課題（郡）

以下のいずれか，あるいは全てを行う．あるいは全てを行わない．
提出先：kori.hiroshi@ocha.ac.jp

（参考）
[1] Scholarpedia: Isochron
http://www.scholarpedia.org/article/Isochron

[2]蔵本由紀　「リズム現象の世界」（東京大学出版会）第4章

[3] Izhikevich著 “Dynamical systems in Neuroscience”
Chapter 10 “Synchronization”
以下からフリーで手に入る
http://vesicle.nsi.edu/users/izhikevich/publications/dsn/index.htm

１．リミットサイクル振動子，アイソクロン，位相感受性　（手計算）

（参考）[1]と[2]が役に立つ

次のモデル（Hopf分岐のノーマルフォーム）のリミットサイクル軌道，アイソクロン，位相感受性を求めよ

$$\frac{dA}{dt} = A - A^3$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \alpha(A^2 - 1)$$

2．リミットサイクル振動子，アイソクロン，位相感受性 （数値計算）

(i) リミットサイクル振動子モデルを自由に選ぶ
　（ネットで調べればいろいろ出てくる．変数の数はいくつでもよい．
　あるいはモデルを自分で創造してもよい．）
(ii)数値シミュレーションでリミットサイクル軌道を描く
　（3変数以上のモデルであれば場合は，適当な2変数平面で描く．数値スキームはオイラー法でもルンゲクッタ法でもなんでもよい．）
(iii)アイソクロンを同じ平面に描く
　（表示方法は自由．[3]の10.1.2節が参考になる）
(iv)位相感受率関数 Z(φ) を求める．適当な成分を表示．
　（[3]の10.2.3節，問題7，問題12が参考になる）

３．ネットワーク，ラプラス行列，左ゼロ固有ベクトル

（参考）下の例を参照

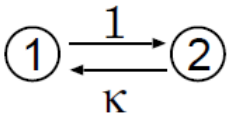
(i)適当な小さなグラフを描く．ノード数は自由．あるいは，ランダムグラフなど適当なアルゴリズムで作る大きなグラフでもよい．その場合は作り方を説明.
(ii)対応するラプラス行列Ｌを求める.
(iii)左０固有ベクトルを求め，「リーダー」を見つける． 手で計算しても数値計算でもどちらでもよい.

４．新しい同期現象を発見せよ.

５．講義に（何となくでいいので）関係する内容で，自由に考察．あるいは感想をください.

2の例を以下にふたつあげる.
Ｌの非対角成分Lijはノードjからノードiへの結合強度.
Ｌの対角成分は，その行の非対角成分の総和を負にしたもの.
なおＬが対称行列だと左固有ベクトルは(1 1 1 ...)となりつまらないので注意.

(a)

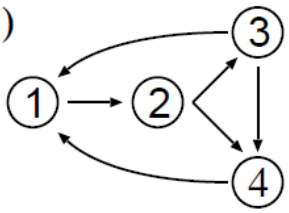


$$L=\begin{pmatrix} -\kappa & \kappa \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\kappa & \kappa \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1^* : U_2^* = 1 : \kappa$$

(b)



$$L=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1^* : U_2^* : U_3^* : U_4^* = 2 : 4 : 3 : 1$$