重要情報をみつけよ！
Googleの革新をもたらした数学とは

お茶の水女子大学
情報科学科

郡　宏　（こおり　ひろし）

お相手：北畑裕之（千葉大・物理学科）

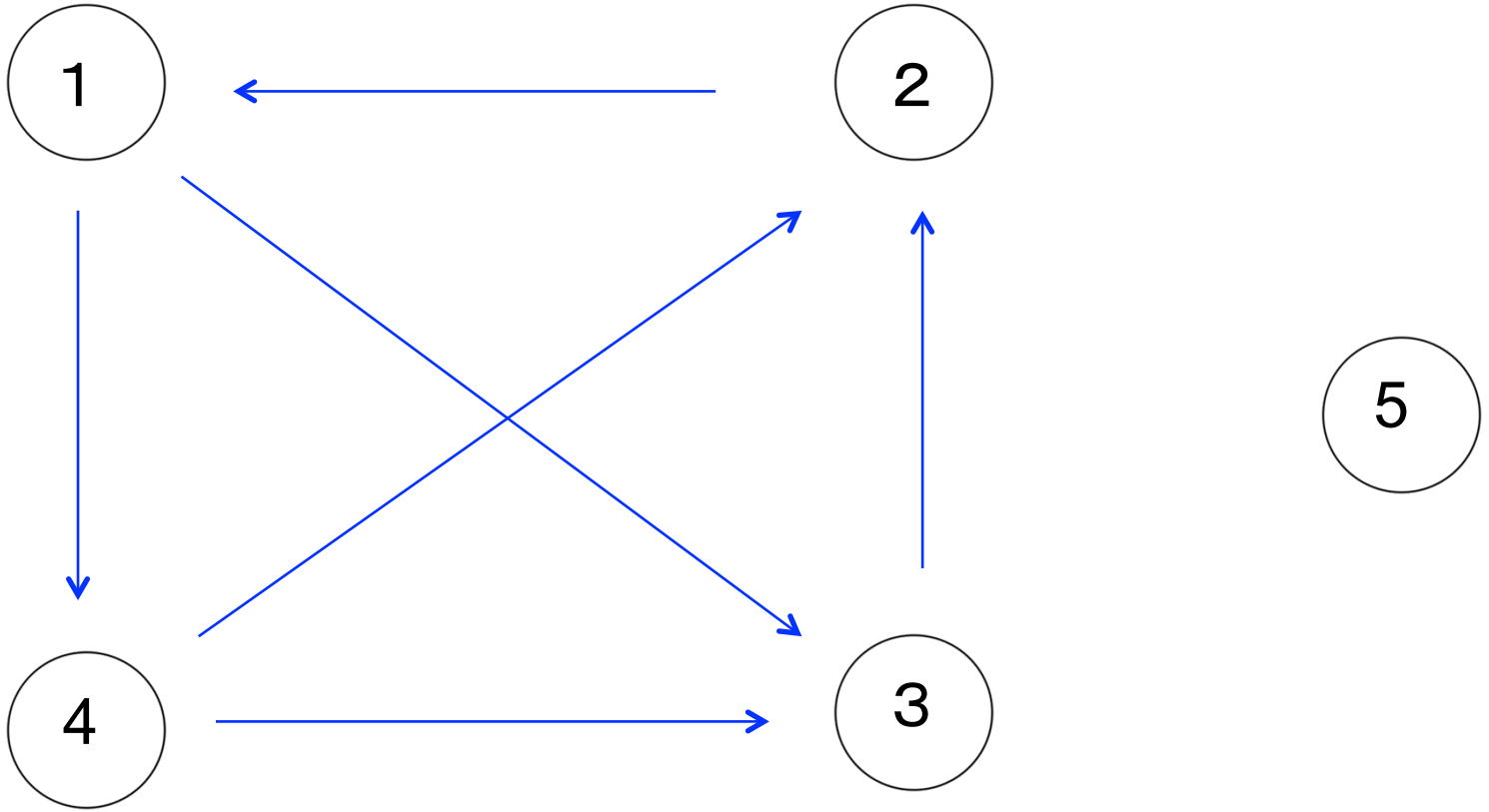
ランキングの重要性

- 現代は情報があふれている
- その中なから有用な情報を獲得したい！
  - 重要なウェブページ，重要（危険？）人物
  - しらみつぶしはもちろん無理

- 重要度をランキングする技術が必要

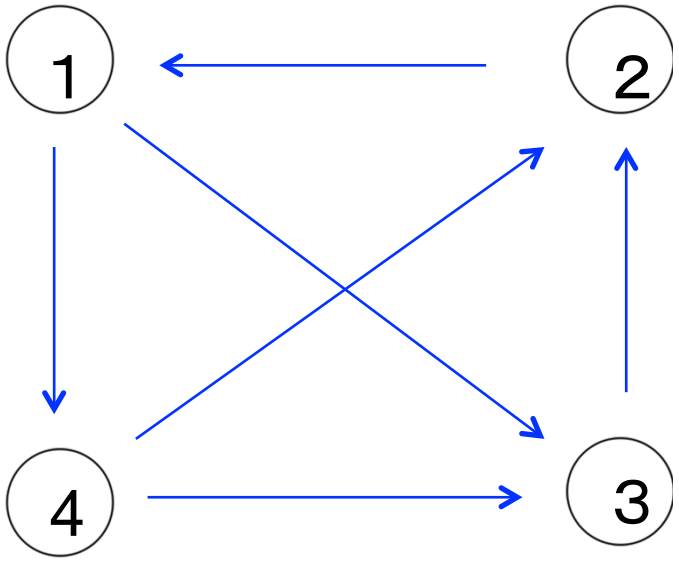
Googleの革新：
ページの内容ではなく，
ページとページのリンク関係に基づいて
ページの重要度をランキング

例題：以下のウェブページのネットワークで
重要なページはどれ？？



①，②，③，④，⑤：ウェブページ
矢印：リンク

重要なページとは？



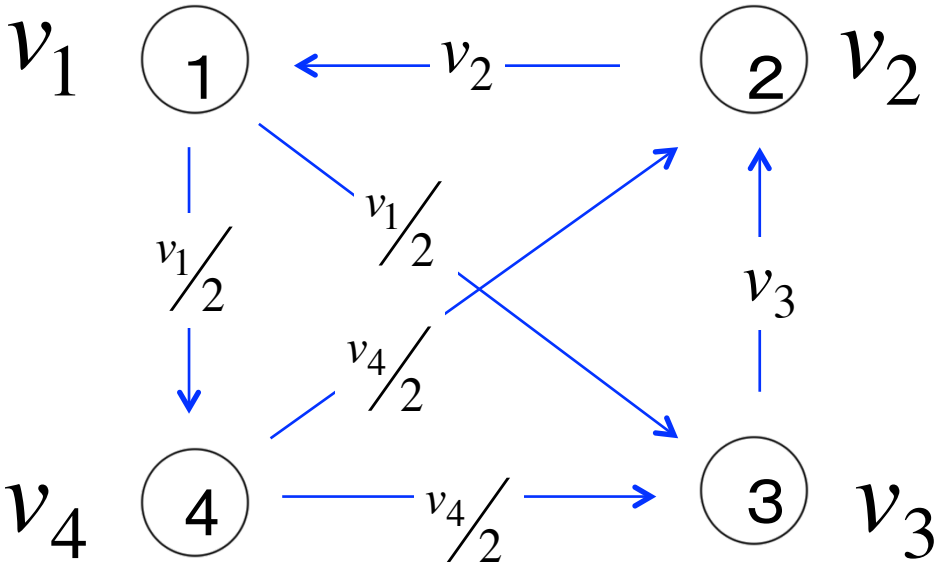
- 多くのページからリンクされている
（多くの支持が大事）

- 良質なページからリンクされている
（信頼できるページからの支持が大事）

- でも，むやみにリンクしているサイトからの
リンクはあてにならない
（厳選された支持が大事）

ページをランキングしよう！

v_i ：ページの重要度



1. 矢印に沿って重要度を「送る」.
2. ただし，複数のリンクがあれば重要度を等分して送る.
3. 受け取った重要度の和がそのページの重要度であるとする.

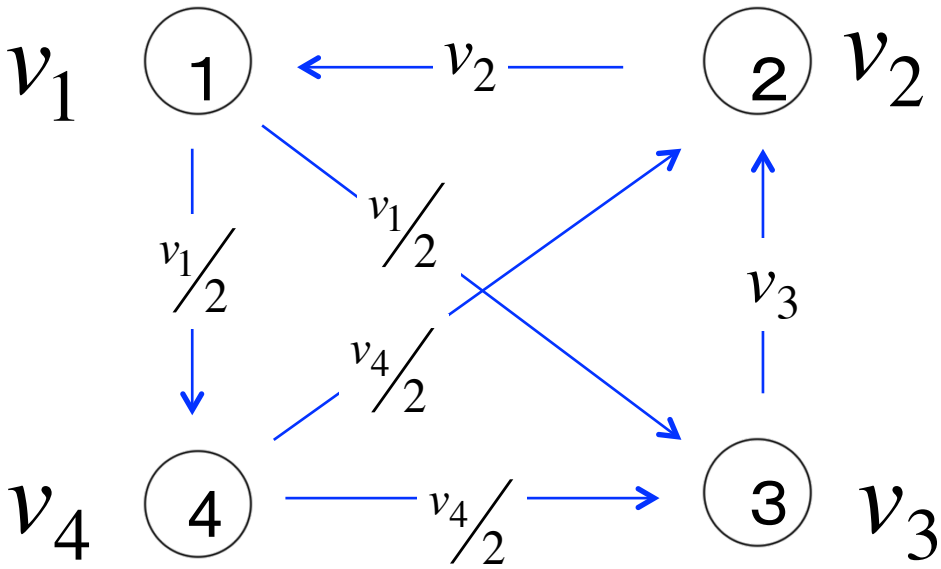
$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_3 + v_4/2 \\ v_3 = v_1/2 + v_4/2 \\ v_4 = v_1/2 \end{cases}$$

単なる連立方程式．解ける？！

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 4 : 4 : 3 : 2$$

ページをランキングしよう！

v_i :ページの重要度（総和を1とする）



$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 4 : 4 : 3 : 2$$

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = \left(\frac{4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13} \right)$$

重要度が求まり，ランキングできた!

この数値は PageRank とよばれる．ページの内容を見ない！
これがネットの検索技術のイノベーションをもたらした．

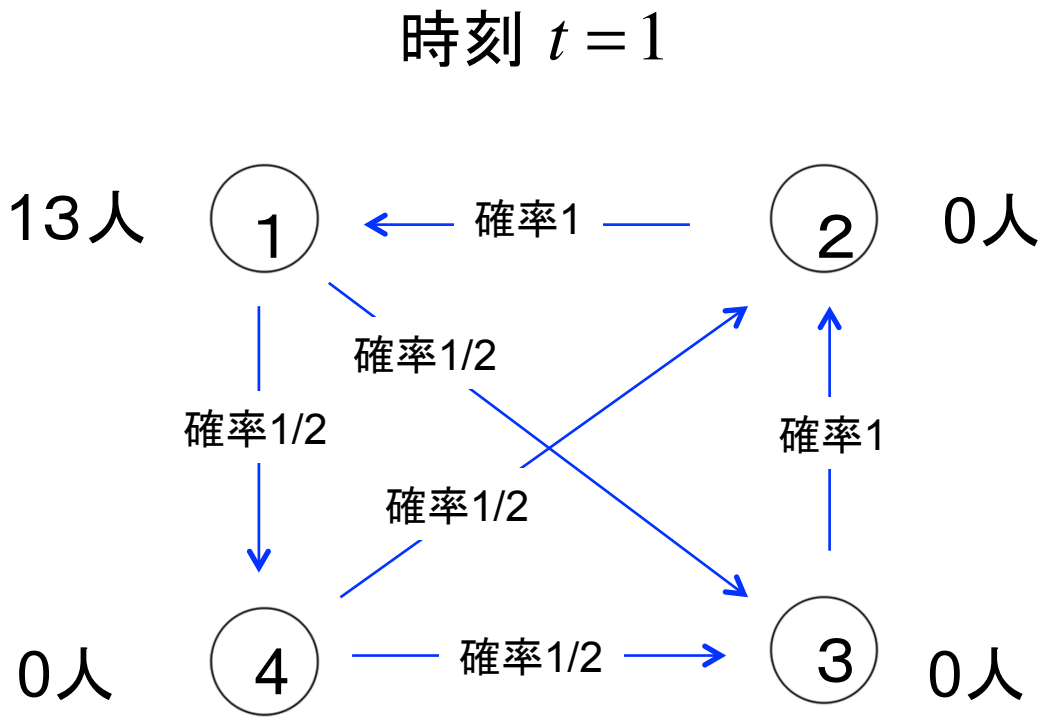
ちなみにPageさんはgoogleの創始者の一人．

疑問

- ページランクは，本当にいい指標？
- どういった意味で妥当な指標？

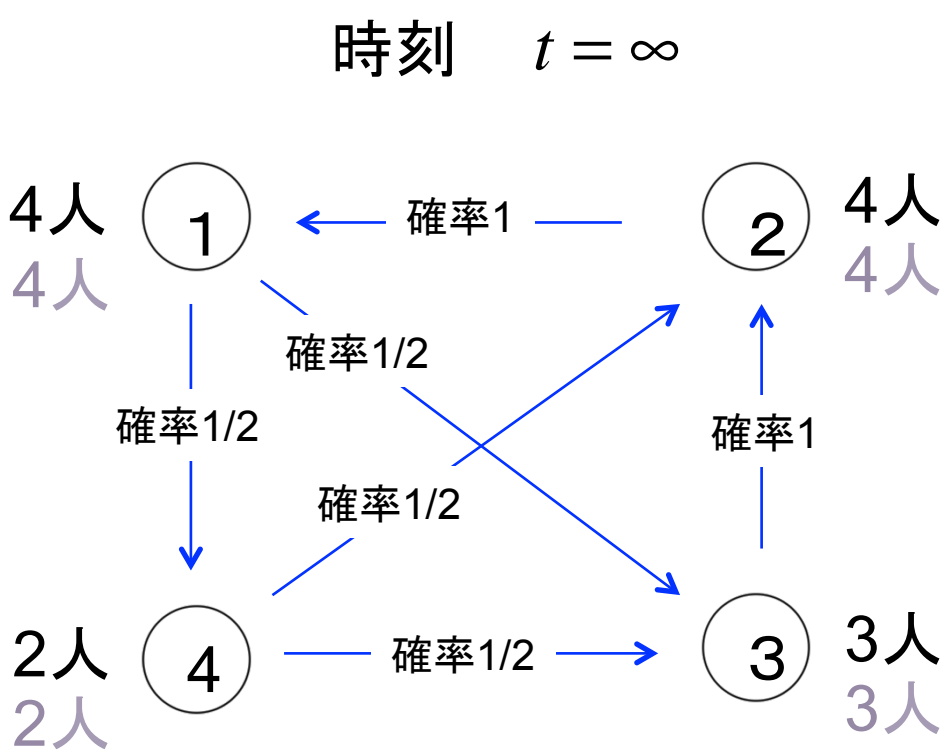
PageRankは本当にいいランキング法？

- ぼーっとウェブ・サーフィンしてみよう



PageRankは本当にいいランキング法？

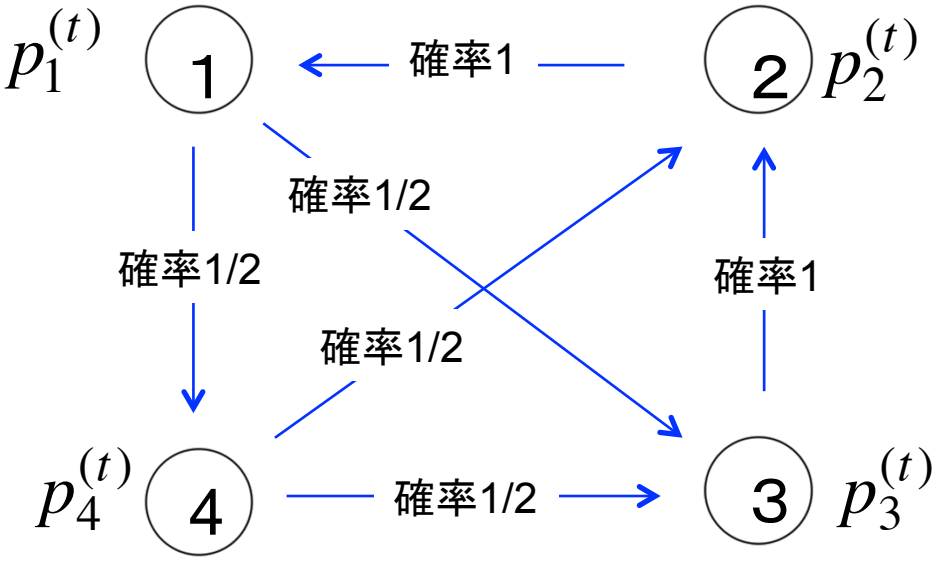
- ぼーっとウェブ・サーフィンしてみよう



繰り返していくと
一つ前の時刻も今も
同じ人数分布になる.
（収束）

PageRankは本当にいいランキング法？

$p_i^{(t)}$:時刻tにサイトiを訪ねている人数



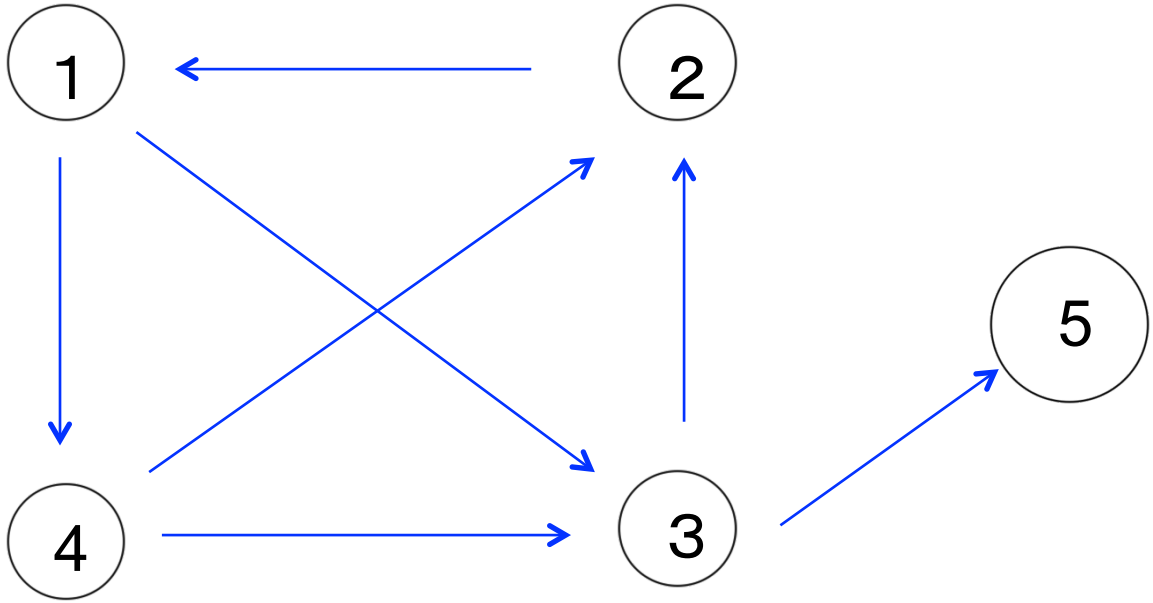
$$\begin{cases} p_1^{(t)} = p_2^{(t-1)} \\ p_2^{(t)} = p_3^{(t-1)} + \frac{1}{2} p_4^{(t-1)} \\ p_3^{(t)} = \frac{1}{2} p_1^{(t-1)} + \frac{1}{2} p_4^{(t-1)} \\ p_4^{(t)} = \frac{1}{2} p_1^{(t-1)} \end{cases}$$

連立漸化式

収束，つまり $p_i^{(t)} = p_i^{(t-1)}$ とすると，さきほどのvの式とまったく同じ!!

ページランクはネットワーク上で「ランダムウオーク」をしたときの，
各ページの訪問確率を表している．

もし行き止まりがあったら？

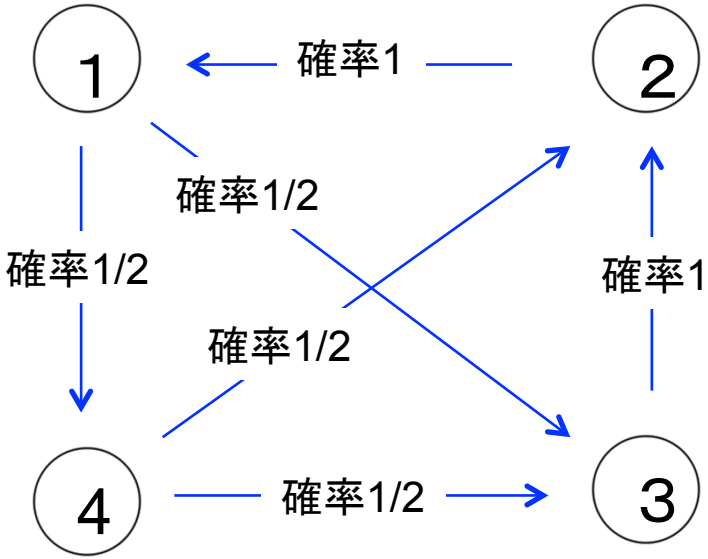


重要度　　$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (0,0,0,0,1)$

行き止まりが独り占めしてしまう！ こまった.

ページランクはこれを防ぐため「テレポーテーション」を導入.

大学の数学との関係



まず，ネットワークを
行列をつかって表現
（線形代数）

つながりを以下のように表現

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix}$$

「隣接行列」といいます
（グラフ理論）

各列の総和を1にする

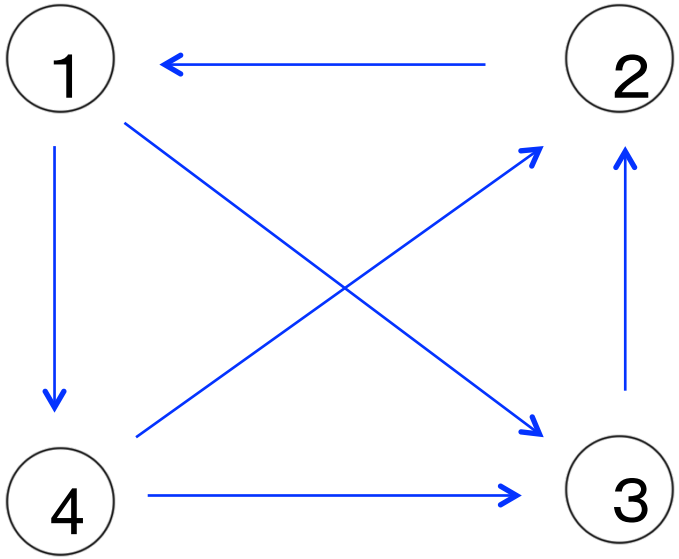
$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

「確率行列」といいます
（確率過程）

大学の数学との関係：グラフ理論

まず，ネットワークを行列をつかって表現

（線形代数）



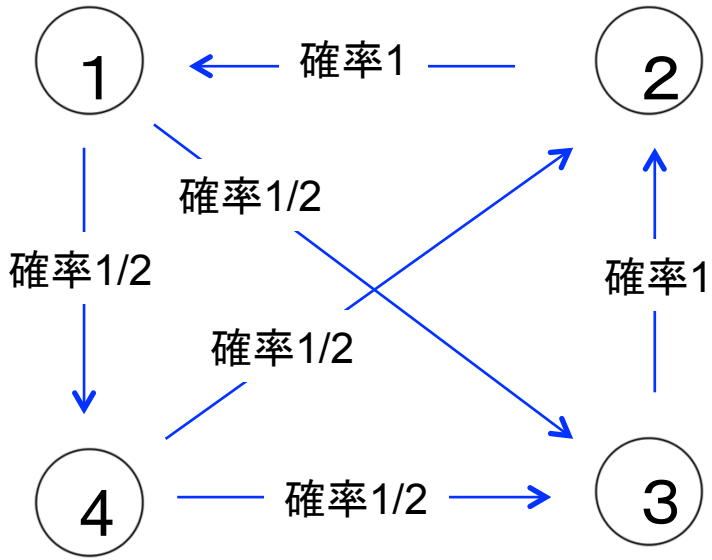
つながりを以下のように表現

$$\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

「隣接行列」といいます

（グラフ理論）

大学の数学との関係:確率論



各列の総和を1にする

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

「遷移確率行列」といいます

大学の数学との関係：線形代数

ページランクをベクトルで
つかって表現

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

ページランクを求めた式を次の形式で書き表す

$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_3 + v_4/2 \\ v_3 = v_1/2 + v_4/2 \\ v_4 = v_1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = B\vec{v}$ 「固有方程式」といいます

大学の数学との関係:ランダムウォーク

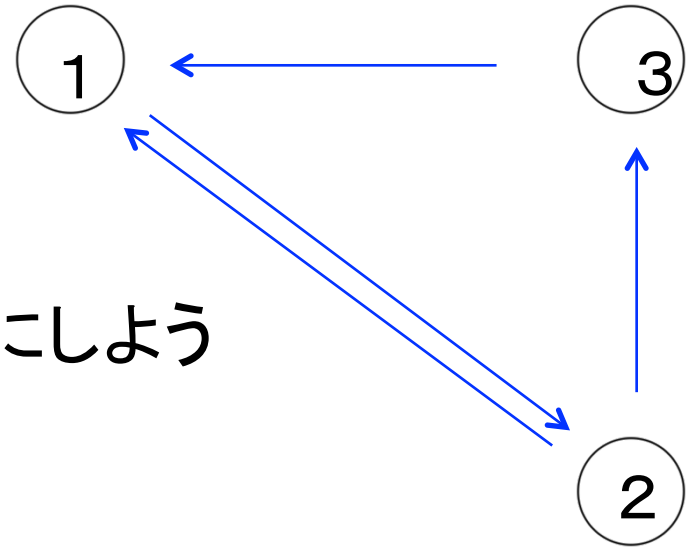
$$\begin{cases} p_1^{(t)} = p_2^{(t-1)} \\ p_2^{(t)} = p_3^{(t-1)} + \frac{1}{2} p_4^{(t-1)} \\ p_3^{(t)} = \frac{1}{2} p_1^{(t-1)} + \frac{1}{2} p_4^{(t-1)} \\ p_4^{(t)} = \frac{1}{2} p_1^{(t-1)} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} p_1^{(t)} \\ p_2^{(t)} \\ p_3^{(t)} \\ p_4^{(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(t-1)} \\ p_2^{(t-1)} \\ p_3^{(t-1)} \\ p_4^{(t-1)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}^{(t)} = B\vec{p}^{(t-1)} = B^2 \vec{p}^{(t-2)} = \ldots = B^t \vec{p}^{(0)}$$

初期ベクトルを適当に選び、tを十分大きな数にすれば、PageRankが近似的に求まる。

実際Googleはこの方法をつかってPageRankを求めている(t=50程度らしい)。
ちなみにページ数は10兆個を超える！！

課題



（1）何かのネットワークを考えて図にしよう
（2）遷移確率を書き込もう
（3）ページランクを算出しよう
（4）結果について考察しよう

まとめ

- ページランク：膨大な情報があふれる世界から，重要な情報を探し出す数学的技術

- 今はビックデータの時代。ページランク以外にも、さまざまな数学的手法が、重要情報の探索に用いられている。

- 線形代数，確率論，グラフ理論などの，大学で学ぶたのしーい数学がいろいろと関係しています。
  うわー、大学に行くのが楽しみだー！！