第一回さきがけ数学塾「力学系」

# はじめに

北海道大学 創成科学共同研究機構
荒井迅 (Zin ARAI)
arai@cris.hokudai.ac.jp
http://www.cris.hokudai.ac.jp/arai/

## 1 力学系とは

街の本屋さんに行くと，力学系と題した本は数学ではなく物理の棚に並べられていることがよくあるが，力学系は数学の一分野ということにいちおう（数学では）なっている．本の表題に「力学」を含むからには物理なんだろうと本屋さんが思うのも至極当然ではあるが，そもそも「力学系」という用語は英語の “dynamical systems” を翻訳したものであり，狭い意味での力学 (“mechanics”) を研究する学問ではない．ちなみに中国語で “dynamical systems” は「動力系統」と書くそうである．

もちろん力学は力学系のルーツであり，最も重要な例である．だからこそ力学系という訳語が受け入れられた訳だが，実際のところ力学系理論の対象は力学に限らず，ずっと広い．多様な力学系の対象を列挙する前に，まず天下りに力学系を定義してしまうと，力学系とは「時間」「状態空間」「時間発展のルール」の 3 つ組のことである，といえる．すなわち群または半群 $G$ の空間 $X$ への作用

$$\Psi : G \times X \to X, \quad (g,x) \mapsto \Psi(g,x) =: \Psi^g(x)$$
$$\Psi^{\mathrm{id}}(x) = x, \quad \Psi^{gh}(x) = \Psi^h(\Psi^g(x)) \quad (\forall x \in X\ \forall g,h \in G)$$

が与えられると，$G$ を時間，$X$ を状態空間，$\Psi$ を時間発展のルールとする力学系が定まるという．

状態空間の点 $x \in X$ がある「状態」を表わすとすると，その $G$ による軌道 $\mathcal{O}(x) := \Psi(G,x)$ は時間と共に状態がどのように変化するかを表現する．

たとえば時間 $G$ として加法群 $\mathbb{Z}$ を考える．この場合，$f = \Psi^1 : X \to X$ という写像を考えると軌道は $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ となり，状態 $x$ の時間 $k$ 後の状態が $f^k(x)$

である．ここで $f^k$ は $f$ の値の積をとったものではなく

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\ \text{回合成}}$$

である．時間が $\mathbb{R}$ であり $\Psi$ が連続写像の場合には軌道は $\mathbb{R}$ の連続写像による像，すなわち曲線となる．

数学の他の分野でも同様な群の作用を扱う場面は多いが，力学系に特徴的なのは，力学系では主に系の漸近挙動，すなわち時間が無限大へと発散するときの系の振舞いを問題にするという点である（$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ 以外の時間考えるときは，「時間無限大」に適当な意味を持たせる）．このような着眼点はポアンカレまで遡るものであるが，なぜこのような方針で研究を進めるのか．以下ではそれを基本的な例を辿りながら見てゆこう．例や概念の出現する順序は説明の都合によるものであり，歴史的な発展とは一致しないことを注意しておく．

## 2　最初の例

まず，最も簡単な力学系の例として

$$L_\lambda(x) = \lambda x$$

により定義される写像 $L_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えよう．ただし $\lambda$ は 0 でない実数とする。$L_\lambda$ は与えられた数 $x$ を $\lambda$ 倍するというだけの写像である．先の定式化に従えばこの写像は $X = \mathbb{R}$，$G = \mathbb{Z}$ および $\Psi^k = L_\lambda^k$ で与えられる力学系を定める．たとえば若干非現実的な仮定であるが，年利 1 パーセントの口座にお金を預け，全くお金を使わないで貯めておけば，預金額 $x$ の推移はこの力学系において $\lambda = 1.01$ とおいたもので表わされる（$x < 0$ の場合は借金と考えればよろしい）．また，$x$ がある生物の個体数で，ねずみ算式に個体の数が一定の比率で増えていくようなシステムを記述しているとも考えられる．系の挙動は値 $\lambda$ によって変化するので，$\lambda$ をこの系のパラメータと呼ぶ．

この系の解は簡単に表示することができ，

$$\Psi(k, x) = L_\lambda^k(x) = \lambda^k x$$

となる．よって $k \to \infty$ のときの漸近挙動としては，$|\lambda| > 1$ ならば軌道は発散，$|\lambda| < 1$ ならば収束，などと簡単に記述できる．$\mathbb{Z}$ においては $k \to -\infty$ という極限も考えられるが，この場合の挙動も同様に簡単にわかる．

## 3　可逆力学系と不可逆力学系

前節で $\lambda \neq 0$ という仮定をおいたのは，$\lambda = 0$ だと $L_\lambda$ の逆写像を考えることができないので，$k < 0$ に対して $\Psi^k$ が定義できず，群 $\mathbb{Z}$ の作用とはみなせないからである．この場合でも，正の時間に対しては力学系は問題なく定義されているので，$\mathbb{Z}$ ではなく半群 $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \ k \geq 0\}$ が作用していると考えることができる．

このように群が作用してる場合はその力学系は「可逆」であり，半群の作用の場合には「非可逆」である，という．非可逆な力学系においては時間を遡ることができない．

## 4　ロジスティック写像

$L_\lambda$ は線型写像であり，その力学系としての振る舞いも単純なものであった．このように単調に拡大もしくは縮小してゆくという系ではあまりに単純化されていて現実に似わない，ということも考えられる．たとえば，生物個体の増加という現象を考えると，個体数があまりに増えすぎると資源を食べつくしてしまい，環境が悪化して増加することができなくなると考えるのが自然である．

そこで，そのような効果を取り入れた写像として

$$Q_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

を考えてみよう．個体数 $x$ が十分に小さいときには $Q_\lambda$ は $L_\lambda$ とほぼ同じ挙動を示すが，個体数が増えるにつれて悪影響の項 $(1-x)$ が支配的になる，特に $x = 1$ の場合には $Q_\lambda(1) = 0$ となって次の時刻に絶滅してしまう．$Q_\lambda$ は $\mathbb{R}$ 上に力学系を定めるが，$Q_\lambda([0,1]) \subset [0,1]$ なので $Q_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ と考え，区間 $[0,1]$ 上の力学系と思うこともできる．

この写像は数理生物学者ロバート・メイの研究により有名になったロジスティック写像と呼ばれるものである．線型写像 $L_\lambda$ から 2 次式へと変化しただけであるが，もはやこの $Q_\lambda$ の軌道の一般項 $Q_\lambda^k(x)$ を簡単に書き下す事は出来ない．このように力学系が非線型な式で定義されるとき（より本質的には解の重ね合わせ原理が成立しないとき），その力学系は非線型であるという．

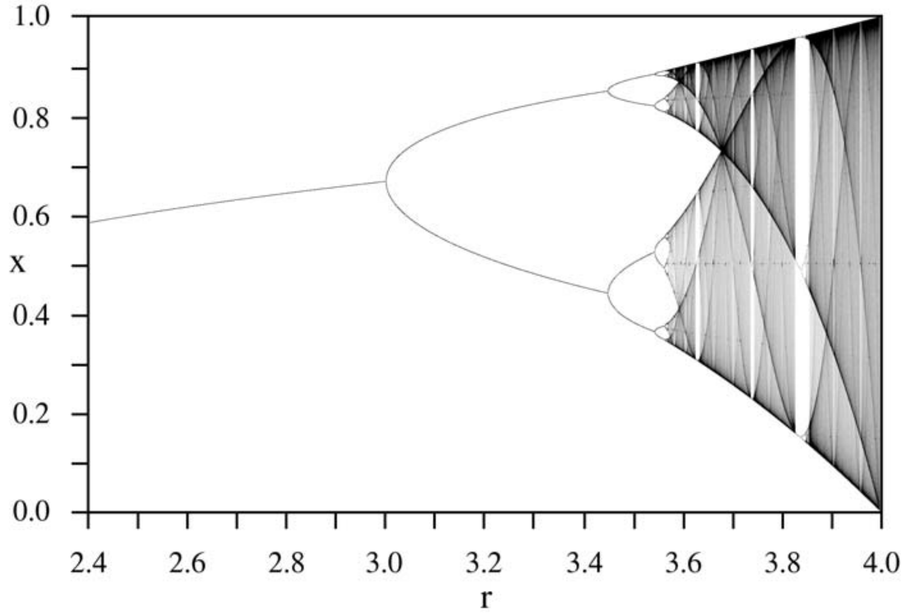


図 1　ロジスティック写像

## 5　連続力学系と離散力学系

ここまでは写像によって記述される力学系を見てきたが，歴史的には微分方程式で記述される系こそが力学系の源流である．ニュートンが天体の運行が微分方程式で記述できることを見出して以来，様々な現象が微分方程式により研究されてきた．

たとえば 1 変数の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$

を考える．ここでも $\lambda \in \mathbb{R}$ はパラメータである．写像の場合と同様に個体数や預金の増減を表現するモデルであると考えることもできるし，$x$ を物体に含まれるある放射性同位体の量，$\lambda < 0$ をその放射性同位体の崩壊の速度で決まる崩壊定数と思えば，放射年代測定の過程を記述しているとも思える．

時刻 $t = 0$ に $x = x_0$ を通る解は $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ と書けるので，

$$\Psi(t, x) := x e^{\lambda t}$$

とおけば力学系 $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まる．

一般に多様体 $M$ 上に完備な $C^1$ ベクトル場が与えられたとき，常微分方程式の解の存在定理を用いると，上のように力学系が定まる．逆に $G = \mathbb{R}$ かつ $X = M$ が多様体で，$\Psi : \mathbb{R} \times M \to M$ が $C^1$ 級の写像ならば，多様体 $M$ 上にベクトル場 $\xi$ が

$$\xi_x := \left. \frac{d\Psi(t,x)}{dt} \right|_{t=0}$$

により定義され，その生成する流れは $\Psi$ となる．この意味で多様体上の可微分な連続力学系を考えることはベクトル場を考えることであるといってよい．

以下では時間が $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合（群 $G$ に離散位相を入れてい考える場合）を離散力学系，時間が $\mathbb{R}$ の場合を連続力学系，もしくは flow と呼ぶことにする．

以下では flow と離散力学系 $G = \mathbb{Z}$ の関係を考えよう．当然のことながら両者は密接な関係ににある．

まず flow $\Psi : \mathbb{R} \times X \to X$ が与えられると，$t \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = \Psi(t,x)$ とおくことで写像 $f : X \to X$ が得られる．この $f$ を $\Psi$ の 時間-$t$ 写像という．$f$ の生成する力学系の軌道は，もとの flow における挙動を $t$ 秒ごとにスナップ写真を撮ったようなものである．

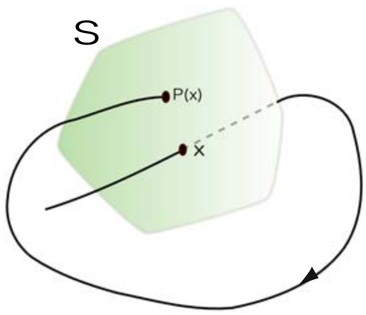


図 2　ポアンカレ写像

また flow $\Psi$ が周期軌道，すなわち軌道が円周となるような点を持つとしよう．$p \in X$ をその周期軌道上の点，$T$ をその周期としよう．周期 $T$ とは $\Psi^T(p) = p$ となるような $T > 0$ で最小のものである．ここで $p$ を通る曲面で $p$ の軌道に対して横断的な $S$ をとる．すると，軌道の連続性から $p$ に充分近い $x \in S$ は，やはりある時間たつと $S$ に戻ってくることが示せる．戻ってくるのにかかる時間は一般に $T$ とは異なり，点 $x$ ごとに異なるのだが，とにかく最初に $S$ に帰って来たときの点を $f(x)$ とおく．この構成により

$p$ の充分に小さい $S$ での近傍 $U$ をとると，写像 $f: U \to S$ が定まる．このとき写像 $f$ をもとの flow のポアンカレ写像，$S$ をポアンカレ断面と呼ぶ（図 2）．ポアンカレ写像を調べることにより，もとの flow の周期軌道の近傍での挙動がわかるのだが，$S$ は $X$ よりも次元が低いこと，一般に写像のほうが flow よりも扱いやすいことなどから，この方法は flow の研究において非常に強力な道具となっている．

また，微分方程式で与えられる力学系の軌道を数値計算によって求めることを考えよう．このとき，画面上では連続的に軌道を追いかけてるように見えても，計算機内部では数値積分法により軌道を微小な時間ステップごとに段階的に計算している．これもやはり連続力学系を離散力学系で置き替えて見ているといえる．

逆に写像 $f: X \to X$ が与えられたときに，空間 $X \times [0,1]$ において両端 $X \times \{1\}$ と $X \times \{0\}$ を $(x,1)$ と $(f(x),0)$ を同一視することでひねって貼り合せた空間

$$\widetilde{X} = X \times [0,1]/\sim$$
$$(x,s) \sim (x,s), \quad (x,1) \sim (y,0) \Leftrightarrow y = f(x)$$

を考えると，その上に flow $\Psi$ を

$$\Psi^t(x,s) = (f^{\lfloor t+s \rfloor}(x), t+s-\lfloor t+s \rfloor)$$

により定義することができる．これを $f$ の suspension flow と呼ぶ．ここで $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ である．$f$ の suspension flow $\Psi$ に対して $S = X \times \{0\}$ とおいてポアンカレ写像をとると，もとの $f$ に戻ることに注意しよう．

このように写像の力学系と flow は相補的な関係にあるのだが，上にも述べたように写像のほうが扱いやすいため，flow の研究がそのポアンカレ写像の研究に帰着されたり，まず理論を写像で展開してから flow に拡張する，といったことがよく行なわれている．

## 6　漸近挙動

以下では簡単のために $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\geq 0}$ もしくは $\mathbb{R}$ の場合のみを考えよう．

微分方程式を解かずに，解の漸近挙動を調べるのが力学系の基本的な発想であると述べたが，このような方向性を明確に打ち出したのはポアンカレが最初ではないかと思う．彼の時代（といってもまだ 100 年くらいしかたっていないが）には多分に神学的な理由もあり，

**太陽系は未来永劫（惑星同士の衝突などなく）安定に存在するのだろうか**

という問題が天文学や数学で議論されていた．当時の意識としては，この問題に答えるためにはニュートン力学の多体問題の解の表示を得なくてはならないと考えられていた．実際，スウェーデン＝ノルウェー国王の懸賞問題として多体問題の解を得よという問題が出され，ポアンカレもこれに挑戦し，ポアンカレは特に制限 3 体問題を集中的に研究した．

いったんは肯定的に解けたと主張して論文で賞を取ったものの，後で本質的な間違いに気がついて急遽論文の出版を差し止めたり…と悪戦苦闘のすえ，ポアンカレがたどりついた答えが，一般の多体問題は解を従来の意味で書き下すことは不可能である，というものだった．

このあたりの経緯について詳しくは F. Diacu and P. Holmes, “Celestial Encounters”, Springer（日本語訳「天体力学のパイオニアたち」上・下，シュプリンガー東京）というたいへん面白い読み物があるので参照されたい．

この「解けない」という現実を前にして，方程式を解くこと，解の表示を得ることを主眼とした研究から，たとえ解けなくても解の重要な性質を議論する方向へと発想の転換があったのである．

解けない山のような方程式の中には，奇跡的に何らかの対称性により解けてしまう方程式もある．可積分系と呼ばれる分野の研究対象がそれらの解ける方程式である．解ける方程式は数からいえばごくわずかなのだが，対称性の高さから重要な現象を記述しているものも多く，また数学的な美しさや使える道具の多さから活発な研究がなされている．

とはいえ，やはりほぼ全ての方程式が解けないことも確かで，そこに力学系の思想の意義がある．

漸近挙動を議論するといっても $L_\lambda$ のときのように，単に発散したり一点にに収束する場合ならば話は簡単であるが，一般には軌道はもっと複雑な集合に漸近しうる．

そこで，議論を進めるためには次のような集合を考えることが重要である．点 $y \in X$ が $x \in X$ の $\omega$-極限点であるとは，ある時刻の列 $t_k \to \infty$ が存在して $\Psi^{t_k}(x) \to y$ となることをいう．時間が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Z}$ の場合には，逆向きの極限も考えられる．すなわち，点 $y \in X$ が $x \in X$ の $\alpha$-極限点であるとは，ある時刻の列 $t_k \to -\infty$ が存在して $\Psi^{t_k}(x) \to y$ となることをいう．時間を正の無限大に飛ばした極限をギリシャ文字の最後の文字で，負の無限大に飛ばした極限を最初の文字で表現する訳である．全ての $\omega$-極限点（$\alpha$-極限点）を集めた集合

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} \Psi^t(x)}, \quad \alpha(x) = \bigcap_{T \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq T} \Psi^t(x)}$$

を $\omega$-極限酒豪（$\alpha$-極限集合）という．

# 7　ポアンカレ・ベンディィクソンの定理

解の漸近的挙動，漸近集合が良くわかる例として，$\mathbb{R}^2$ の微分方程式を考えてみよう．

**ポアンカレ・ベンディクソンの定理．** $X = \mathbb{R}^2$ （もしくは $S^2$）上の $C^1$ 級の流れを考えると，任意の $x \in X$ に対して $\omega(x)$ は不動点を含むか，もしくは単一の周期軌道となる．$\alpha(x)$ についても同様.

一般に flow の周期軌道が，軌道上にない点の $\alpha$ もしくは $\omega$ 極限集合となるとき，その周期軌道を limit cycle という（ 図 3)．

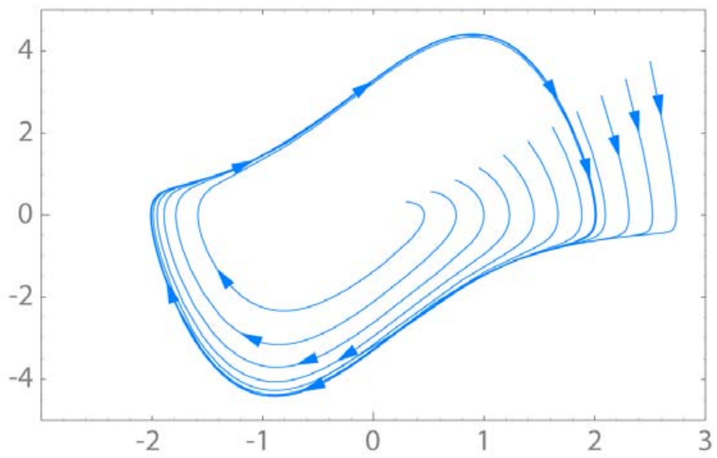


図 3　リミットサイクル（Van der Pol 方程式）

この意味で $\mathbb{R}^2$ の常微分方程式の漸近挙動は比較的やさしい．漸近挙動としては，定常的，もしくは周期的な振る舞いしか出てこない．

では 3 次元ではどうだろうか．また genus を持つ曲面ではどうだろうか．次節でみるように，3 次元の常微分方程式にはカオスが現われ，たいへん複雑な挙動を持ちえる．また，genus を持つ曲面ではポアンカレ・ベンディクソンの定理は成立しない．例えばトーラス $T^2$ 上で全ての点を同じ方向へ平行移動する flow を考えよう．移動方向の傾きが有理数ならば全ての $x \in T^2$ に対して $\mathcal{O}(x)$ は周期軌道になるが，無理数の場合には 全ての $x \in T^2$ に対して $\mathcal{O}(x) = T^2$ となる．

# 8　ローレンツ方程式

Lorenz 方程式とは

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

で与えられる $\mathbb{R}^3$ の常微分方程式である．ここで $\sigma, \rho, \beta$ は実数値を取るパラメータであり，Lorenz は $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ とおいた数値実験によりいわゆるストレンジアトラクターを発見した（図 4）．

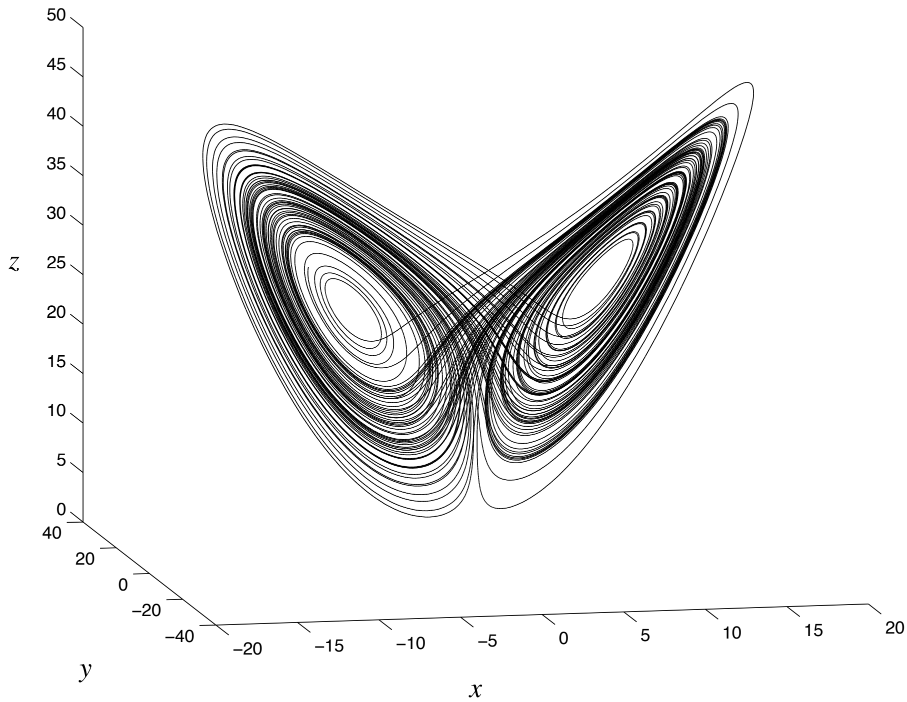


図 4　Lorenz 方程式のアトラクター

この方程式を見いだしたローレンツはもともと気象学者であり，大気の流れをモデル化した別の方程式を研究していた．1950 年代の終わりごろのことである．当時の最先端だった真空管計算機で軌道を計算していたローレンツは，あるとき奇妙な現象に気がついた．計算機が吐き出す計算結果から軌道の途中のある一点の数値を抜き出し，それを初期値として計算を再開すると，しばらくは先の計算と同じ数値が出力されるものの，やがて

もとの軌道とまったく違う数値を示すようになったのである．初めはプログラムか計算機に誤りがあると思っていたローレンツだが，原因は意外なところにあった．彼は途中の計算結果としてプリンタに印字された（当時はディスプレイなどない）数値を用いていたのだが，すべての数値を印字すると時間がかかるため，有効数字三桁のみを印字していたのである．計算機の内部ではもっと高い精度で計算していたものの，いかんせん印字が遅いので出力は三桁に制限していた．ところが，この打ち切りによって生じた誤差が時間とともに拡大して，やがてまったく別の軌道になってしまったのである．

ローレンツはこの現象を注意深く研究し，初期値の違いをいくら小さくとっても，やがてその違いが拡大されて，まったく別の軌道にわかれてしまうことを観察した．現在では「初期値に対する鋭敏な依存性」と呼ばれる性質である．どのような性質を持ってカオスと呼ぶかについては，研究者の間でも大きな違いがあるのだが，それでも広くカオスの本質として認識されているのがこの初期値に対する鋭敏な依存性である（カオスのさまざまな定義に関しては [1] が詳しい）．彼はこの現象が天気予報の困難さの本質にあると考え，それを解説するために同様の性質を持つ，より簡単なモデルとして提出したのがローレンツ方程式である．

ここで初期値に対する鋭敏な依存性の正確な定義を与えておく．相空間 $X$ には距離が入るものとする．

**定義.** 力学系 $\Psi : G \times X \to X$ が初期値に対する鋭敏な依存性を持つとは，ある特徴的な数 $C > 0$ が存在して次が成立することである．「どんな $x \in X$ とその近傍 $U$ に対しても，ある $y \in U$ と時間 $t \in G$ が存在して，時間 $t$ の後には $x$ と $y$ の軌道は距離 $C$ 以上離れる．」すなわち

$$\forall x \in X \quad \forall U : x \text{ の近傍} \quad \exists y \in U \quad \exists t \in G \text{ such that } d(\Psi^t(x), \Psi^t(y)) > C$$

ということである．ただし $d$ は空間 $X$ 上の距離関数．

# 9 エノン写像

$$H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}$$

で定義される多項式写像をエノン写像と呼ぶ．もともとローレンツ方程式を研究していて，そのあまりの難しさに辟易した M. Hénon が，ローレンツ方程式のポアンカレ写像

と同じような性質を持ちながらも，より扱いやすい力学系として考え出したものである．彼は $a = 1.4, b = 0.3$ に対して数値実験を行ない，ローレンツ方程式と同様に「ストレンジアトラクター」を持つことを見い出した．

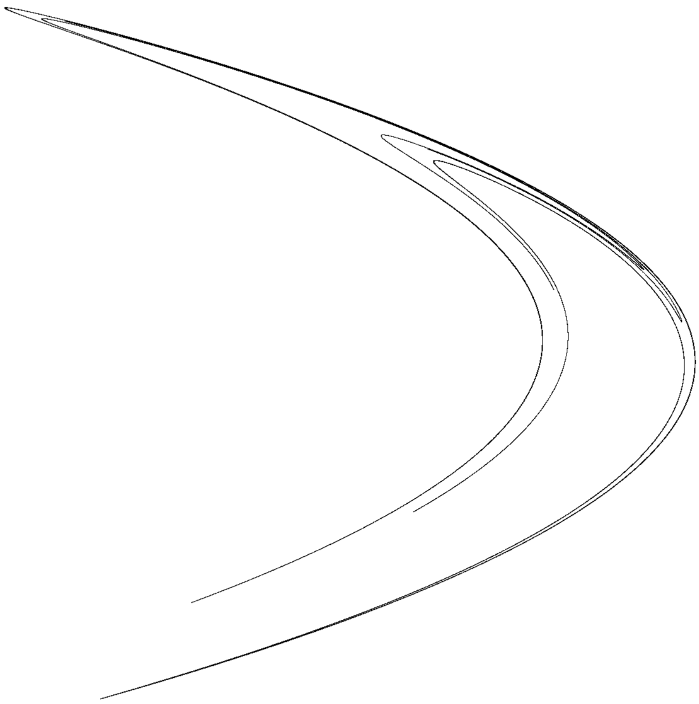

図 5　エノン写像

## 参考文献

大学図書のデータベースや amazon で検索すれば力学系関係の書籍がいかに膨大に発行されていることがわかる．以下に挙げる本はなるべく定番かつ入手しやすい本を選んだつもりだが，何点かは絶版かも知れない．私の趣味で変わった本も入っている．このリストは決して網羅的でも包括的でもなく，また挙げた本の全てを私がちゃんと読んでいる訳でもないことをお断りしておく．

**力学系全般**

どれも初等的なところから解き起こしている親切な教科書であり，扱う素材の多くは共通しているが，面白いことにそのアプローチは互いに大きく異なる．このなかでは [6] と [7] は比較的大部かつより進んだ内容まで含んでおり，前者は構造安定性理論に詳しく，

後者はエルゴード理論や幾何学的な力学系との関連が詳しい．

[1] 國府 寛司「力学系の基礎」, 朝倉書店, 2000.

[2] B. Hasselblatt and A. Katok, *A First Course in Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.

[3] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, 2nd ed., Perseus Books Publishing, 1989. 日本語訳「カオス力学系入門 第 2 版」, 共立出版, 2003.

[4] M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, 2nd ed., Academic Press, 2004. 日本語訳「力学系入門–微分方程式からカオスまで」, 共立出版, 2007.

[5] J. Palis and W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer, 1982.

[6] C. Robinson, Dynamical Systems, CRC Press, 1999. 日本語訳「力学系」 上・下, シュプリンガー東京, 2001.

[7] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.

次の 2 点は上に挙げた本と同様に力学系全般を扱っているが，力学系の応用面にも力を入れたものであり，数学者が書いたテキストでありながら物理寄りの研究者にも広く受け入れられているようである．物理サイドの文献については不勉強にしてよく知らないので郡氏にお任せすることにするが，[10] は数学サイドから見ても豊富なアイディアが刺激的な教科書である．600 ページを越える大部であるが，ウェブサイトから全てダウンロードできる．

[8] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.

[9] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos. An Introduction to Dynamical Systems* Springer, 1997. 日本語訳「カオス」1, 2, 3, シュプリンガー・ジャパン, 2006.

[10] P. Cvitanović, et al., *Chaos: classical and quantum*, `http://chaosbook.org/`

### Handbooks

以下に挙げる Handbook シリーズの 3 冊は，力学系の最近の話題を概観するのに便利である．Volume 1A, 1B は力学系の理論的な側面を扱ったもので，$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ に限らない群作

用や，random dynamical systems など，広い意味での力学系についても詳しい．Volume 2 は力学系の応用や数値計算を主題としている．

[11] B. Hasselblatt and A. Katok (ed.), Handbook of Dynamical Systems, Volume 1A, Elsevier Science, 2002.

[12] B. Hasselblatt and A. Katok (ed.), Handbook of Dynamical Systems, Volume 1B, Elsevier Science, 2006.

[13] B. Fiedler (ed.), Handbook of Dynamical Systems, Volume 2, Elsevier Science, 2002.

**双曲型理論**

創始者 S. Smale の歴史的論文 “Differential Dynamical Systems” や幾つかのエッセイを [14] で読むことができる．双曲型力学系の本格的入門書としては [6] や [15] が有名である．[16] と [17] は双曲型理論を越えて非一様双曲型の力学系へと理論を進めたものである．より詳しくは三波先生のノート及びその文献表を参考にされたい．

[14] S. Smale, The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics, Springer, 1980.

[15] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, Springer, 1987.

[16] J. Palis and F. Takens, Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations, Cambridge University Press, 1993.

[17] C. Bonatti, L. Diaz and M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, Springer, 2005.

**解析力学**

力学系の源流である解析力学であるが，その数学的構造を力学系の視点もふまえつつ明快に解説した決定的な名著として [18] がある．常微分方程式の解の存在や一意性にまで立ち返って丁寧に記述された教科書として [19] もある．

[18] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed., Springer, 1989. 日本語訳（第 1 版）「古典力学の数学的方法」, 岩波書店, 1980.

[19] 伊藤 秀一「常微分方程式と解析力学」, 共立出版, 1998.

**位相幾何学的手法**

位相幾何学的な手法を用いた力学系の研究は，近年になって計算機科学との融合が進んだこともあり注目を集めているが，その基礎的な発想については上記 [11] に収録されている

Franks と Misiurewicz の論説がたいへん良くまとまっている．以下の 2 冊は今となってはもはや古典といえるかも知れないが，今だに汲み尽されぬアイディアの源泉として価値が高い．


[20] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, American Mathematical Society, 1976.

[21] J. Franks, *Homology and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1982.


### エルゴード理論

「アーノルドの猫写像」が始めて登場した [22]

近年の力学系では可微分多様体上で測度論的な構造と可微分構造を同時に問題にする smooth ergodic theory が強力な道具として様々な場面で登場する．これについては [7] の付録や [25] が定評がある．


[22] V. I. Arnold and A. Avez, *Probrèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars, 1967. 日本語訳「古典力学のエルゴード問題」, 吉岡書店, 1972.

[23] M. Pollicott and M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1998.

[24] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, 1982.

[25] M. Pollicott, *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds*, Cambridge University Press, 1993.


### 複素力学系

一変数複素力学系の入門書としては [26] や [27] が有名である．一変数から多変数複素力学系まで広く扱かったものとして [28] がある．変わったところとしては，[29] では函数論と一変数複素力学系への入門を同時に進められている．「計算可能性理論」という計算機で本質的に解ける問題とはどのようなものかを問う理論があるが，この文脈において複素力学系の基本的な研究対象であるジュリア集合が計算機可能であるかを論じた [30] も面白い．


[26] A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, Springer, 1991.

[27] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, 3rd ed., Princeton University Press, 2006

[28] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, Holomorphic Dynamics, Cambridge University Press, 2000.

[29] 谷口 雅彦「もう一つの函数論入門」, 京都大学学術出版会, 2002.
[30] M. Braverman and M. Yampolsky, Computability of Julia Sets, Springer, 2009.

**記号力学系**

与えられた良く性質のわからない力学系を理解するために，既に性質の理解できている力学系との対応を何らかの形でつけるという手法が広くつかわれる．そこで「理解できる力学系」の例として最も基本的かつ有用なのが記号力学系である．基本的な教科書として [31, 32] が広く読まれている．記号力学系は計算機科学におけるオートマトンと密接な関係があるが，この関係を用いて一次元の力学系に表われる記号力学系を計算機科学の観点から研究したものに [33] がある．

[31] D. Lind and B. Marcus, Symbolic Dynamics and Coding, Cambridge University Press, 1995.
[32] B. Kitchens, Symbolic Dynamics, Springer, 1998.
[33] H. Xie, Grammatical Complexity and One-dimensional Dynamical Systems, World Scientific, 1996.