変分法とその偏微分方程式への応用
パターン形成と相分離現象

大下承民
岡山大学大学院自然科学研究科

2011 年 3 月 7 日

目次

1 **序論** 2
1.1 変分問題の例 2
1.2 最小問題 3
1.3 オイラー・ラグランジュ方程式 4
1.4 ルジャンドル・アダマール条件 5

2 **関数空間** 6

3 **直接法** 7
3.1 序論 7
3.2 直接法の抽象的結果 10
3.3 制約条件付き直接法 11
3.4 弱下半連続性 11

4 **フレッシェ微分** 12
4.1 臨界点 12
4.2 臨界点とオイラー・ラグランジュ方程式，弱解の正則性 12
4.3 ラグランジュの未定乗数 13

5 **線形偏微分方程式への応用** 13
5.1 ポアッソン方程式 13
5.2 固有値に対するレイリー・リッツの特徴付け，クーランの最大最小原理 14

6 **関数空間の近似と数値解法** 15

7 非線形偏微分方程式への応用 16

8 カーン・ヒリアードモデル 17

9 Γ 収束 21

1 序論

1.1 変分問題の例

様々な物理法則が変分原理であらわされ，変分法は微分幾何学，工学，偏微分方程式などが交叉する分野である．いくつかの変分問題の例を紹介しよう．

例 1.1. 弾性体モデルにおける問題.

$$I(u) = \int_\Omega W(\nabla u(x))\,dx$$

を最小化する関数 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を求めること．ただし，∇u は変形勾配で, $\det(\nabla u) > 0$ とし，境界 $\partial\Omega$ 上で $u = u_0$ が与えられているとする．また，3×3 行列 A に対して $W = W(A) \geq 0$ は与えられた関数で，材料に蓄えられるエネルギーを表す．例えば $W(A) = f(\det A)$ のような形で表される.

例 1.2. プラトー問題は，与えられた境界をもつ極小曲面を求める問題．表面積を最小にする曲面を探すことに帰着する．プラトーは数多くの実験により，石鹸膜は表面積を最初にするように張られると考えた.

極小グラフは，グラフで表される極小曲面である．関数 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフの表面積は

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,dx$$

で与えられる．境界条件

$$\Omega \text{ の境界 } \partial\Omega \text{ 上 } u = u_0 \tag{1}$$

のもとで $I(u)$ を最小化する u は，極小曲面方程式

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0$$

を満たす．この左辺はグラフの平均曲率の 2 倍を表す.

弾性膜．2 次元の弾性体で平衡状態が平面内にあり，変位は垂直方向のみで，エネルギーが伸張による面積の変化量にだけ比例すると考えると，弾性膜の平衡問題は

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1\,dx \tag{2}$$

の最小問題に帰着する.

例 1.3. 懸垂線，回転極小曲面の問題．曲線 $y = u(x) > 0$ $(a \le x \le b)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積

$$I(u) = 2\pi \int_a^b u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

を境界条件 $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ のもとで最小化する問題．最小面積の曲面は懸垂面である．また，境界条件の他に，長さ一定

$$J(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx = \text{一定}$$

の制約条件のもとで位置エネルギー I を最小化する曲線は懸垂線である．

例 1.4. ディリクレ原理．$N = 1$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x, u, p) = F(p) = \frac{1}{2}|p|^2$．ディリクレ積分

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \tag{3}$$

を境界条件 (1) のもとで最小化する関数が，ラプラス方程式 $\Delta u = 0$[*1]の境界値問題の解である．これをディリクレ原理という．

$n = 2$ のとき，(3) は弾性膜のエネルギー (2) の近似式（$|\nabla u| \ll 1$）として現れ，最小化関数は弾性膜の平衡状態を表している．

また，(3) は capacity の問題としても現れる．Ω が二つの導体曲面で囲まれている $(\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ とき, Γ_1 上で $u(x) = 1$, Γ_2 上で $u(x) = 0$ という境界条件で考えると，最小問題の最小値は二つの導体の電位差を 1 としたときにためられる電荷量（capacity）を表している．

例 1.5. 最急降下線の問題．曲線 $y = u(x)$, $u(a) = 0$, $u(b) = \beta$, $u(x) > 0$ $(0 < x \le b)$ に沿って質点が落下するとき，所要時間

$$I(u) = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + u'(x)^2}{u(x)}}\, dx$$

を最短にする u を求めること．

1.2 最小問題

汎関数

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \tag{4}$$

を考察する．ただし，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域で境界は滑らかとし, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ は Ω 内の generic な点を表す．

[*1] $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ はラプラシアン

$\mathbb{R}^{N\times n}$ は $N\times n$ 実行列の集合で,

$$p=\begin{bmatrix} p_1^1 & \cdots & p_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^N & \cdots & p_n^N \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{N\times n}$$

に対して，$|p|=(\sum_{\alpha=1}^N\sum_{i=1}^n(p_i^\alpha)^2)^{1/2}$.

$F:\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times n}\to\mathbb{R}$, $F=F(x,u,p)=F(x_1,\cdots,x_n,u^1,\cdots,u^N,p_1^1,\cdots,p_n^N)$ は与えられた関数.

$u:\Omega\to\mathbb{R}^N$, $u=(u^1,\cdots,u^N)\in\mathbb{R}^N$ はベクトル値またはスカラー値の関数，u^α は u の成分,

$$\nabla u=\begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u^N}{\partial x_n} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{N\times n}$$

は u のヤコビ行列である.

最小問題とは，境界条件が与えられているなど，適当な条件を満たす関数 u の中で $I(u)$ を最小化するものを求めること，すなわち，条件を満たす許容関数全体の集合を M とするとき,

$$I(\overline{u})=\alpha:=\inf_{u\in M}I(u) \tag{P}$$

となる $\overline{u}\in M$ を求める問題である.

1.3 オイラー・ラグランジュ方程式

F を滑らかとする．境界条件 (1) を満たす滑らかな関数 u が最小化関数であると仮定すると，任意の $\varphi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して $\frac{d}{dt}I(u+t\varphi)|_{t=0}=0$ でなければならない．つまり

$$\int_\Omega\sum_{\alpha=1}^N\left\{\sum_{j=1}^n F_{p_j^\alpha}(x,u(x),\nabla u(x))\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_j}+F_{u^\alpha}(x,u(x),\nabla u(x))\varphi^\alpha\right\}dx=0,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N) \tag{EL-W}$$

である．これをオイラー・ラグランジュ方程式の**弱形式**という．また，φ を**テスト関数**という．部分積分[*2]を行い，φ が任意であることを使うと，u は次の古典形の**オイラー・ラグランジュ方程式**を満たすことがわかる.

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}F_{p_j^\alpha}(x,u(x),\nabla u(x))-F_{u^\alpha}(x,u(x),\nabla u(x))=0,\quad\alpha=1,\cdots,N \tag{EL}$$

[*2] $\int_\Omega f\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dx=\int_{\partial\Omega}fg\nu^j\,dS-\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x_j}g\,dx$

ディリクレ境界条件 (1) を課さない場合は，(EL-W) は任意の $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ に対して成り立たなければならない．このときは自然境界条件

$$\sum_{j=1}^{n} F_{p_j^\alpha}(x,u(x),\nabla u(x))\nu^j(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{5}$$

が得られる．$\nu = (\nu^1, \cdots, \nu^n)$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである．

(EL) は，$N > 1$ のとき連立方程式，$N = 1, n > 1$ のとき単独偏微分方程式，

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} F_{p_j}(x,u(x),\nabla u(x)) - F_u(x,u(x),\nabla u(x)) = 0, \tag{6}$$

さらに，$n = N = 1$ のときは単独常微分方程式になる．古典的な変分問題のいくつかは，オイラー・ラグランジュ方程式に帰着させることで解くことができる．特に $n = 1$ の場合，(EL) は常微分方程式であるから，解を求積法により具体的に表せる場合がある．

例 1.6. 非線形ポアッソン方程式

$N = 1$, $F(x,u,p) = \frac{1}{2}|p|^2 - G(x,u)$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とすると，汎関数

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - G(x,u(x))\,dx$$

に対するオイラー・ラグランジュ方程式は非線形ポアッソン方程式

$$-\Delta u = g(x,u) \tag{7}$$

になり，自然境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

となる．これは外向き法線微分が零であることを意味しており**斉次ノイマン境界条件**という．$g(x,u) = f(x)$ の場合が通常のポアッソン方程式である．

1.4 ルジャンドル・アダマール条件

$N = 1$ のとき，滑らかな最小化関数 u が存在すれば $\frac{d^2}{dt^2} I(u + t\varphi)|_{t=0} \geq 0$ より

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}(x,u(x),\nabla u(x))\xi_i\xi_j \geq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega) \tag{8}$$

が成り立たなければならない．これを Legendre の条件という．一般 ($N > 1$) の場合は, Legendre–Hadamard 条件

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^\alpha \partial p_j^\beta}(x,u(x),\nabla u(x))\xi_i\xi_j\eta^\alpha\eta^\beta \geq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N, x \in \Omega) \tag{9}$$

が成り立たなければならない．

問題 1. これらを示せ

Legendre 条件と Legendre–Hadamard 条件は， F の p に関する凸性，および凸性よりも弱い rank one convexity という性質がそれぞれ重要であることを示唆している．第 3.4.1 節を見よ．

厳密な議論をするためには，滑らかな関数あるいは C^1 級の関数の中で最小化関数を見つけることは難しいので，まず，許容関数のクラスを広げて最小問題を考え，最小化関数の正則性の議論は別に行う．このとき正則性はいつも成り立つわけではないことに注意が必要である．実際，C^1 級の関数の中では最小値に到達せず，区分的 C^1 級の関数（つまりカドをもつ関数）の中ではじめて最小値が達成される場合がある．

例 1.7. $\Omega = (0,1)$, $N = n = 1$, $F(x,u,p) = F(p) = (p^2-1)^2$ とし，境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ のもとで考える．$\overline{u}(x) = x$ for $x \in (0, \frac{1}{2})$, $1-x$ for $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ とおくと，$\overline{u}$ は境界条件を満たし $I(\overline{u}) = 0$ であるが， C^1 級ではない．

2 関数空間

次のような記号を用いる．

$C^1([a,b])$	連続的微分可能関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 全体の集合
$C([a,b])$	連続関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 全体の集合
$C^\infty(\Omega)$	滑らかな関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 全体の集合
$C_0^\infty(\Omega)$	台がコンパクトで Ω に含まれる滑らかな関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 全体の集合

表 1　関数空間

線形空間におけるノルムはベクトル（あるいは関数）の大きさを測る物差しである．ノルムにより 2 点間の距離や点列の収束（二つの関数間の距離や関数列の収束）が定義できる．有限次元の線形空間ではすべてのノルムは同値であり，点列の収束はノルムに依存しない．しかしながら，関数空間上には本質的に異なるノルムがたくさん存在する．例えば，$C^1([a,b])$ において二つのノルム

$$\|f\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$$\|f\|_{C} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

を定義したとき，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\|\cdot\|_{C^1}$ で強収束していれば，明らかに $\|\cdot\|_C$ でも強収束しているが，逆は成立しない．

汎関数の変分問題 (P) においては $|u(x)|$ の最大値を評価するのは難しく，積分によるノルムを用いる方が便利である．例えば

$$\|u\|_{L^s} = \left(\int_\Omega |u(x)|^s \, dx \right)^{1/s}, \quad s \in [1, \infty)$$

や

$$\|u\|_{H^{1,s}} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^s + |u(x)|^s \, dx \right)^{1/s}, \quad s \in [1, \infty)$$

である．コーシー列が収束するとき，ノルム空間は**完備**であるといい，完備なノルム空間を**バナッハ空間**という．完備性があると関数解析のいろいろな定理が適用できる．$\sqrt{2}$ に収束する有理数の列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

はコーシー列であるが，有理数の全体からなる集合 $\mathbb{Q}$ の中で極限をもたない．$\mathbb{Q}$ を完備化して実数の集合 $\mathbb{R}$ ができるのと同様にして，完備でないノルム空間は，コーシー列の極限となる元をどんどん追加していくことで完備化できることが知られている．例えば $s \geq 1$ に対して，L^s ノルムが有限である滑らかな関数全体の集合 $\{u \in C^\infty(\Omega)\,;\, \|u\|_{L^s} < \infty\}$ を L^s ノルムに関して完備化してできるバナッハ空間が $L^s(\Omega)$ である．このとき，追加された関数 $u \in L^s(\Omega)$ に対しても $\|u\|_{L^s} < \infty$ である[*3]．また，$H^{1,s}$ ノルムを使えば，バナッハ空間 $H^{1,s}(\Omega)$ ができ，$u \in H^{1,s}(\Omega)$ ならば $\|u\|_{H^{1,s}} < \infty$ である．さらに，$C_0^\infty(\Omega)$ の $H^{1,s}$ ノルムによる完備化を $H_0^{1,s}(\Omega)$ とする．変分法は無限次元バナッハ空間における微分法と捉えることができる．

表 2　変分法とバナッハ空間

古典的な変分法の用語	バナッハ空間での用語
関数（列）	点　（列）
許容関数のクラス	バナッハ空間
変分法	（無限次元空間における）微分法
第一変分	フレッシェ微分（ガトー微分）
停留関数	臨界点，停留点
最小化関数	最小（化）点
最小化関数列	最小化（点）列

3　直接法

3.1　序論

変分法における直接法とは，最小化関数を最小化列の極限として求める方法である．$DI(u) = 0$ を解く事よりも $I(u)$ を最小化する方が容易であるという考え方に基づき，オイラー・ラグランジュ方程式を介さず，変分問題を “直接”解くことを意味する．

ガウスやリーマンはディリクレ原理を当然のことと考えていたようである．

[*3] リーマン積分可能とは限らないのであるが，これは積分の概念を拡張することで克服できる（ルベーグ積分）．また，ほとんどいたる所等しい関数を同一視しなければならない．

> "In any event therefore the integral will be non-negative and hence there must exist a distribution (of charge) for which this integral assumes its minimum value," Gauss

ところが，Weierstrass は，最小値に到達しない変分問題の例を示し，最小値の存在を自明のこととする議論を批判した．この非存在性は単なる数学の問題ではなく，例えば固体のマルテンサイト相において，異なる結晶格子の variant が周期的に現れる構造は，最小点の非存在および最小化列の振る舞いにより説明されると考えられている．

Weierstrass の反例にもかかわらず，ディリクレ原理は非常にすばらしく捨て去ることはできなかった．そしてヒルベルトやルベーグなどの研究により厳密に議論できる手法が完成し，1930–31 年に Douglas と Rado は，ディリクレ積分の最小化を使ってプラトー問題に対する古典的結果を証明した．

まず，有限次元で最小値を持たない例を考えてみる．

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数．$f(x) = e^x$ とする．すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) > 0$ であり, $x_1 > x_2 > \cdots > x_m \to -\infty$ となる数列をとると，$f(x_m) \to 0$, $m \to \infty$ なので $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ であるが，$f(\overline{x}) = 0$ なる実数 $\overline{x}$ は存在しないので， 0 は最小値ではない．

$x \to \pm\infty$ のとき $f(x) \to \infty$ であるような関数であれば, 最小化列の有界性が得られることに注意せよ．

(2) 有界閉集合 $[-1, 1]$ 上の関数．

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ -x + 1, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

とすると， $\inf_{x\in[-1,1]} f(x) = 0$ であるが，0 に到達しない．

この f は $x = 0$ で連続でないことに注意せよ．

次に無限次元の例を考えてみる．どちらも， (P) の下限は 0 であるが $\overline{u}$ が存在しない例である．

(3) Bolza の反例．$N = n = 1, \Omega = [0, 1]$. $F(x, u, p) = F(u, p) = (p^2 - 1)^2 + u^4$. M を区分的 C^1 級関数の全体とする．区間 $[0, 1]$ を m 等分して，各小区間上で $u_m(x) = x - \frac{2k}{2m}$ for $x \in [\frac{2k}{2m}, \frac{2k+1}{2m}]$, $u_m(x) = -x + \frac{2k+2}{2m}$ for $x \in [\frac{2k+1}{2m}, \frac{2k+2}{2m}]$, $k = 0, \cdots, m - 1$ と定義すると $I(u_m) \to 0$ as $m \to \infty$.

(4) Weierstrass の反例．$F(x, p) = (xp)^2$, $\Omega = [-1, 1]$, $M = \{u \in C^1([-1, 1])\,;\, u(\pm 1) = \pm 1\}$. $u_m(x) = \frac{\arctan(mx)}{\arctan m}$ とおくと $I(u_m) \to 0$ as $m \to \infty$.

下限が達成される（最小化関数が存在する）ための条件を考察する．上の反例から二つの条件が浮かび上がってくる．微分積分学でよく知られた定理を思い出そう．

命題 3.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とする．連続関数 $I : M \to \mathbb{R}$ は M において最大値・最小値をもつ．

この命題は次のように示すことができる．

証明. I の**最小化列**，すなわち $\lim_{m\to\infty} I(u_m) = \alpha := \inf_{u\in M} I(u)$ を満たす点列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset M$ をとって

くる．M は有界閉集合なので，Bolzano–Weierstrass の定理より，$\{u_m\}$ から M の中で収束する部分列を取り出すことができる．これをそのまま $\{u_m\}$ で表し，$u_m \to \overline{u} \in M$ とする．I の連続性から

$$I(\overline{u}) = \lim_{m\to\infty} I(u_m) = \alpha \tag{10}$$

となり，I は $\overline{u}$ で最小値に到達する．最大値も同様である． ∎

ここで最小値の存在だけなら，(10) は次の条件

$$u_m \to u \Longrightarrow I(u) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m) \tag{11}$$

で置き換えられることがわかる．

実際，$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ が $\overline{u} \in M$ に収束しているとき，

$$I(\overline{u}) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m) = \alpha$$

であるが，定義より明らかに $I(\overline{u}) \geq \alpha$ なので， I は $\overline{u}$ において最小値に達する．

定義 3.1. (11) が成り立つとき，I は**（点列）下半連続**という．

したがって以下の命題が成り立つ．

命題 3.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とする．下半連続関数 $I : M \to \mathbb{R}$ は M において最小値をもつ．

変分問題 (P) においても同様の議論をするのであるが，関数列を扱うので，どのような収束の概念を用いるかが重要なポイントである．

1. 最小化列が収束する部分列をもつこと（コンパクト性）を示すこと．これは収束列が多い（収束の概念が弱い）ほど成り立ちやすい．

2. 汎関数が下半連続であることを示すこと．これは収束列が少ない（収束の概念が強い）ほど成り立ちやすい．

これら二つの条件を同時に満たすような収束を考える必要がある．

無限次元空間では，ノルムによる普通の収束（強収束）より弱い収束として，弱収束という概念がある．結論からいうと，$H^{1,s}$ 空間（$1 < s < \infty$）における弱収束を用いればうまくいくことがわかる[*4]．そのかわり，許容関数の正則性が失われることに注意しなければならない．[*5]

定義 3.2. $H^{1,s}$ 上の任意の連続線形汎関数 f に対して $m \to \infty$ のとき $f(u_m) \to f(u)$ となるとき，$\{u_m\} \subset H^{1,s}$ は $u \in H^{1,s}$ に**弱収束**するといい，$u_m \rightharpoonup u$ weakly in $H^{1,s}$ で表す．一方，$\|u_m - u\|_{H^{1,s}} \to 0$ であるとき，u_m は u に $H^{1,s}$ で**強収束**するといい，$u_m \to u$ strongly in $H^{1,s}$ で表す．

次のような存在（と一意性の）結果が得られる．

[*4] $\mathbb{R}^n$ では強収束と弱収束の概念は一致する．

[*5] 普通の意味で微分可能とは限らない．例えば，区分的 C^1 級関数を含む．

定理 3.1. $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ を連続とし，次の条件を仮定する．

(F1) ある $s > 1, c > 0, \phi \in L^1(\Omega)$ が存在して，すべての x, u, p に対して $F(x, u, p) \geq c|p|^s + \phi(x)$ が成立．

(F2) すべての x, u に対して $p \mapsto F(x, u, p)$ が凸関数．

このとき，$M = \{u \in H^{1,s}(\Omega)\,;\, u = u_0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とおくと，$I(u_0) < \infty$ ならば I は M 内で下限 (P) に到達する．つまり，(P) の最小点 $\overline{u} \in M$ が存在する．

さらに，すべての x に対して，$(u, p) \mapsto F(x, u, p)$ が狭義凸ならば，最小点 $\overline{u}$ は M において一つしかない．
問題 2. 一意性を示せ．

存在性は次の抽象的結果と弱下半連続性に関する一般的な結果から得られる．

3.2 直接法の抽象的結果

$(V, \|\cdot\|_V)$ を反射的バナッハ空間[*6]とし，$I : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$[*7] の最小問題を考察する．$H^{1,s}(\Omega)$, $1 < s < \infty$ は反射的バナッハ空間である．

最小化列の有界性を保証するために次の条件を考える．
定義 3.3. 条件

$$\|u_m\|_V \to \infty \Longrightarrow I(u_m) \to \infty \tag{12}$$

を満たすとき，I は**強圧的**という．

V における弱収束を $u_m \rightharpoonup u$ weakly in V で表す．
定義 3.4. 条件

$$u_m \rightharpoonup u \text{ weakly in } V \Longrightarrow I(u) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m) \tag{13}$$

が成り立つとき，I は **弱下半連続** という．
定理 3.2. （最小点の存在）$I : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は，反射的バナッハ空間 V 上の恒等的に無限大ではない強圧的かつ弱下半連続な汎関数とする．このとき，I は下に有界で，下限に到達する．すなわち，

$$I(\overline{u}) = \inf_{u\in V} I(u)$$

を満たす $\overline{u} \in V$ が存在する．

証明. $\{u_m\}$ を最小化列とする．すなわち，$\lim_{m\to\infty} I(u_m) = \alpha := \inf_{u\in V} I(u)$. 強圧性より $\{u_m\}$ は V の有界列である．V は反射的バナッハ空間なので，Eberlein–Šmulian の定理より，$\{u_m\}$ は（必要ならば部分

[*6] V 上の連続線形汎関数の全体を共役空間といい，V^* で表す．$V^{**} = V$ であるとき反射的という．
[*7] 値が無限大も許すという意味．

列をとり）V で弱収束している，すなわち，$u_m \rightharpoonup \overline{u}$ weakly in V と仮定してよい．このとき I の弱下半連続性より

$$\alpha \leq I(\overline{u}) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m) = \alpha.$$

よって $I(\overline{u}) = \alpha$. ∎

3.3 制約条件付き直接法

$M \subset V$ を V の**弱閉集合**（すなわち，$(u_m) \subset M$, $u_m \rightharpoonup u$ weakly in V ならば $u \in M$）とすると，$I : M \to \mathbb{R}$ に対して定理 3.2 と同様の結果が成り立つ．閉凸集合は弱閉集合である．

定理 3.1 の証明において，(F1) は強圧性，(F2) の凸性は弱下半連続性を保証するために使われる．

3.4 弱下半連続性

バナッハ空間におけるノルムは弱下半連続であることはよく知られている．よって，$u_m \rightharpoonup u$ weakly in $H^{1,s}(\Omega)$ ならば $\|u\|_{H^{1,s}} \leq \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|_{H^{1,s}}$.

また $s^* := \begin{cases} \frac{sn}{n-s} & (n > s) \\ \infty & (n \leq s) \end{cases}$ とおくと，Rellich–Kondrakov の定理より $u_m \rightharpoonup u$ weakly in $H^{1,s}(\Omega)$ ならば $u_m \rightharpoonup u$ strongly in $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < s^*$ が成り立つ．特に，$\|u\|_{L^r} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{L^r}$.

これらの定理から，$F(x,u,p) = \frac{1}{2}|p|^2 - G(x,u)$ で G が適当な増大度の条件を満たしていれば，I の弱下半連続性が導かれる．より一般には，次のような弱下半連続性の結果が知られている．

定理 3.3. 連続関数 $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ が，条件

- $F(x,u,p) \geq \phi(x)$, $\phi \in L^1(\Omega)$.
- $p \mapsto F(x,u,p)$ は凸関数.

を満たしていると仮定する． $m \to \infty$ のとき $u_m \rightharpoonup u$ weakly in $H^{1,s}(\Omega)$ ならば $I(u) \leq \liminf_{m\to\infty} I(u_m)$ $(s \geq 1)$.

3.4.1 補足

ただし，$n > 1$ かつ $N > 1$ の場合，凸の条件はかなり緩められ，適当な増大度の条件のもとでは，$F(x,u,\cdot)$ が quasiconvex であればよい．

Jensen の不等式より $p \mapsto F(x_0, u_0, p)$ が凸なら

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \int_\Omega F(x_0, u_0, p_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \geq F(x_0, u_0, p_0) \quad \forall \varphi \in H_0^{1,\infty}(\Omega) \tag{14}$$

が成り立つ．一般に (14) が成り立つとき $F(x_0, u_0, \cdot)$ を quasiconvex という．

弾性体モデルでは $W(\nabla u) = f(\nabla u$ のすべての小行列式$) = f(\nabla u, \mathrm{adj}\, \nabla u, \det \nabla u)$ の形が現れる．f が凸であるとき，W は polyconvex という．

$f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ が

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\eta) \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n},\ \mathrm{rank}(\xi - \eta) = 1, \lambda \in [0,1])$$

であるとき f は rank one convex という．

一般に convex $\Longrightarrow$ polyconvex $\Longrightarrow$ quasiconvex $\Longrightarrow$ rank one convex の関係がある．$N = 1$ または $n = 1$ のとき，これらはすべて同値である．

4 フレッシェ微分

4.1 臨界点

$I : V \to \mathbb{R}$ をバナッハ空間 V 上の実数値関数とする．V 上の連続線形汎関数[*8] T があって，$I(u+\varphi) = I(u) + T(\varphi) + o(\|\varphi\|_V)$ $(\varphi \to \mathbf{0})$ を満たすとき，I は u で**フレッシェ微分可能**，T を I の u における**フレッシェ微分**といい，$DI(u)$ で表す．また，$DI(u)(\varphi)$ を $\langle DI(u), \varphi\rangle$ あるいは $DI(u)\varphi$ とかく．このとき，$\langle DI(u), \varphi\rangle$ は I の u における φ 方向への方向微分（**ガトー微分**）である．[*9]

$DI(u) = 0$ となる点 $u \in V$ を I の**臨界点**という．

I がフレッシェ微分可能関数ならば，I の最小点 $\overline{u} \in V$ は I の臨界点である．

4.2 臨界点とオイラー・ラグランジュ方程式，弱解の正則性

F が C^2 級であったとしても最小化関数 $\overline{u}$ が C^2 級とは限らない．普通の意味の微分に関してオイラー・ラグランジュ方程式 (EL) を満たす C^2 級の関数 u を (EL) の**古典解**という．一方，オイラー・ラグランジュ方程式の弱形式 (EL-W) を満たすソボレフ関数 u を (EL) の **弱解**という[*10]．汎関数 (4) が適当なソボレフ空間上でフレッシェ微分可能であるとき，その臨界点は (EL) の弱解である．

[*8] 有界線形汎関数，すなわち，$|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_V$ を満たす線形写像 $T : V \to \mathbb{R}$ といってもよい．

[*9] 多変数関数の微分法における全微分や方向微分の一般化である．

[*10] テスト関数のクラスのとり方により若干のバリエーションがある．

古典解は弱解であり C^2 級の弱解は古典解である．しかしながら，C^2 級でない弱解は古典解ではない．ここで弱解の正則性という問題が生じる．ラプラス方程式のような楕円型方程式に対しては正則性の結果が知られている．一方，非線形弾性体の問題においては最小化関数がたとえ存在したとしても正則（古典解）でないかもしれない．以後は弱解だけを考察する．

4.3 ラグランジュの未定乗数

$I, J : V \to \mathbb{R}$ を連続的フレッシェ微分可能な関数，$M := \{u \in V\,;\, J(u) = 0\}$ とし M 上での I の最小問題を考える．$\overline{u} \in M$ が I の M における最小点であり，$DJ(\overline{u}) \neq 0$ であれば，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$DI(\overline{u}) + \lambda DJ(\overline{u}) = 0 \tag{15}$$

を満たす．同様に m 個の連続的フレッシェ微分可能関数 $J_1, \cdots, J_m : V \to \mathbb{R}$ に対して $M := \{u \in V\,;\, J_1(u) = \cdots = J_m(u) = 0\}$ とした場合，$(DJ_1(\overline{u}), \cdots, DJ_m(\overline{u})) : V \to \mathbb{R}^m$ が全射ならば，ある $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$DI(\overline{u}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k DJ_k(\overline{u}) = 0 \tag{16}$$

を満たす． $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ を**ラグランジュの未定乗数**という．

問題 3. 多変数関数のラグランジュの未定乗数定理を用いて上の結果を示せ．

5 線形偏微分方程式への応用

線形方程式の場合，解の存在自体は別の方法や理論で得られる場合もある．変分原理は解が満たす定性的性質を与えてくれる．例えば，ディリクレ原理によると

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解 u は，$v = u_0$ on $\partial\Omega$ となるどんな関数 v をもってきても

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2$$

を満たす．このような性質はラプラス方程式の数値解を求めてもそのグラフからは分からないであろう．また，線形作用素の固有値についても変分的特徴付けが役に立つことがある．

5.1 ポアッソン方程式

ポアッソン方程式のディリクレ境界値問題を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{17}$$

汎関数

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\,dx \tag{18}$$

を

$$V = H_0^{1,2}(\Omega)$$

の上で最小化する関数が解となる．ここで $H_0^{1,2}(\Omega)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ の $H^{1,2}$ ノルムに関する完備化である．これは，斉次ディリクレ境界条件（ $\partial\Omega$ 上で $u=0$ ）を満たす $H^{1,2}$ 関数の全体と一致する．

5.2 固有値に対するレイリー・リッツの特徴付け，クーランの最大最小原理

ラプラシアンの固有値問題

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{in } \Omega \tag{19}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{20}$$

は，無限個の固有値 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots$ をもつことが知られている．$\sqrt{\lambda_m}$ は弾性膜の波動方程式に対する共鳴振動数を表している．第 1 固有値は次のように特徴付けられる（レイリー・リッツの特徴付け）．

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}. \tag{21}$$

証明. $M = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega)\,;\, J(u) := \int_\Omega u^2\,dx = 1\}$ における $I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ の最小点を u_1 とする．

I, J は 2 次汎関数でフレッシェ微分可能である．実際，$\mathcal{I}(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$, $\mathcal{J}(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$ とおくと $I(u) = \mathcal{I}(u,u)$, $J(u) = \mathcal{J}(u,u)$, $\langle DI(u), \varphi\rangle = 2\mathcal{I}(u,\varphi)$, $\langle DJ(u), \varphi\rangle = 2\mathcal{J}(u,\varphi)$ である．

よって $DI(u_1) = \mu DJ(u_1)$ であり，u_1 は $-\Delta u_1 = \mu u_1$ の（弱）解である．すなわち，

$$\mathcal{I}(u_1, \varphi) = \mu \mathcal{J}(u_1, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

$\mu = I(u_1) = \min_{u \in M} I(u)$ は $-\Delta$ の固有値，u_1 は対応する固有関数である．μ は (21) の右辺に等しいので第一固有値であることがわかった． ∎

最初の $m-1$ 個の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}$ と固有関数 $u_1, \cdots, u_{m-1}$ が求まったとして，$M_m = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega)\,;\, J(u) = 1\,, J_k(u) = 0\ (k = 1, \cdots, m-1)\}$ における $I(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ の最小問題を考える．ここで $J_k(u) = \mathcal{J}(u, u_k)$ である．

最小点を u_m とすると $DI(u_m) = \mu DJ(u_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k DJ_k(u_m)$ より $2\mathcal{I}(u_m, \varphi) = 2\mu\mathcal{J}(u_m, \varphi) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \mathcal{J}(u_k, \varphi)$．ここで，$\alpha_k = 2\mathcal{I}(u_m, u_k) = 2\lambda_k \mathcal{J}(u_m, u_k) = 0$ なので $DI(u_m) = \mu DJ(u_m)$ であり $\mu := I(u_m) = \min_{u \in M_m} I(u)$ は固有値，u_m は固有関数である．

次に第 m 固有値が直接変分的に特徴付けできることを示す．

$v_1, \cdots, v_{m-1}$ を任意に選んできたとき $W(v_1, \cdots, v_{m-1}) = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega)\,;\, J(u) = 1\,, \mathcal{J}(u, v_k) = 0\ (k = 1, \cdots, m-1)\}$ とおく．このとき

$$\lambda_m = \sup_{v_1, \cdots, v_{m-1}} \inf_{u \in W(v_1, \cdots, v_{m-1})} I(u) \tag{22}$$

が成り立つ．

証明. $v_1, \cdots, v_{m-1}$ を最初の $m-1$ 個の固有関数 $u_1, \cdots, u_{m-1}$ としたとき，$W(v_1, \cdots, v_{m-1}) = W_m$ なので $\inf_{u \in W(v_1, \cdots, v_{m-1})} I(u) = \lambda_m$．任意の $v_1, \cdots, v_{m-1}$ を選んだとき，$\inf_{u \in W(v_1, \cdots, v_{m-1})} I(u) \le \lambda_m$ を示せばよい．最初の m 個の固有関数で張られる部分空間と $W(v_1, \cdots, v_{m-1})$ の共通部分が空でないことに注意する．実際 $\sum_{k=1}^m \mathcal{J}(v_\ell, u_k) c_k = 0$ $(\ell = 1, \cdots, m-1)$, $\sum_{k=1}^m c_k^2 = 1$ を満たす c_k をとると，$u = \sum_{k=1}^m c_k u_k \in W(v_1, \cdots, v_{m-1})$. この u に対して $I(u) = \sum_{k=1}^m c_k^2 \lambda_k \le \lambda_m$. ∎

問題 4. 上の議論の中に現れる u_m が確かに存在することを直接法により確かめよ．

(21) から Poincaré の不等式

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2\, dx \le \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad u \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

が得られる．$H_0^{1,2}(\Omega)$ は $u \equiv 0$ 以外の定数関数を含まないことに注意して欲しい．

問題 5. 斉次ノイマン境界条件の場合に同様の考察をし Poincaré–Wirtinger の不等式

$$\mu_2 \int_\Omega (u - \langle u \rangle)^2\, dx \le \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad u \in H^{1,2}(\Omega)$$

を示せ．ただし，$\mu_2 > 0$ は第 2 固有値，$\langle u \rangle = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \int_\Omega u\, dx$ は u の平均値である．

6 関数空間の近似と数値解法

微分方程式の数値解法は，関数をどのように近似するかで二つに大別される．領域からたくさんの分割点 $x_1, \cdots, x_m$ を選び，その上での関数値 $u(x_1), \cdots, u(x_m)$ を数値的に求める方法と，未知関数 u をよくわかっている関数系 $\{\phi_k\}$ の一次結合 $u = \sum_{k=1}^m c_k \phi_k$ で近似してその係数を求める方法である．ここでは後者の方法で，無限次元の関数空間 V を有限次元の部分空間 X_m で近似することを考える．例えば，一次独立な関数系 $\{\phi_k\}$ をとってきて $X_m = \mathrm{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_m\}$ とおくと $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset V$ である．

簡単のため，(17) の数値解法を考える．ガラーキン法とは，$u \in X_m$ の中で

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega f \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in X_m \tag{23}$$

を満たすものを求める方法である．これは，m 元連立一次方程式を解く事に帰着される．

ガラーキン法における X_m の特別な場合として有限要素空間を用いるのが，有限要素法である．

一方，**リッツ法**は直接法の数値解法への応用であり，X_m の中で汎関数 (18) を最小化する関数 $\overline{u}_m$，すなわち，$I(\overline{u}_m) = \inf_{u \in X_m} I(u)$，を近似解とする方法である．

ϕ_m としてラプラシアンの固有関数系をとってきた場合を考えてみる．対応する固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \to \infty$ とし，ϕ_m は L^2 内積に関する正規直交系にしておく．このとき，リッツ法の解は

$$\overline{u}_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_k, \quad \alpha_k = \int_\Omega f \phi_k \, dx$$

である．$f \in L^2(\Omega)$ の**固有関数展開**（フーリエ級数展開）は，

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k$$

となり，(17) の真の解は

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_k$$

と表されるので，$\overline{u}_m$ は真の解 u のフーリエ級数展開の第 m 部分和になっていることがわかった．この場合は連立一次方程式が対角化されているので簡単に解けてしまったのである．しかしながら，この方法は行列の対角化に対応している固有値問題を先に解かなければならないので，実際の数値計算ではよくわかっている関数系を用いて出てくる連立一次方程式を数値的に解く方が早い．

7　非線形偏微分方程式への応用

非線形問題に対して微小変形や変位を扱う場合，方程式を線形化して解析する方法がある．しかしながら線形化方程式は近似であるのでこのような線形化解析は大きな振幅を扱う場合には適用できない．非線形問題では解の存在が明らかでない場合もあるし，解が一つとは限らないので解を一つ見つけてもそれ以外に解はないのかという問題も考えられる．このような場合に直接法を適用して大振幅解を見つけることが可能になる場合がある．

$n = 3$, $N = 1$ とする．簡単のため，非線形ポアッソン方程式の中で特別な非線形項を考えてみる．

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u + u^3 = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{24}$$

ここで $f \in C(\overline{\Omega})$ である．このとき，(24) は任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して解をもつ．

証明. $V = H_0^{1,2}(\Omega)$, $\|u\|_{H_0^{1,2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}$,

$$\inf_{u \in V} I(u), \quad I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2) + \frac{1}{4}u^4 - fu \, dx. \quad \blacksquare$$

問題 6. 上の証明を完成させよ．Poincaré の不等式より，V において $\|u\|_{H_0^{1,2}}$ をノルムとしてよい．また，$H^{1,2}(\Omega)$ は $L^r(\Omega)$ $(r \in [1,6])$ に連続に埋め込まれることが知られている．

問題 7. $f = 0$ とする．(24) は常に $u = 0$ を解にもつ．$\lambda < -\lambda_1$ のとき (24) は $u = 0$ 以外に解をもつことを示せ．ただし，$\lambda_1 > 0$ はディリクレ境界条件 (20) のもとでの $-\Delta$ の第 1 固有値である．

次に非線形項 u^3 の符号を変えた方程式（燃焼問題や非線形シュレディンガー方程式と関係がある）を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^3, \quad u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{25}$$

$u = 0$ は明らかに上の微分方程式を満たすが，ここでは正の解が存在するかどうかについて考える．この方程式の解は

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{4}u^4 \, dx \tag{26}$$

の臨界点に対応するが，$V = H_0^{1,2}(\Omega)$ において I は下に有界でない．なぜなら u^4 項の符号がマイナスだからである．しかしながら，$\lambda > -\lambda_1$ のとき (25) は解をもつ．

問題 8. これを示せ．さらに，この解が V における (26) の鞍点（極小点でも極大点でもない臨界点）であることを示せ．

ヒント：

$$\inf_{u \in M} I(u), \quad I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda u^2 \, dx \tag{27}$$

$$M = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega)\,;\, J(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega u^4 \, dx = 1\} \tag{28}$$

8 カーン・ヒリアードモデル

合金の相分離現象を記述するモデルを考える．Ω はなめらかな境界をもつ $\mathbb{R}^3$ の有界領域とする．$M = \{u \in H^{1,2}(\Omega)\,;\, \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\int_\Omega u \, dx = \rho\}$ においてファンデルワールス・カーン・ヒリアード自由エネルギー汎関数

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}(\varepsilon^2|\nabla u|^2 + \lambda u^2) + \frac{1}{4}u^4 \, dx \tag{29}$$

の最小問題を考える．$u = u(x)$ は局所密度で，最小化する関数 u が熱力学的に安定な平衡状態を表す．ただし，$\varepsilon > 0$, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$ は定数で，$\mathrm{Vol}(\Omega)$ は領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ の体積である．対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + \lambda u + u^3 = \mu & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\int_\Omega u \, dx = \rho \end{cases} \tag{30}$$

となる．ここで，$\partial/\partial\nu$ は外向き法微分，右辺の $\mu \in \mathbb{R}$ は制約条件からくる未定乗数で化学ポテンシャルとよぶ．$\lambda \geq 0$ のとき，I の M における最小化関数は $\overline{u} \equiv \rho$ である．また，これが唯一の最小化関数である．定数関数は空間的に一様な（よく混ざった）状態を表している．

問題 9. 以上のことを示せ．

以後 $\lambda < 0$ の場合を考えるが，簡単のため $\lambda = -1$ とし，エネルギーが負にならないように定数を加える（変分問題には何の影響もない）．$W(u) = \frac{(u^2-1)^2}{4}$ として

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon^2|\nabla u|^2 + W(u)\,dx \tag{31}$$

を考えればよい．W は $W(-1) = W(1) = 0 < W(s)$ for $s \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $W''(\pm 1) > 0$ を満たし，$s = 0$ の近くで $W''(s) < 0$ となっていて上に凸，その両側は下に凸である．もし $W''(\rho) < 0$ であれば $u \equiv \rho$ は M において極小点でなく不安定である．この場合小さな揺らぎが増大しエネルギーが減少していく（スピノーダル分解）．また，$|\rho| \geq 1$ のとき唯一の最小化関数は $\overline{u} \equiv \rho$ であるので，以後 $\rho \in (-1, 1)$ の場合を考える．

問題 10. 以上のことを示せ．

u_ε を E_ε の M における最小点とすると $E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{u \in M} E_\varepsilon(u) > 0$ である．なぜなら，$E_\varepsilon(u) = 0$ となるのは $u \equiv 1$ または $u \equiv -1$ であるがこれらは制約条件を満たさない．

ε が大きいときエネルギー的に有利なのは $u(x) =$ 定数である．一方，ε が小さいときは $W(u) = 0$ となる方がエネルギー的に有利である．

極限 $\varepsilon \to 0$ を考察する． de Giorgi は曲面の表面積を近似するために汎関数 (31) を導入した．

適当な比較関数を用いることで $\frac{1}{\varepsilon}E_\varepsilon(u_\varepsilon) = O(1)$ $(\varepsilon \to 0)$ であることがわかる．

問題 11. 適当な関数空間上で $E_0(u)$ の最小問題を定式化しその解を求めよ．

$p \mapsto \frac{1}{2}\varepsilon^2|p|^2 + W(u)$ は狭義凸なので解 u_ε は正則である．しかしながら $\varepsilon \to 0$ の極限をとると「特異性」が出現する．

以下で，u_ε の零等高面 $\{x\,;\, u_\varepsilon(x) = 0\}$ の近傍が幅 $O(\varepsilon)$ の薄い遷移層になり，$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim \varepsilon\sigma \times$(相境界の表面積) となることがわかる．このことは表面張力（単位面積当たりのエネルギー）が $\varepsilon\sigma$ であることを意味している．ただし，$\sigma > 0$ は 1 次元の場合の界面エネルギーである．

C^1 級の関数のかわりにソボレフ空間を考えたように，ここでも適当なバナッハ空間の上で相境界の表面積を考えたい．そこで登場するのが BV 空間である．

$u = u(x)$ の**全変動**を

$$\mathrm{Var}(u\,;\,\Omega) = \sup\{\int_\Omega u(x)\ \mathrm{div}\, g(x)\,dx\,;\, g = (g_1, g_2, g_3) \in C_0^1(\Omega\,;\mathbb{R}^3), |g| \leq 1)\}$$

で定義する．

問題 12. 以下を確かめよ．
(1) u が C^1 級ならば $\mathrm{Var}(u\,;\Omega)=\int_\Omega |\nabla u|\,dx$ である[*11]．
(2) $\mathrm{Var}(\alpha u+\beta\,;\Omega)=|\alpha|\mathrm{Var}(u\,;\Omega)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

区間 $[a,b]$ 上の連続関数では $\mathrm{Var}(u\,;a,b)=\sup\{\sum_{i=1}^m |u(x_i)-u(x_{i-1})|\,;\,a=x_0<\cdots<x_m=b\}$ と表される．ただし，右辺の上限は区間 $[a,b]$ のすべての分割に対してとる．

$u\in L^1(\Omega)$ で $\mathrm{Var}(u\,;\Omega)<\infty$ となる関数を**有界変動関数**といい，BV ノルムを $\|u\|_{BV}=\|u\|_{L^1}+\mathrm{Var}(u\,;\Omega)$ で定義する．有界変動関数の全体 $\mathrm{BV}(\Omega)$ は BV ノルムに関してバナッハ空間になること，および BV ノルムの L^1 収束に関する下半連続性が知られている．

$A\subset\Omega$ に対して階段関数 $\phi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in\Omega\setminus A\end{cases}$ は（関数の範囲で）導関数を考えることができないが，その全変動を定義できる．$\phi_A(x)$ の全変動 $\mathrm{Var}(\phi_A\,;\Omega)$ は $\partial A\cap\Omega$ がなめらかな曲面であるとき，その表面積 $\mathrm{Area}(\partial A\cap\Omega)$ に等しい．
問題 13. これを確かめよ．

ここで

与えられた体積分率で領域を分割するとき，その相境界の表面積を最小にするものを求めよ　　$(P)_0$

という最小問題を考えたとき，次のような存在結果が得られる．

$$\alpha:=\inf_{u\in\tilde M} J(u),\quad J(u)=\frac{\sigma}{2}\mathrm{Var}(u\,;\Omega) \tag{32}$$

$$\tilde M=\{u\in\mathrm{BV}(\Omega)\,;\,u=2\phi_A-1, A\subset\Omega, \mathrm{Vol}(A)=\frac{\rho+1}{2}\mathrm{Vol}(\Omega)\} \tag{33}$$

とおいたとき，J は $\tilde M$ の中で下限に到達する．
問題 14. これを証明せよ．

さらに，この最小化関数に対応する相境界は（正則[*12]で）**平均曲率一定曲面**であることが知られている．この平均曲率の一定値は体積一定の制約条件からくるラグランジュの未定乗数である．

$\{u_\varepsilon\}$ は（部分列をとれば）J の $\tilde M$ における最小化関数の一つに L^1 収束していること（Modica–Mortola）を示す．

Step 1: u_ε のコンパクト性

$h(t):=\int_0^t\sqrt{2W(s)}\,ds$ とおくと，コーシーの不等式 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ より

$$J_\varepsilon(u):=\frac{1}{\varepsilon}E_\varepsilon(u)\ge\int_\Omega|\nabla u|\sqrt{2W(u)}\,dx=\int_\Omega|\nabla(h(u))|\,dx\quad(u\in M). \tag{34}$$

[*11] 実際は $H^{1,1}(\Omega)\subset\mathrm{BV}(\Omega)$
[*12] $n\le 8$

よって，$W(u) \geq |u|^3 - C_1$, $|h(t)| \leq C_2(|t|^3+1)$ より $h(u_\varepsilon)$ は $\mathrm{BV}(\Omega)$ で有界．故に，Rellich の定理より $w_\varepsilon := h(u_\varepsilon) \to w$ strongly in $L^1(\Omega)$ としてよい．$|h^{-1}(t)| \leq C_3(|t|+1)$ より $u_\varepsilon = h^{-1}(w_\varepsilon) \to h^{-1}(w) =: \overline{u}$ strongly in $L^1(\Omega)$ が得られる．

Step 2:下半連続性

$u_\varepsilon \to \overline{u}$ strongly in $L^1(\Omega)$ とすると

$$0 \leq \int_\Omega W(\overline{u})\,dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega W(u_\varepsilon)\,dx = 0 \tag{35}$$

である．故に，$W(\overline{u}) = 0$，したがって，ほとんどすべての x で $\overline{u}(x) = 1$ または $\overline{u}(x) = -1$ である．また，$\overline{u} \in \tilde{M}$．$\Omega^+ = \{x \in \Omega\,;\, \overline{u}(x) = 1\}$ とおくと $\overline{u} = 2\phi_{\Omega^+} - 1$．ここで $\sigma := h(1) - h(-1)$ とおくと

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \overset{(34)}{\geq} \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla(h(u_\varepsilon))|\,dx \overset{\text{下半連続}}{\geq} \mathrm{Var}(h(\overline{u})\,;\,\Omega) = \frac{\sigma}{2}\mathrm{Var}(\overline{u}\,;\,\Omega) = J(\overline{u}) \tag{36}$$

Step 3: 構成

勝手に $v \in \tilde{M}$ をとってきて，相境界 Γ がなめらかと仮定[*13]し，v を近似する $v_\varepsilon \in M$ を構成する．そのために 1 次元の場合の遷移層解 Q を利用する．

$$\ddot{Q} - W'(Q) = 0 \tag{37}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} Q(\xi) = \pm 1 \tag{38}$$

第一積分を求めれば，Q は $\dot{Q} = \sqrt{2W(Q)}$ を満たすことがわかり，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + W(Q)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2W(Q)}\dot{Q}\,d\xi = \int_{-1}^{1} \sqrt{2W(s)}\,ds = h(1) - h(-1) = \sigma$ が得られる．よって，σ は 1 次元の場合の界面エネルギーである．

相境界の管状近傍において座標系 $(s,r) \in \Gamma \times (-\delta,\delta)$ を $x = s + r\nu$ で定め，$v_\varepsilon(x) = Q(\frac{r}{\varepsilon})$ とおく．正確には Γ から離れた所で $v_\varepsilon(x) = 1$ または $v_\varepsilon(x) = -1$ として滑らかに接続しさらに制約条件を満たすように修正する必要があるが詳細は省略する．$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2}\dot{Q}^2(\frac{r}{\varepsilon}) + W(Q(\frac{r}{\varepsilon}))\,dr = \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \frac{1}{2}\dot{Q}^2(\xi) + W(Q(\xi))\,d\xi \to \sigma$ $(\varepsilon \to 0)$ より $J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \int_\Gamma \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2}\dot{Q}^2(\frac{r}{\varepsilon}) + W(Q(\frac{r}{\varepsilon}))\,dr\,dS \to \sigma\mathrm{Area}(\Gamma)$ $(\varepsilon \to 0)$．よって

$$J(v) = \sigma\mathrm{Area}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \overset{(36)}{\geq} J(\overline{u}) \tag{39}$$

$\overline{u}$ が J の最小化関数であることがわかった．

極限問題 $(P)_0$ は数学的には扱いづらい面もあるが，幾何学的あるいは直感的には理解しやすい．

領域が $(0,1)$ の場合，$(P)_0$ の最小化関数は $\overline{u}(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \frac{\rho+1}{2}) \\ -1 & (\frac{\rho+1}{2} < x < 1) \end{cases}$ か $\overline{u}(x) = \begin{cases} -1 & (0 < x < \frac{1-\rho}{2}) \\ 1 & (\frac{1-\rho}{2} < x < 1) \end{cases}$ のいずれかであり，いずれの場合も $J(\overline{u}) = \sigma$ である．

問題 15. 2 次元の領域で，体積分率が両極端の場合に極限問題 $(P)_0$ を考察せよ．

[*13] 一般の場合はまず相境界をなめらかな曲面で近似する．

9 Γ 収束

de Giorgi は，汎関数の列に対する Γ 収束の概念を導入した．

定義 9.1. バナッハ空間 V 上の汎関数 $J_m(m = 1, 2, \cdots)$, $J : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が次の条件を満たすとする．

1. （下半連続性） $u_m \to u$ strongly in V ならば $J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J_m(u_m)$
2. （構成）任意の $u \in V$ に対して，$J(u) \geq \limsup_{m\to\infty} J_m(u_m)$，$u_m \to u$ strongly in V を満たす点列 $\{u_m\} \subset V$ がとれる．

このとき，J_m は J に Γ **収束**するといい，$J_m \xrightarrow{\Gamma} J$ で表す．

$J_m \xrightarrow{\Gamma} J$ であり，もし J_m の最小点 u_m が u に収束していれば，u は J の最小点であることがいえる．

前節の J_ε と J の定義域を，値が無限大として $V = L^1(\Omega)$ へ拡張しておくと，$J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J$ であることがわかる（前節の Step 2, 3）．

非線形偏微分方程式の特異極限問題が幾何学的問題へ帰着されたのであるが，逆にいえば，幾何学の問題を微分方程式で近似できるともいえる．

参考文献

[1] クーラン，ヒルベルト，数理物理学の方法
[2] キーナー，応用数学　変換論と近似論　上下
[3] ゲリファント，フォーミン，変分法
[4] 西浦廉政，非線形問題１，岩波書店
[5] 田中和永，非線形問題２，岩波書店
[6] ブレジス，関数解析　その理論と応用に向けて，産業図書
[7] J.W. Cahn and J.E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy, J. Chem. Phys. 28 (1958), 258–267.
[8] D.G. Costa, An invitation to variational methods in differential equations, Birkhäuser (2007).
[9] B. Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations, Second edition, Springer (2008).
[10] G. Dal Maso, An introduction to Γ-convergence, Birkhäuser (1993).
[11] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society (1998).
[12] P.C. Fife, Models for phase separation and their mathematics, Electron. J. Diferential Equations 48 (2000), 1–26.
[13] E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhäuser (1984).
[14] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, Introductory real analysis, Dover (1970).
[15] L. Modica and S. Mortola, Il limite nella Γ-convergenza di una famiglia di funzionali ellittici. Boll. Un. Mat. Ital. 5, 14-A (1977), 526–529.
[16] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series Math. 65, Amer. Math. Soc., Providence (1986).

[17] M. Struwe, Variational methods, applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Springer (2008).