

セル・オートマトンで描く複雑パターン

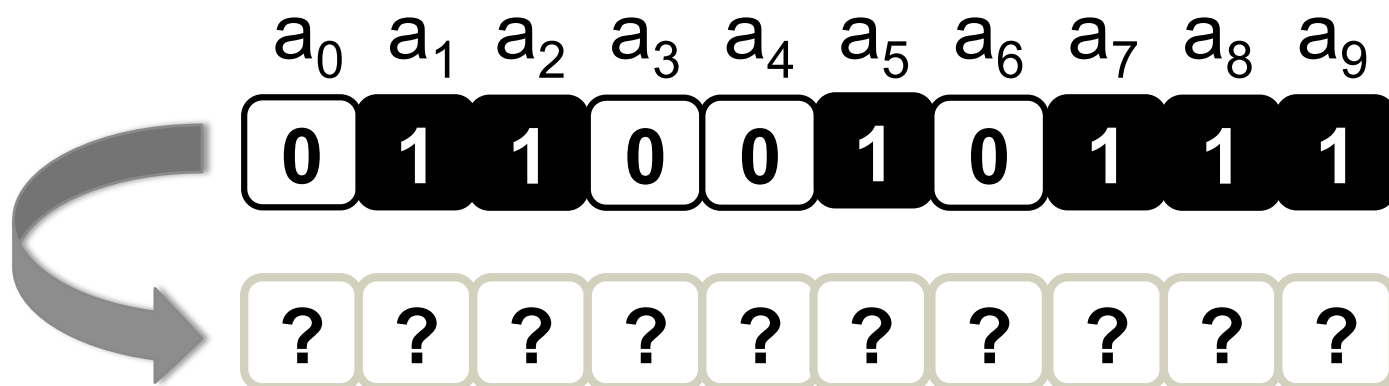
第13回 JST数学キャラバン in 水戸

川原田 茜 (静岡県立大学 経営情報学部)

- 次のような記号列 $\{a_n\}$ が与えられたとする。

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1

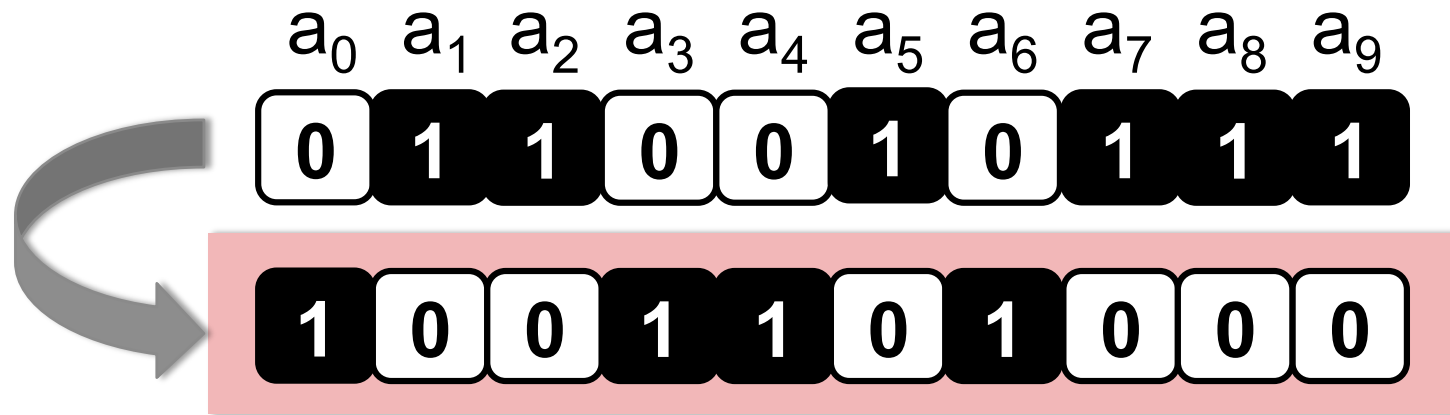
- 次のような記号列 $\{a_n\}$ が与えられたとする。



- 以下のルールに従い $\{a_n\}$ から新たな記号列を作ってみる。



- 記号列 $\{a_n\}$ から構成した 新たな記号列

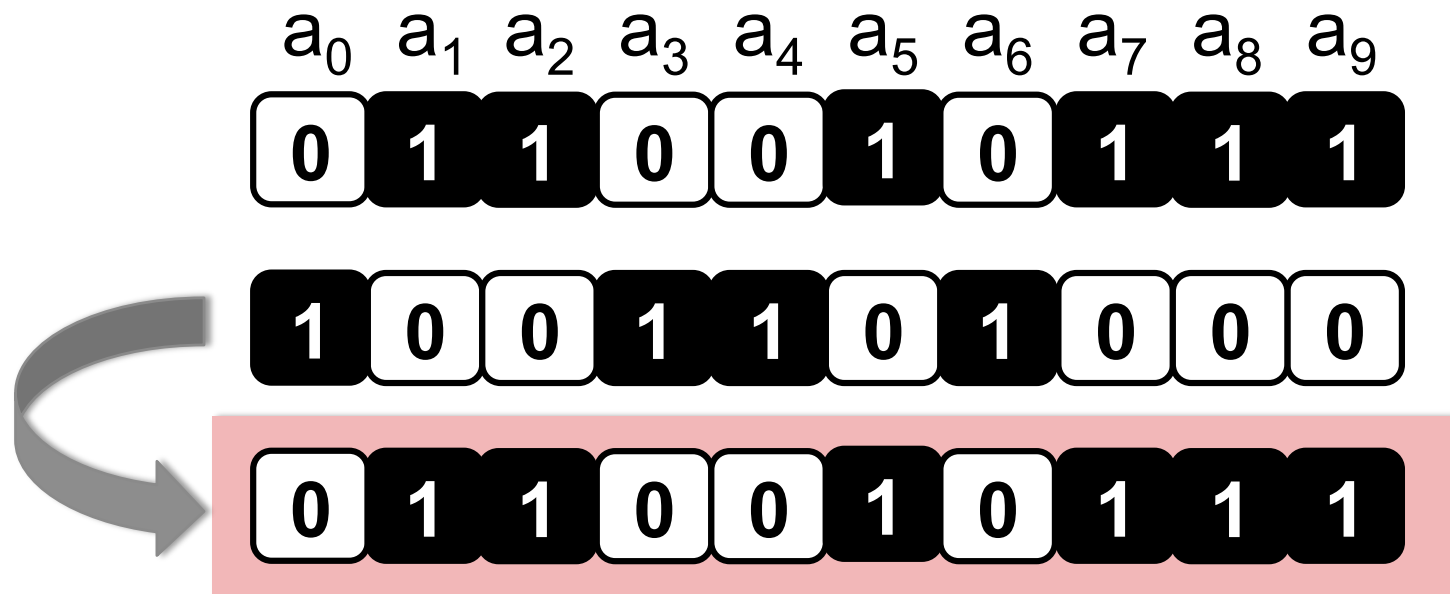


- 再び

いま	0	ならば	1
	1	ならば	0

 により新たな記号列を作る。

- 記号列 $\{a_n\}$ から構成した 新たな記号列



- さらに新たな記号列を作る。

0と1からなる記号列の時間発展

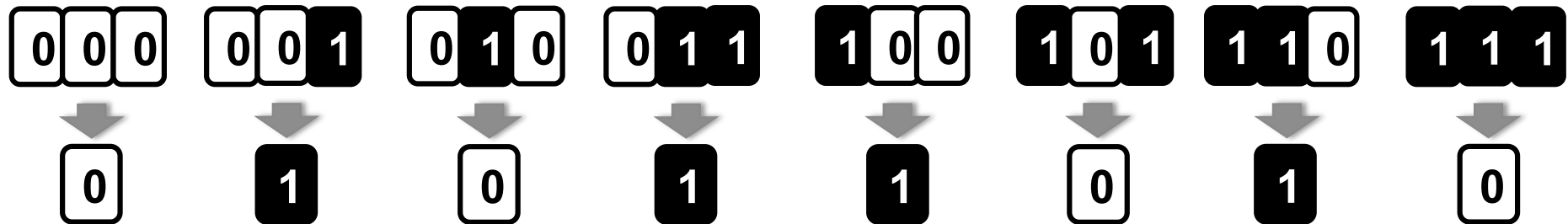
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
初期配置	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
2 step	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
3 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
4 step	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
5 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

この記号列の時間発展パターンはとてもシンプル。
周期的なので、未来の挙動も全部分かる。

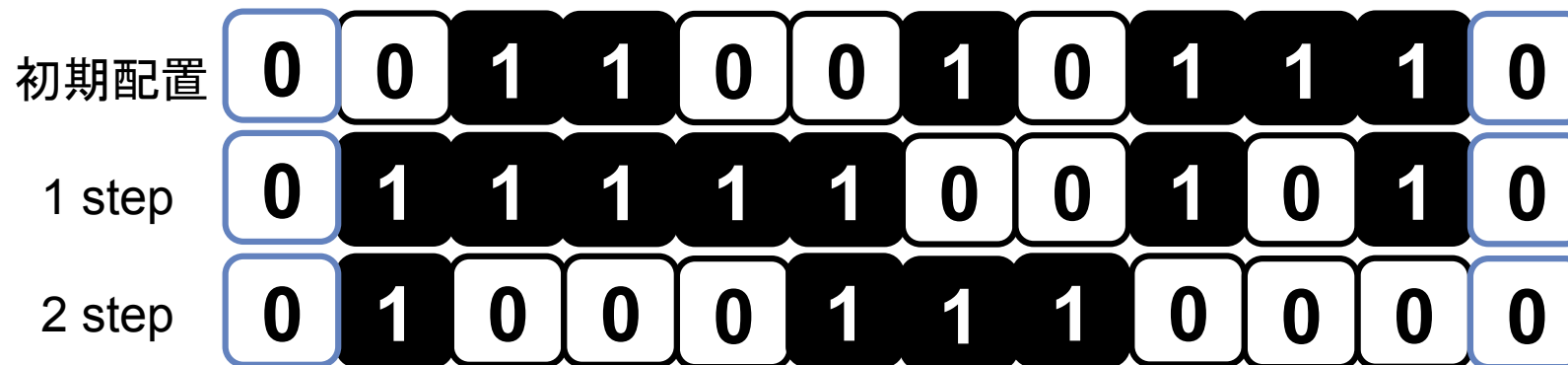
- 次に、ルールを少し変えてみる。

- 3つの記号組で決定されるルール

自分自身と右隣 & 左隣の記号組から次の記号を決める。



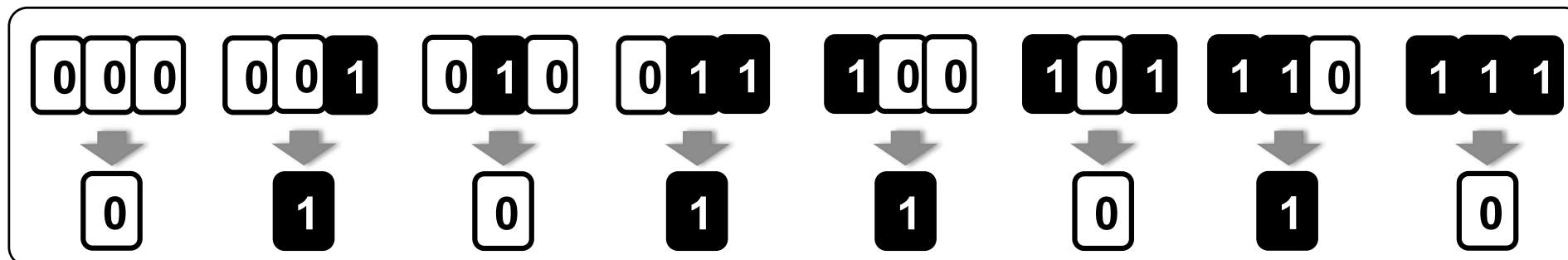
- 次の記号列の時間発展を考えてみる。 (両端は 0 で固定する。)



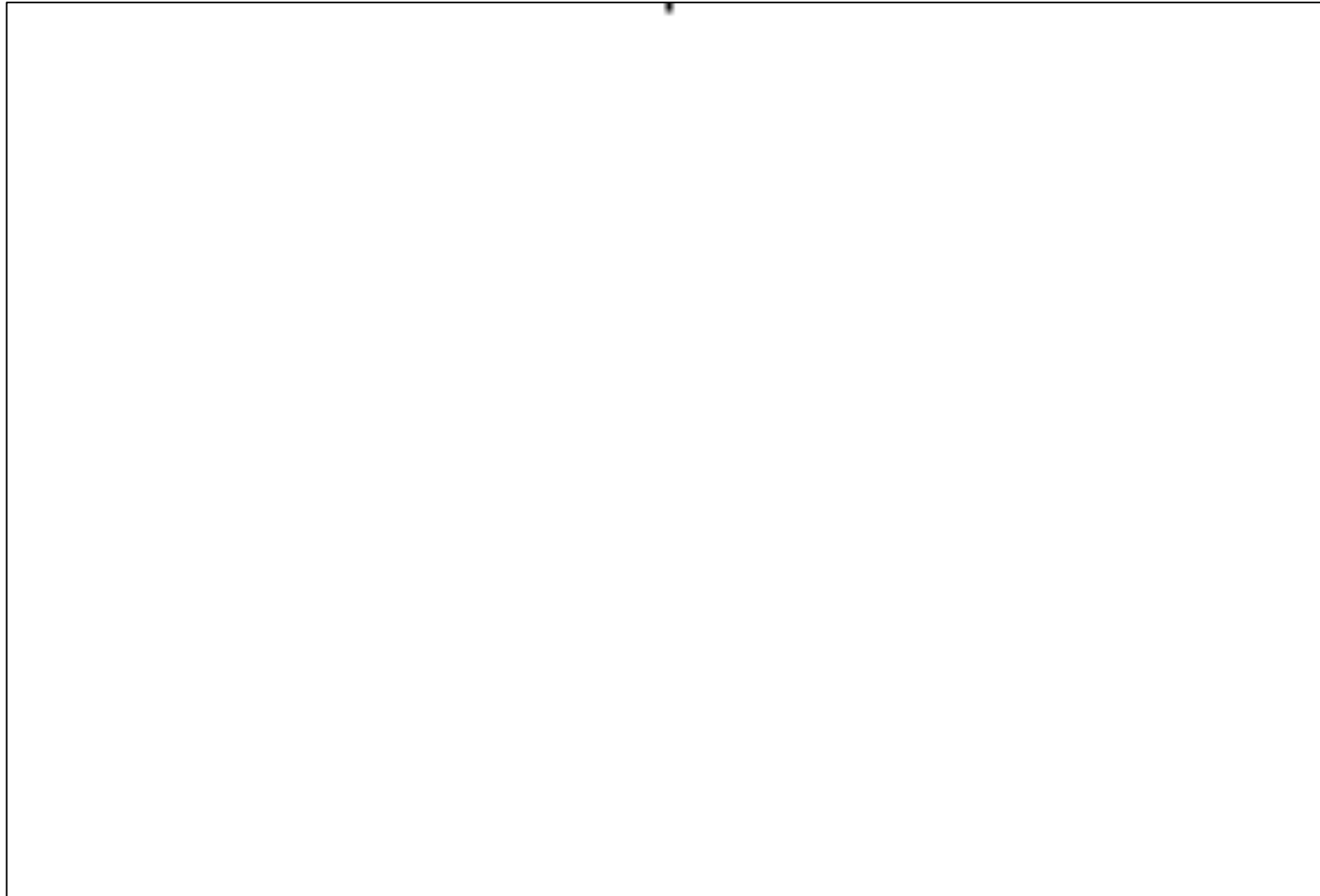
- 次に、さっきと異なる初期配置からの時間発展を描いてみる。

初期配置	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
2 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
3 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
4 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0

- ルール



SIERPINSKI GASKET



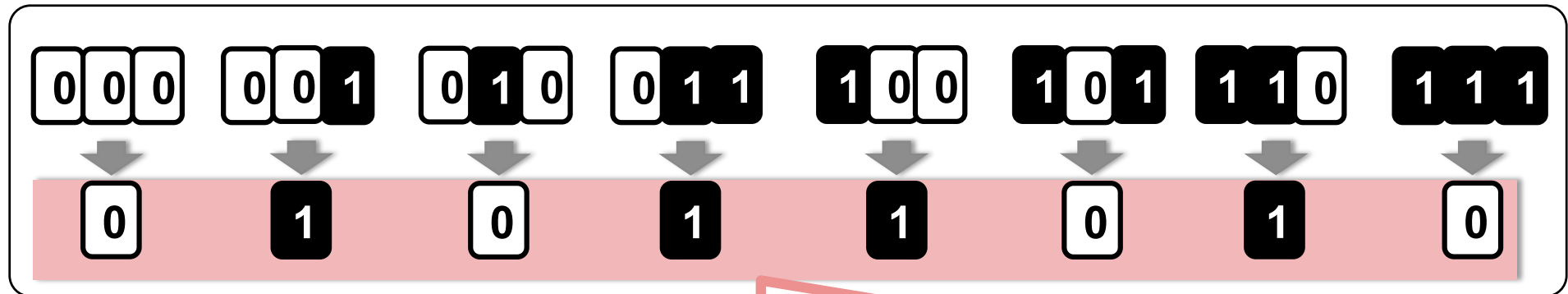
- それぞれの記号が、自分の近く(両隣)の記号の様子をうかがいながら次の記号を決定する。

セル・オートマトン

CELLULAR AUTOMATON

- ・・・ 局所的な相互作用により、複雑で多様なパターンを生成することができる数理モデル。

- 3つの記号組で決定されるルール



ここを換えると別のセル・オートマトンになる。

- 各セルの記号が2種類(0か1)、3つの記号組(自分と両隣)でルールが決まるとき、**エレメンタリー・セル・オートマトン**とよぶ。
- 記号はそれぞれ 0か1 になるので、エレメンタリー・セル・オートマトンは全部で $2^8 = 256$ 個ある。
- 全部のエレメンタリー・セル・オートマトンに名前がついている。(Rule0 ~ Rule255)

Wolframによるセル・オートマトンの分類

セル・オートマトンの挙動によって4つのクラスに分類できる。

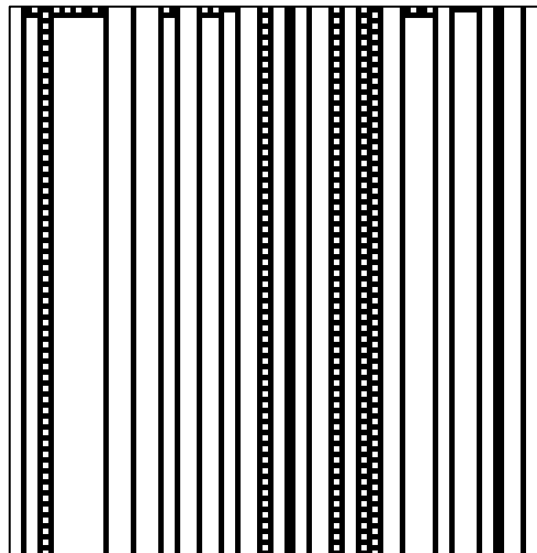
ほとんど全ての初期配置に対して、

- クラス1： ある程度時間が経過すると全セルの状態が **0** または **1** の記号列になる。
- クラス2： ある程度時間が経過すると周期的な挙動に落ち着く。
- クラス3： カオス的な振る舞い(非周期的)を示す。
- クラス4： 周期的なパターンとランダムなパターンが組み合わさり、複雑な挙動となる。

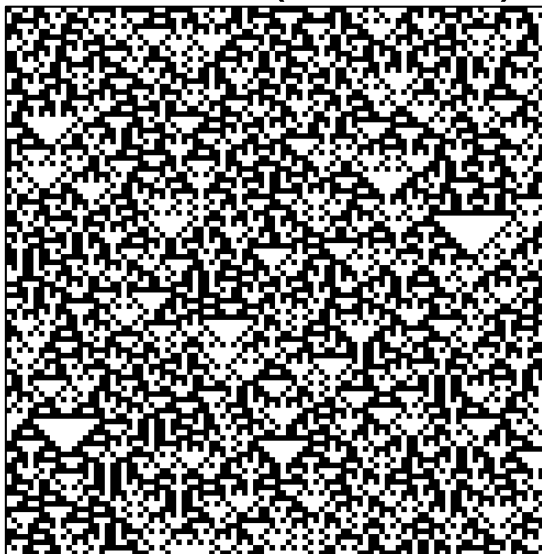
クラス1 (Rule40)



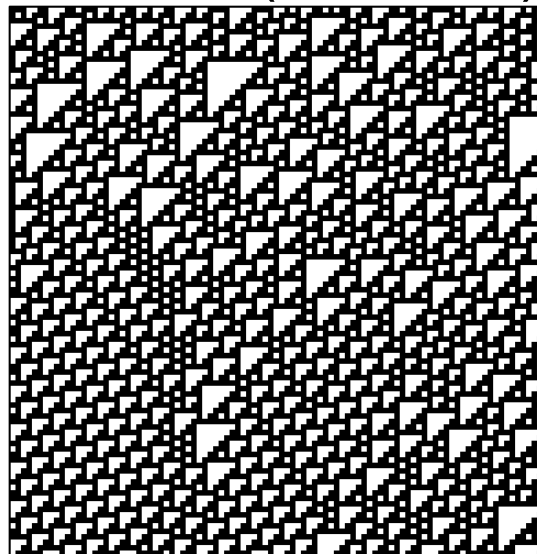
クラス2 (Rule108)



クラス3 (Rule90)



クラス4 (Rule110)



Wolframによるセル・オートマトンの分類

セル・オートマトンの挙動によって4つのクラスに分類できる。

ほとんど全ての初期配置に対して、

- クラス1： ある程度時間が経過すると全セルの状態が 0 または 1 の記号列になる。
- クラス2： ある程度時間が経過すると周期的な挙動に落ち着く。
- クラス3： カオス的な振る舞い（非周期的）を示す。
- クラス4： 周期的なパターンとランダムなパターンが組み合わさり、複雑な挙動となる。

この分類は画期的ではあるが、数学的にはまだ曖昧さが残る。

たくさんの研究者がたくさんの定式化を試みっていますが、まだみんなが納得できるような結論は得られていません。

まとめ

- セル・オートマトンは局所的な相互作用により、多様で複雑なパターンを生成することができる数理モデル。
- セル・オートマトンの中でも特に、各セルの記号が0 or 1、局所3近傍に依存してルールが定義されるとき、エレメンタリー・セル・オートマトンとよぶ。
- セル・オートマトンの分類と、分類に関わる複雑さの研究はまだ始まったばかり。