

2013.11.17
第9回JST数学キャラバン
「広がる数学IV」in 岡山

リズムと模様の数学

千葉大学大学院理学研究科

北畑 裕之

e-mail: kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp

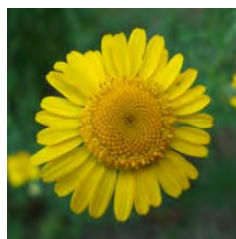
お茶の水女子大学理学部

郡 宏

自然界のリズム・パターン



熱帯魚



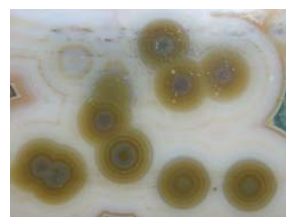
花



雲



砂丘



岩石の断面

" 鴨川等間隔の法則 "



京都の鴨川

時間変化するパターン

ホタルの発光に見られる波

NHK のテレビより

googleなどで検索するとみられます

NHK のテレビより

生態系での個体数のリズム



Hare

野うさぎ

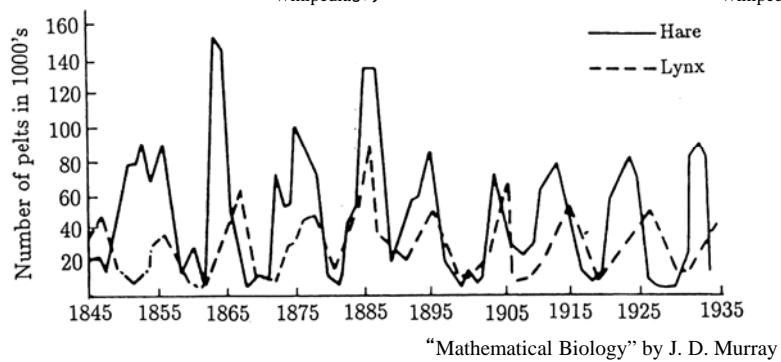
Wikipediaより



Lynx

やまねこ

Wikipediaより

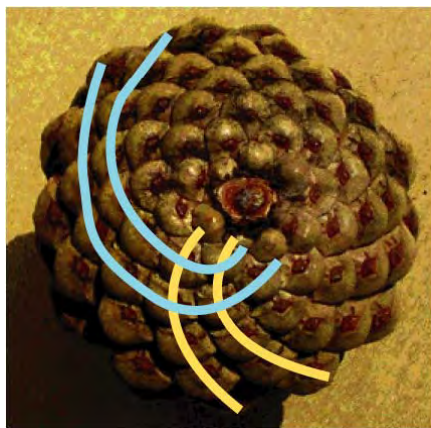


パターン形成と物理・数学の不思議な関係



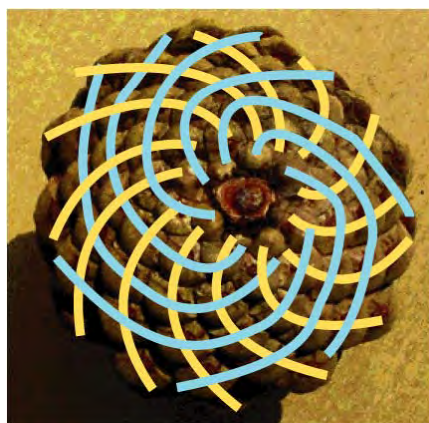
マツボックリ

生き物に現れるらせん



マツボックリ

生き物に現れるらせん



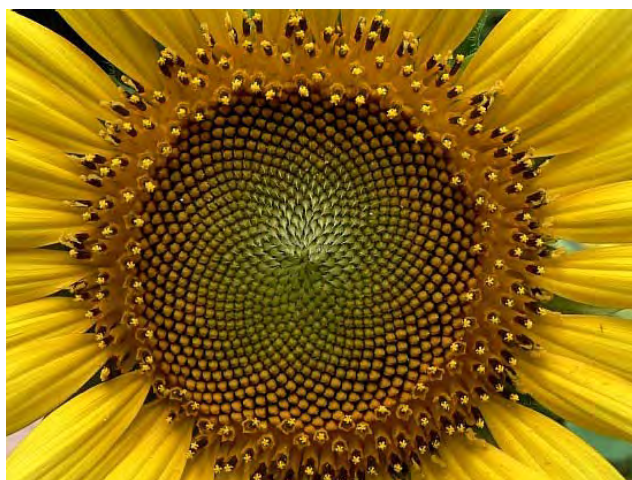
水色(時計回り): 8本

黄色(反時計回り): 13本

マツボックリ



サボテン



ヒマワリ

マツボックリ



時計回り: 8本
反時計回り: 13本

サボテン



時計回り: 21本
反時計回り: 13本

ヒマワリ






時計回り: 55本
反時計回り: 34本

フィボナッチ数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$1+1=2$ $1+2=3$ $2+3=5$ $3+5=8$ $5+8=13$ $8+13=21$

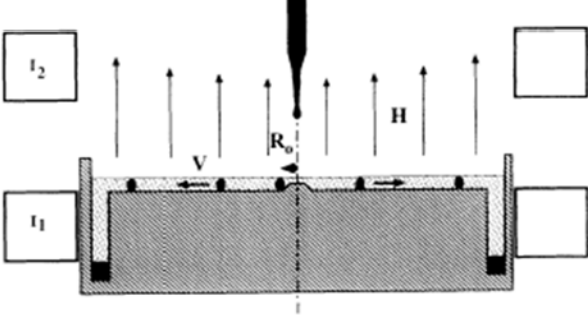
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

| | | |
|---|---|--|
| マツボックリ | サボテン | ヒマワリ |
|  |  |  |
| 時計回り: 8本 反時計回り: 13本 | 時計回り: 21本 反時計回り: 13本 | 時計回り: 55本 反時計回り: 34本 |
| 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …… | | |

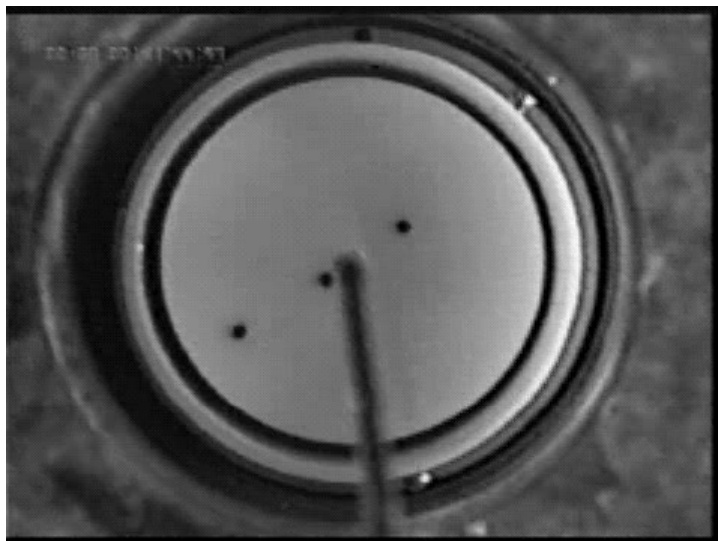
磁性流体を使った実験

VOLUME 68, NUMBER 13 PHYSICAL REVIEW LETTERS 30 MARCH 1992

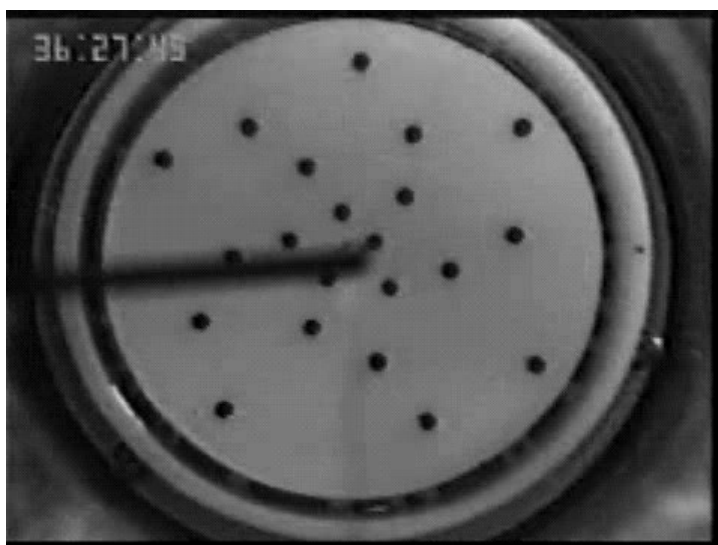
Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process
S. Douady^(a) and Y. Couder



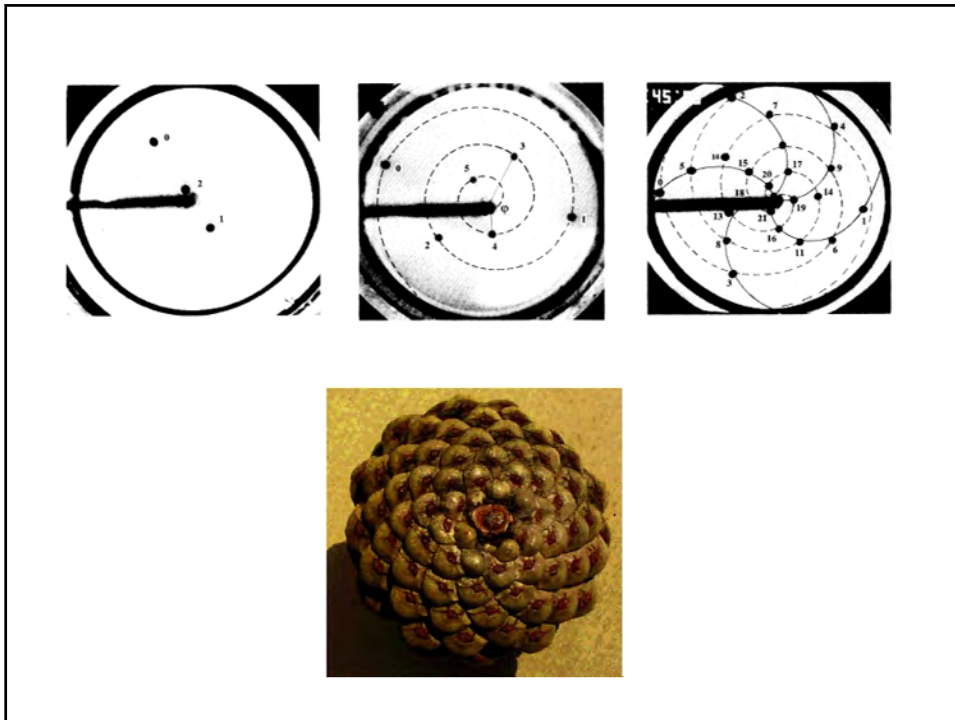
- ・ 磁性流体を真ん中に周期的に落とす
- ・ 磁場の影響で外側に向かって力を受ける
- ・ 磁性流体同士は互いに反発する



http://www.sciencenews.org/view/generic/id/8479/title/Math_Trek__The_Mathematical_Lives_of_Plants より



http://www.sciencenews.org/view/generic/id/8479/title/Math_Trek__The_Mathematical_Lives_of_Plants より



The middle diagram of the three in this section has a red line extending from the center to the arc, labeled with the Greek letter Φ. The other two diagrams are identical to the ones in the top section.

Φ: 黄金角
 円周を黄金比に分けたときの角

ただし、 γ は黄金比

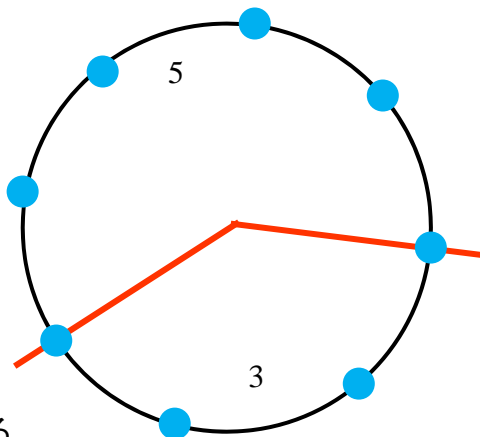
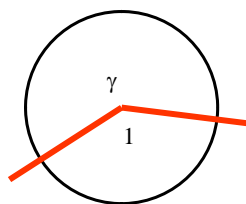
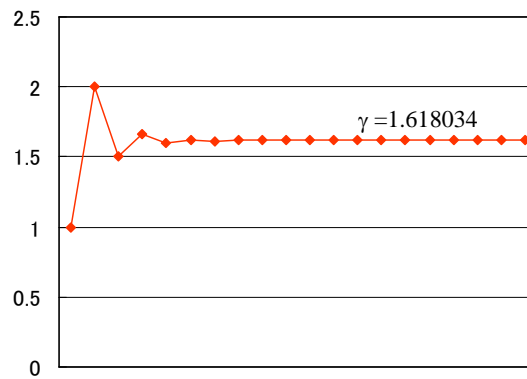
$$\gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

The diagram shows a circle with a red line from the center to the circumference, labeled with the Greek letter γ . The number 1 is written below the line.

フィボナッチ数列と黄金比

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,

$1/1 = 1$
 $2/1 = 2$
 $3/2 = 1.5$
 $5/3 = 1.6667$
 $8/5 = 1.6$
 $13/8 = 1.625$
 $21/13 = 1.61538$
 $34/21 = 1.61905$
 $55/34 = 1.61765$



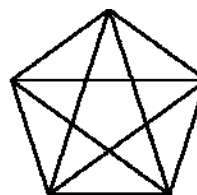
$8 = 3 + 5$

常にフィボナッチ数になる。

- フィボナッチ数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ……

- 黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482045868343656\cdots$

- 正五角形



これらは、自然の中にも芸術の中にも多く登場し、また、互いに深く関係している。

これらの数学的に興味深い性質は、他にも数え切れないほどあり、いまだに研究者の興味をひきつけている。

化学反応でも見られる振動: BZ反応

時間的に色が変わるような化学反応って見たことありますか？

次の5種類の溶液を混合

| | |
|----------------------|--------|
| 1.0 mol/l 臭素酸ナトリウム | 3.0 ml |
| 3.0 mol/l 硫酸水溶液 | 2.0 ml |
| 1.0 mol/l マロン酸水溶液 | 2.0 ml |
| 1.0 mol/l 臭化ナトリウム水溶液 | 0.3 ml |
| 0.025 mol/l フェロイン水溶液 | 0.3 ml |
| 蒸留水 | 2.4 ml |
| <hr/> | |
| 合 計 | 10 ml |

Belousov-Zhabotinsky (BZ)反応の実験

i) 攪拌した系で



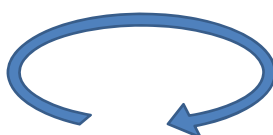
1 cm

振動現象(リズムの発現)

酸化状態



還元状態



マグネチックスターラー
(磁石式の攪拌機)で
混ぜ続けています

ii) 静置した系で

BZ反応溶液を目の細かなろ紙(メンブレンフィルター)にしみこませる

a) 同心円パターン
(Target Pattern)



b) らせんパターン
(Spiral Pattern)



溶液は完全には
混ざり合わず
近くに“しみこんで”
いきます

(4倍速)

3 mm

微分方程式(反応拡散方程式)を使うとパターンも再現できる。

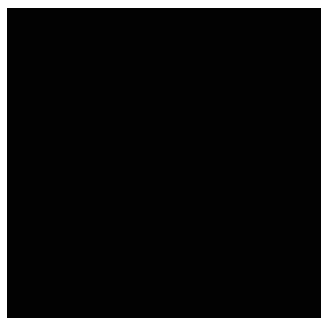
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(U(1-U) - fV \frac{U-q}{U+q} \right) + D_U \nabla^2 U$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = U - V + D_V \nabla^2 V$$

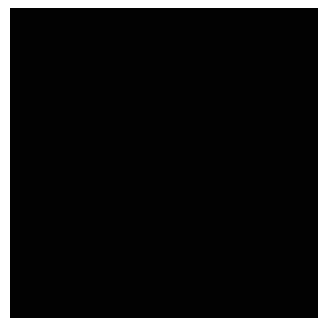
U, V : 化学物質の濃度(時間と位置の関数)

V 大 \rightarrow 青(白)、 V 小 \rightarrow 赤

同心円パターン



らせんパターン



心臓の拍動パターンとBZ反応

正常時

異常時

心臓の上のパターンは
<http://thevirtualheart.org/>
をご覧ください

身近なところに不思議はいっぱい



不思議なことに数学(数式)を使って
アプローチしてみましょう!