwarz**, 他：

極小曲面の例の構成, 表現公式の導出, 与えられた直線や円や多角形を境界にもつ極小曲面の構成やその性質の研究, 他.

Riemann：円の族によって構成される極小曲面の新しい族を発見.



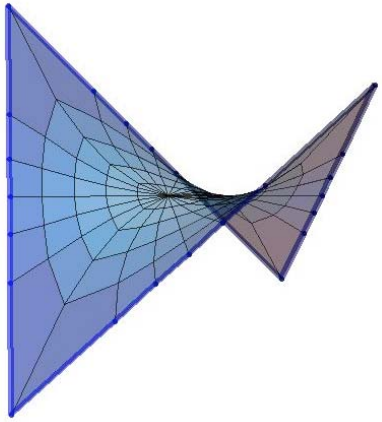
懸垂面 (左), **Riemann** の極小曲面 (右)

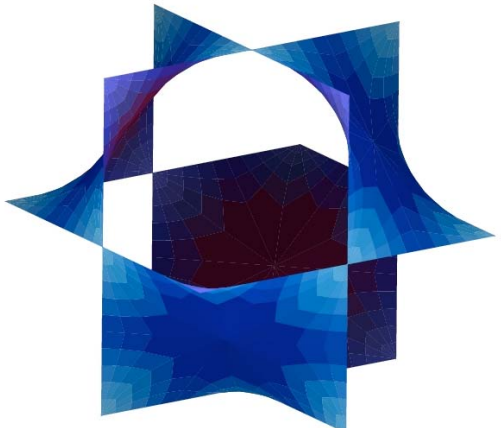
円の族によって構成される極小曲面はこれらのみ.

Riemann は，空間内の特別な等辺四辺形で張られる極小曲面の存在を証明 (**1865** 年頃)

Schwarz は一般の空間四辺形で張られる面積最小曲面の存在証明に成功!　(**1867** 年)

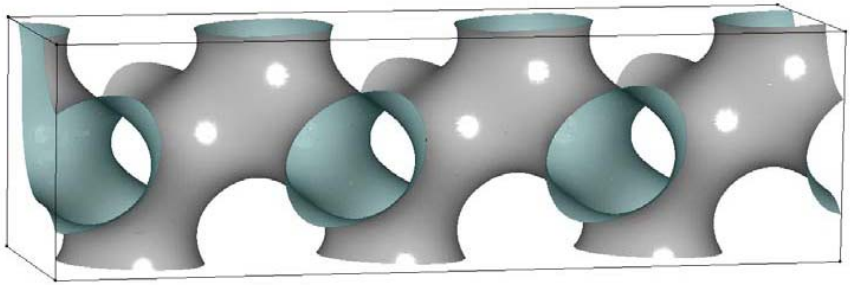
彼らの証明法：極小曲面を具体的に構成した.



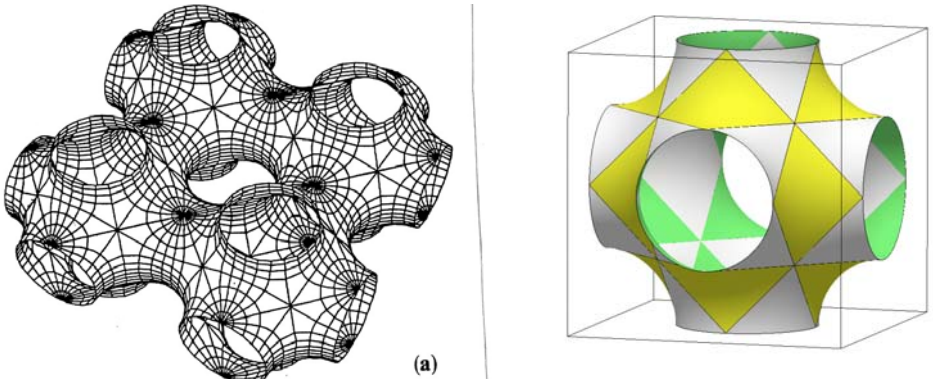


Riemann，**Schwarz** の曲面 (左)，それを拡張した三重周期曲面 (右)
(図の出典　岡山大学・藤森祥一氏の **HP**)

この三重周期極小曲面は **Schwarz D 曲面**と呼ばれ，ダイヤモンドと同じ対称性をもつ．これは，**Schwarz P 曲面**，**Gyroid** (共に三重周期極小曲面) と共に，ナノあるいはミクロスケールの自然現象に現れる曲面として，物理学，化学，工学その他の分野の研究にも登場する．



Gyroid (A. Schoen, 1970)



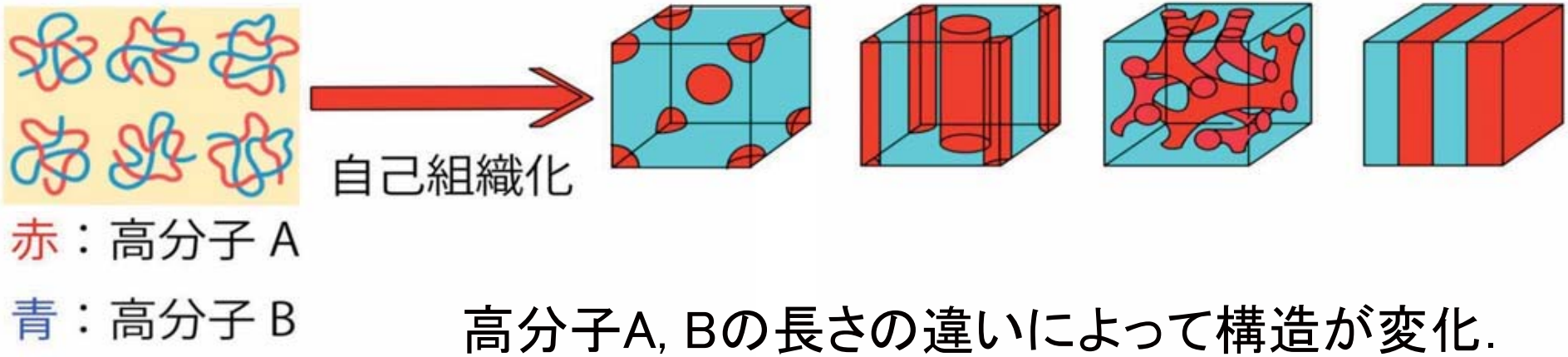
Schwarz P 曲面

(図の出典: A. Ros, Interfaces and Free Boundaries 9, 2007.】)

関連する物理(自然)現象の例

【ABブロック共重合体の自己組織化】

ナノスケール．三重周期構造を持つとみなす．



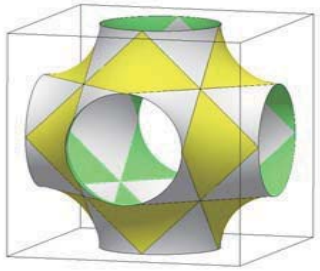
高分子A, Bの長さの違いによって構造が変化．

左から，球状構造，六方柱状，共連続，ラメラ．

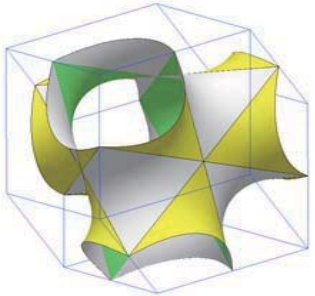
共連続構造とは?

実験観察上，三重周期をもつ極小曲面（平均曲率0の曲面）の構造をもつと考えられた．Schwarz P曲面だと思われていた．

P曲面

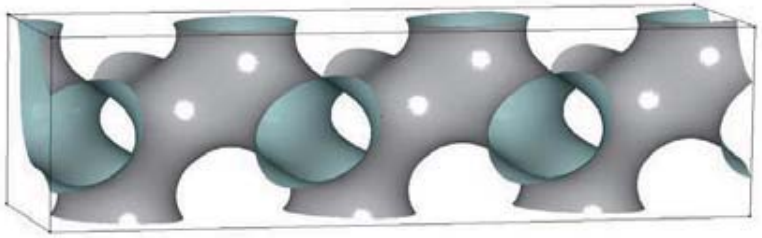


P 曲面の一周期



D 曲面の一周期

1970年　A. Schoen が
ジャイロイドを数学的に発見.



G 曲面　（絵の出典：A. Ros, 2007）

実験により，ジャイロイド（G 曲面）が観察された!
現在では，G, P, D 曲面が現れるとされる.

Riemann と Schwarz によって構成された極小曲面 (Schwarz D 曲面) は，(u,v) 平面上の関数 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ を成分とする点 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ の集合として，次のように表される．

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}\left\{ \int_{w_0}^{w} \frac{1}{2}(1-g(\zeta)^2) f(\zeta)\, d\zeta \right\} \\ \mathbf{Re}\left\{ \int_{w_0}^{w} \frac{\sqrt{-1}}{2}(1+g(\zeta)^2) f(\zeta)\, d\zeta \right\} \\ \mathbf{Re}\left\{ \int_{w_0}^{w} f(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta \right\} \end{pmatrix} \tag{3}$$

ただしここで，$w = (u,v) = u + \sqrt{-1}v$ であり，w_0 は (u,v) 平面上の定点である．$f(w)$ と $g(w)$ は複素変数 $w = u + \sqrt{-1}v$ の関数

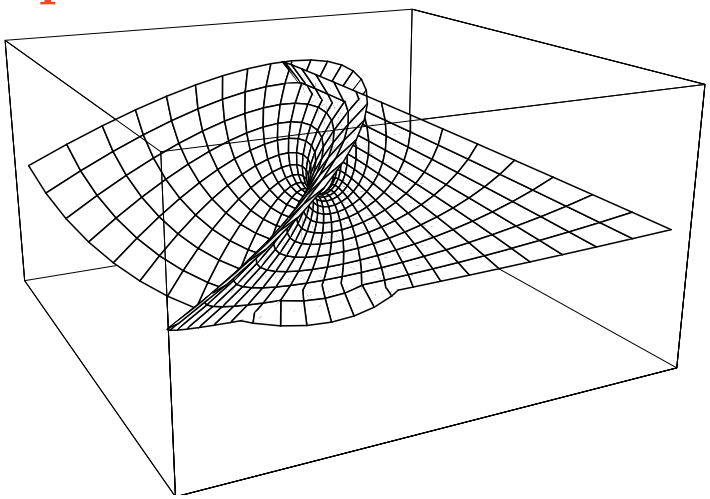
$$f(w) = (1 - 14w^4 + w^8)^{-1/2}, \quad g(w) = w$$

で，**(3)** の右辺の積分は，複素積分である．

(3) は，**Enneper(1864** 年**)** と **Weierstrass(1866** 年**)** によって独立に導き出され，**Weierstrass-Enneper** の表現公式と呼ばれている．なお，この公式の最も簡単な応用例は，**(3)** に $f(w) = 2$, $g(w) = w$ を代入して得られる曲面

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ \ y = -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v,\ \ z = u^2 - v^2$$

で，**Enneper** の極小曲面と呼ばれる．



Enneper の極小曲面

19 世紀末の時点では，**Lagrange** の問題への数学的解答は，**Riemann**, **Schwarz** による空間四辺形を張る面積最小曲面の存在のみ.
一方，19 世紀後半，ベルギーの物理学者 **Plateau** は，石鹸膜の実験により極小曲面の性質を調べた. $\longrightarrow$ 与えられた枠を張る極小曲面について調べるという問題は **Plateau 問題**と呼ばれるようになった.

1.2 古典的 Plateau 問題の解の存在

J.Douglas (ダグラス), **T.Radó** (ラドー) (1930 年)

任意の単純閉曲線 Γ に対し，それで張られる極小曲面が存在する.

$\longrightarrow$ **Douglas** は，第 1 回のフィールズ賞 を受賞 (1936 年).

Douglas の方法は，高次元空間内の曲面に対しても適用可能. また，複数の閉曲線より成る枠を張る曲面に対しても適用可能である.

Courant(Douglas の方法を改良) による証明の概要を述よう.

まず，基本的なアイデアを述べる．Γ を $\mathbf{R}^3$ 内の閉曲線とする．Γ を張る円板型曲面*全体 $\mathcal{S}$ を考え，その面積の下限を A_0 とする．すると，$\mathcal{S}$ に属する曲面の列 $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ で $\lim_{n\to\infty} A(X_n) = A_0$ となるものが存在する．$\lim_{n\to\infty} X_n$ を X とおけば，X の面積は A_0 であり，この X は Γ を張る面積最小曲面となっている．故に，X は Γ を張る円板型極小曲面である．この方法は最小化法と呼ばれ，変分問題の解の存在証明の方法として基本的なものである．

この最小化法で難しい点は，極限 $\lim_{n\to\infty} X_n$ が存在するかどうかという点である．**Douglas-Courant** は，次のようにしてこの困難を克服した．

---

*円板から $\mathbf{R}^3$ への滑らかな写像によって与えられる曲面.

Γ 上に異なる **3** 点 Q_1, Q_2, Q_3 をとる．$\mathbf{R}^2$ の単位円 $C = \{(u,v)|u^2+v^2=1\}$ 上に異なる **3** 点 P_1, P_2, P_3 をとる．$B := \{(u,v)\,|\,u^2+v^2 \leq 1\}$ から $\mathbf{R}^3$ への C^2 級写像で，C を Γ の上に **1** 対 **1** に写すもの全体を $\mathcal{S}$ とおく．$X \in \mathcal{S}$ に対し，B から B への滑らかな全単射 φ との合成 $\tilde{X} := X \circ \varphi$ をとる（つまり，曲面の形を変えないで，表示の仕方のみ変える）ことにより，

(i) $\tilde{X}(P_j) = Q_j \qquad j = 1, 2, 3$

(ii) $\left|\dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial u}\right| = \left|\dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial v}\right|, \qquad \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial v} = 0$

を満たすようにできる*．故に，$\tilde{X} \in \mathcal{S}$ で **(i)**, **(ii)** を満たすもの全体の成す集合を $\tilde{\mathcal{S}}$ とおくと，$\tilde{\mathcal{S}}$ もまた，Γ を張る円板型曲面全体の集合．

---

*条件 (ii) が成り立つとき，(u,v) は曲面 $\tilde{X}$ の等温パラメータであるという．

$\{A(X) \mid X \in \tilde{\mathcal{S}}\} \subset \mathbf{R}$ は非負の下限 A_0 をもつ．曲面の列 $X_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3) \in \tilde{\mathcal{S}}$ で $\lim_{n\to\infty} A(X_n) = A_0$ なるものが存在．**(ii)** を使うと，

$$\begin{aligned} A(X_n) &= \iint_B \left| \frac{\partial X_n}{\partial u} \times \frac{\partial X_n}{\partial v} \right| dudv = \iint_B \left| \frac{\partial X_n}{\partial u} \right| \cdot \left| \frac{\partial X_n}{\partial v} \right| dudv \\ &= \frac{1}{2} \iint_B \left(\left| \frac{\partial X_n}{\partial u} \right|^2 + \left| \frac{\partial X_n}{\partial v} \right|^2 \right) dudv = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} D(x_n^k) \end{aligned}$$

ここで，$D(h) := \iint_B \left(\left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right) dudv$. **(Dirichlet 積分)**

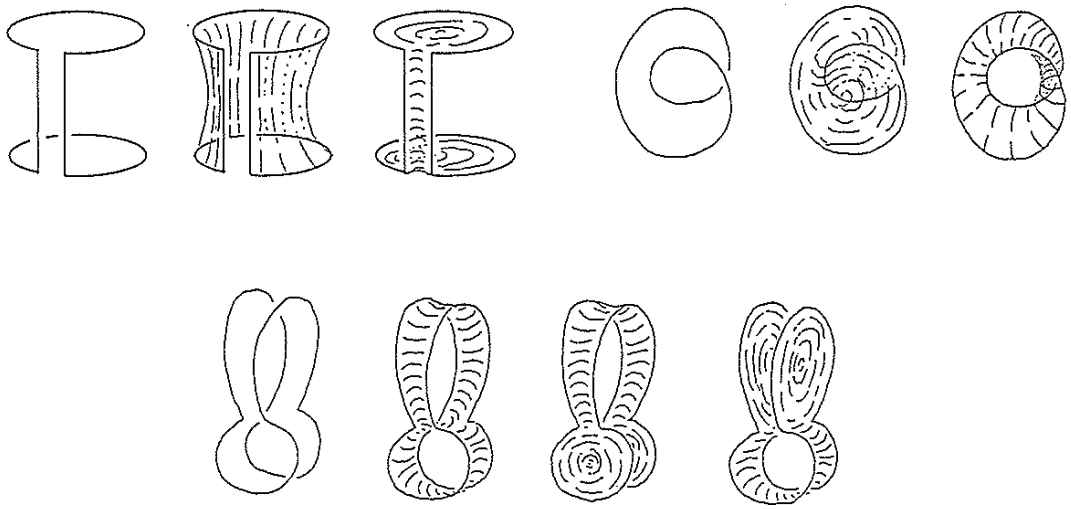
y_n^k を，x_n^k と同じ境界値をもち B で調和 (すなわち $\frac{\partial^2 y_n^k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y_n^k}{\partial v^2} = 0$) な関数とし，$Y_n = (y_n^1, y_n^2, y_n^3)$ とおく．$Y_n \in \tilde{\mathcal{S}}$ である．

$$
\begin{aligned}
A(X_n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} D(x_n^k) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} D(y_n^k) = \frac{1}{2}\iint_B \left(\left|\frac{\partial Y_n}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial Y_n}{\partial v}\right|^2 \right) dudv \\
&\geq \iint_B \left|\frac{\partial Y_n}{\partial u}\right| \cdot \left|\frac{\partial Y_n}{\partial v}\right| dudv \geq \iint_B \left|\frac{\partial Y_n}{\partial u} \times \frac{\partial Y_n}{\partial v}\right| dudv = A(Y_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．故に，$\lim_{n\to\infty} A(Y_n) = A_0$ である．また，Y_n が条件 **(i)** を満たすことから，$\{Y_n|_C\}_n$ が同程度連続，従って，$\psi := \lim_{n\to\infty} Y_n|_C$ が存在することが示される．さらに，B での調和関数は B の境界 C 上の値のみで決まることから，$\psi : C \to \mathbf{R}^3$ を境界値にもち B で調和な写像を $Y : B \to \mathbf{R}^3$ とおくと，$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$, $A(Y) = A_0$ であることがわかる．この Y は Γ を張る「円板型曲面」の中で面積最小であり，したがって，Γ を張る極小曲面である．

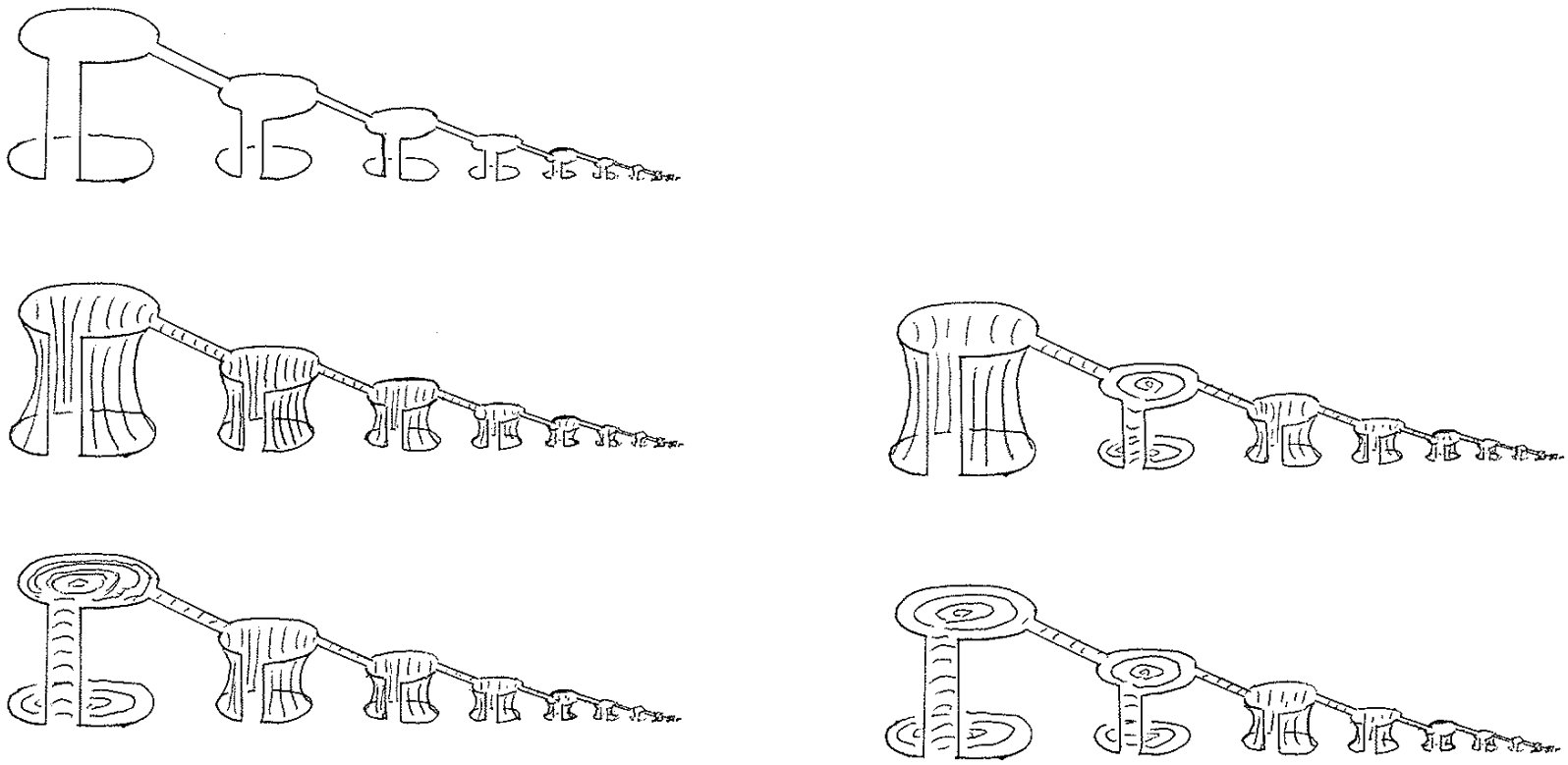
1.3 古典的 Plateau 問題の解の一意性

閉曲線 Γ に対して，それで張られる極小曲面の一意性は一般には成立しないし，解の個数が有限個であるかどうかすら明らかでない.



(上図) **2** 種類の極小曲面を張る閉曲線の例

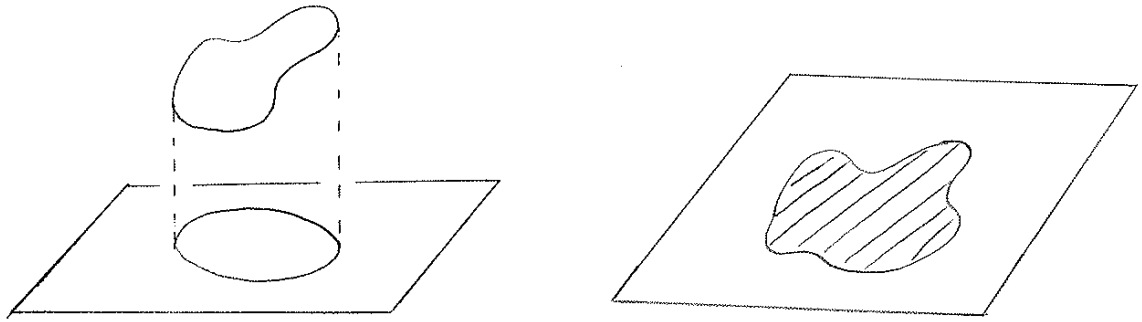
(下図) **3** 種類の極小曲面を張る閉曲線の例



モンスター曲線：無限個の極小曲面を張る閉曲線

定理 1.3.1. 平面内の単純閉曲線，平面閉曲線に十分近い単純閉曲線は，コンパクト極小曲面をただ 1 つしか張らない．(下図　右)

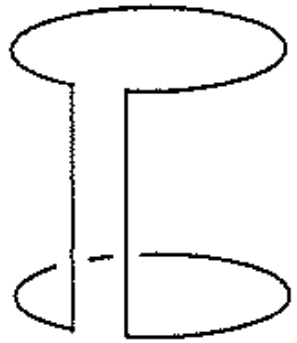
定理 1.3.2 (T. Radó, 1933)**.** 閉曲線 Γ が平面内の凸閉曲線に **1** 対 **1** に直交射影 (または，中心射影) されるならば，Γ で張られるコンパクト極小曲面はただ 1 つしかない．(下図　左)



定理 1.3.3 (J. C. C. Nitsche, 1973)**.** 閉曲線 Γ の全曲率 $= \displaystyle\int_\Gamma k\,ds$ が 4π よりも小さいならば，Γ で張られる円板型極小曲面はただ 1 つしかない.

ここで，「円板型極小曲面」というのは，円板からの滑らかな写像の像として得られる極小曲面のことである.

例．平面内の凸閉曲線の全曲率は 2π.



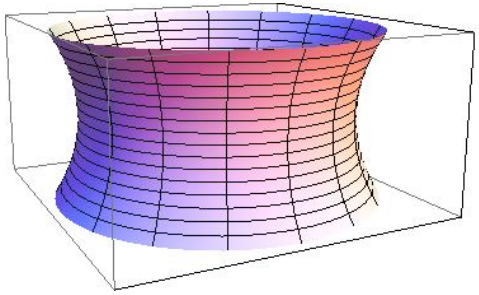
例．右図の閉曲線の全曲率は約 6π.

1.4　極小曲面の安定性（面積極小か否か）

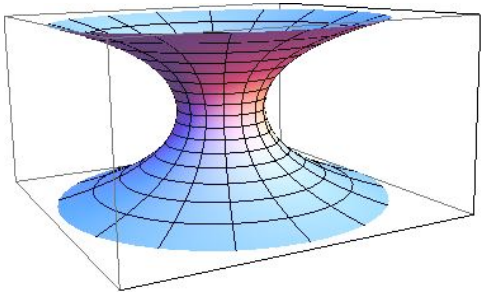
同じ枠を張る曲面のうちで面積極小 (近い曲面と比べて面積最小) の極小曲面を安定な極小曲面という.

$$\text{石けん膜} \Longleftrightarrow \text{安定な極小曲面}$$

【同じ枠を張る 2 種類の極小曲面 (懸垂面)】

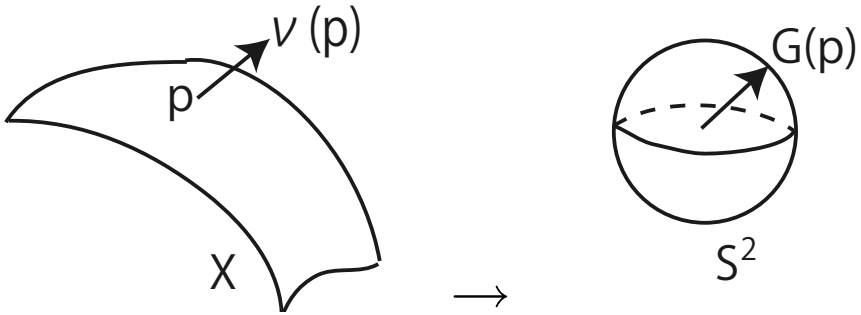


安定 (面積極小)



不安定 (面積極小ではない)

曲面 X の点 P での単位法ベクトルの始点が $\mathbf{R}^3$ の原点と一致するようにすると，終点は原点中心の単位球面 S^2 上の点．この点を $G(p)$ とおく．G が定める X から S^2 への写像を X の **Gauss** 写像という．



定理 1.4.1 (J. L. Barbosa-M. do Carmo, 1976)**.** コンパクトで向き付け可能な極小曲面 X の **Gauss** 写像の像の面積が 2π よりも小さいならば，X は安定である．

定理 **1.4.1** から，極小曲面の法線方向の変化があまり大きくなければ安定であることがわかる．故に極小曲面の十分小さい部分は安定．

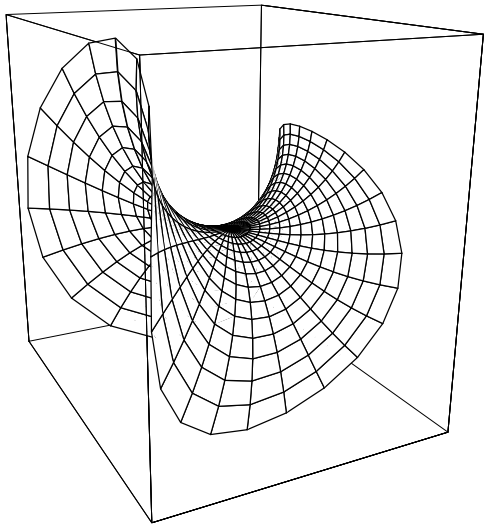
【ぎりぎり「面積極小でない」極小曲面 (M. Koiso, 1984)】

$$x = u\cos v + \frac{1}{4}u^2\cos(2v) - \frac{1}{3}u^3\cos(3v) - \frac{1}{8}u^4\cos(4v)$$

$$y = -u\sin v - \frac{1}{4}u^2\sin(2v) - \frac{1}{3}u^3\sin(3v) - \frac{1}{8}u^4\sin(4v)$$

$$z = u^2\cos(2v) + \frac{1}{3}u^3\cos(3v)$$

$$0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi$$



この極小曲面の **Gauss** 写像は半球面の上への **1** 対 **1** 写像であるので，定理 **1.4.1** により，その任意の真部分集合は面積極小である．一方，この曲面全体については，面積汎関数の **2** 階微分（第 **2** 変分という）は 0 であり，第 **3** 変分が 0 でないような曲面の変形の方向があるので，面積極小ではない．第 **3** 変分の計算及び具体例の構成には，上述の **Weierstrass-Enneper** の表現公式 **(3)** が用いられる．

1.5 安定な極小曲面の個数

定理 1.5.1 (M. Koiso, 1983)**.** **3 次元ユークリッド空間の凸領域の境界上にある滑らかな単純閉曲線は，安定で自己交差をもたない円板型極小曲面を高々有限個しか張らない.**

定理 1.5.1 証明の方針：

Γ を定理の仮定を満たす閉曲線とし，Γ で張られる安定で自己交差をもたない円板型極小曲面全体を $\mathcal{S}_0$ とする．$\mathcal{S}_0$ がコンパクトであることと，$\mathcal{S}_0$ の各点が孤立点であることが示せる．このことより，$\mathcal{S}_0$ が有限集合であることがわかる.

問：解の個数が境界 Γ の性質を用いて表せるか?

1.6　一般化，新しい方法，他

【一般化】

[1] 平均曲率一定曲面に対する **Plateau** 問題

[2] より一般の変分問題の解に対する問題

【幾何学的測度論】

[1]「最小化列の収束」を示すのに有効.

[2] 曲面の位相型を制限する必要がない．(制限できない．)

例：任意の単純閉曲線 Γ は，向き付け可能で滑らかな面積最小曲面を張る．そしてこの曲面は自己交差を持たない．(円板型曲面とは限らない．)