

2013.11.16  
第8回JST数学キャラバン  
「拡がりゆく数学」in 尾道

# リズムと模様の数学

千葉大学大学院理学研究科

北畑 裕之

e-mail: kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp

お茶の水女子大学理学部

郡 宏

## 自然界のリズム・パターン



熱帯魚



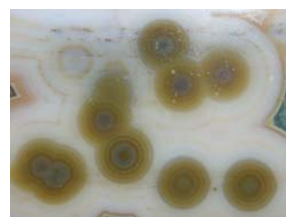
花



雲



砂丘



岩石の断面

## " 鴨川等間隔の法則 "



京都の鴨川

## 時間変化するパターン

### ホタルの発光に見られる波

NHK のテレビより

googleなどで検索するとみられます

## 生態系での個体数のリズム



Hare

野うさぎ

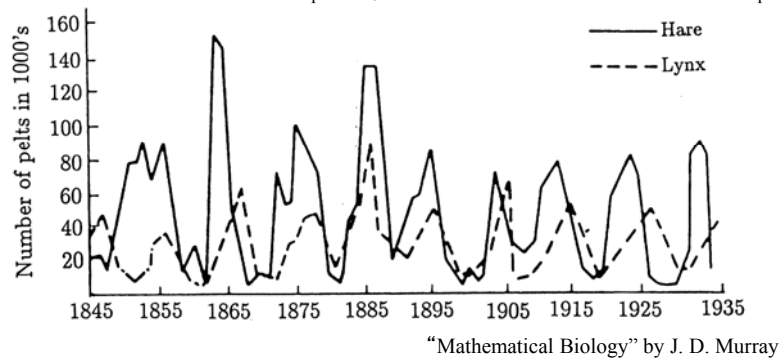
Wikipediaより



Lynx

やまねこ

Wikipediaより



## 数列を使って・・・

ある時間毎の生き物の数:  $a_n$ 

(1月毎のネズミの数など)

1月でネズミの数が2倍になるとすると・・・

1月目2匹だった :  $a_1 = 2$ 2月目は4匹 :  $a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$ 3月目は8匹 :  $a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 4 = 8$ 4月目は16匹 :  $a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 8 = 16$  $n$  月目は?

1月目は2匹だった :  $a_1 = 2$   
 2月目は4匹 :  $a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$   
 3月目は8匹 :  $a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 4 = 8$   
 4月目は16匹 :  $a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 8 = 16$

$$a_{n+1} = 2 a_n$$

このネズミの増え方は

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = 2 a_n \quad \text{ただし、} n \text{ は自然数}$$

という式で書ける。このような式のことを**漸化式**(ぜんかしき)という。(1月後のネズミの数が現在のネズミの数で決まる)

### 仮定1:

生き物は自分自身の数に比例して増える

$$a_{n+1} = k a_n$$

(さきほどは、 $k = 2$  の場合)

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \times 2 (= 4)$$

$$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2 (= 8)$$

$$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2 (= 16)$$

$$a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 2 (= 32)$$

$$a_6 = 2 \times a_5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \times 2 (= 64)$$

$$a_n = 2^{n-1} a_1 \quad (\text{等比数列})$$

$$a_{n+1} = k a_n$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \times 2 (= 4)$$

$$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2 (= 8)$$

$$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2 (= 16)$$

$$a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 2 (= 32)$$

$$a_6 = 2 \times a_5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \times 2 (= 64)$$

---


$$a_2 = k \times a_1$$

$$a_3 = k \times a_2 = k \times k \times a_1 = k^2 \times a_1$$

$$a_4 = k \times a_3 = k \times k \times k \times a_1 = k^3 \times a_1$$

$$a_5 = k \times a_4 = k \times k \times k \times k \times a_1 = k^4 \times a_1$$

$$a_6 = k \times a_5 = k \times k \times k \times k \times k \times a_1 = k^5 \times a_1$$

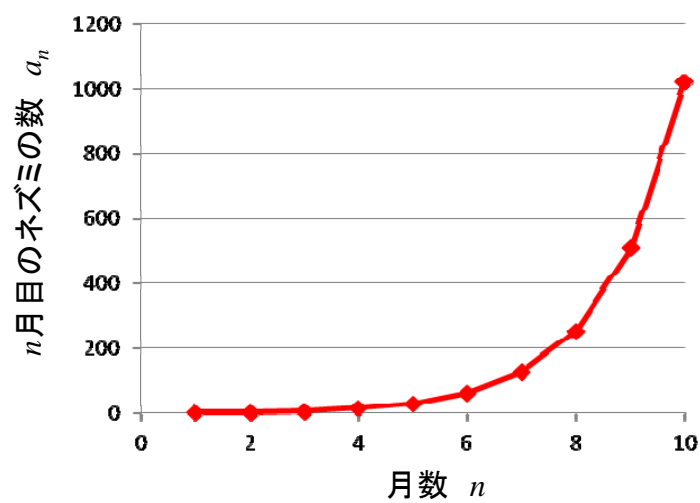
$$a_n = k^{n-1} a_1$$

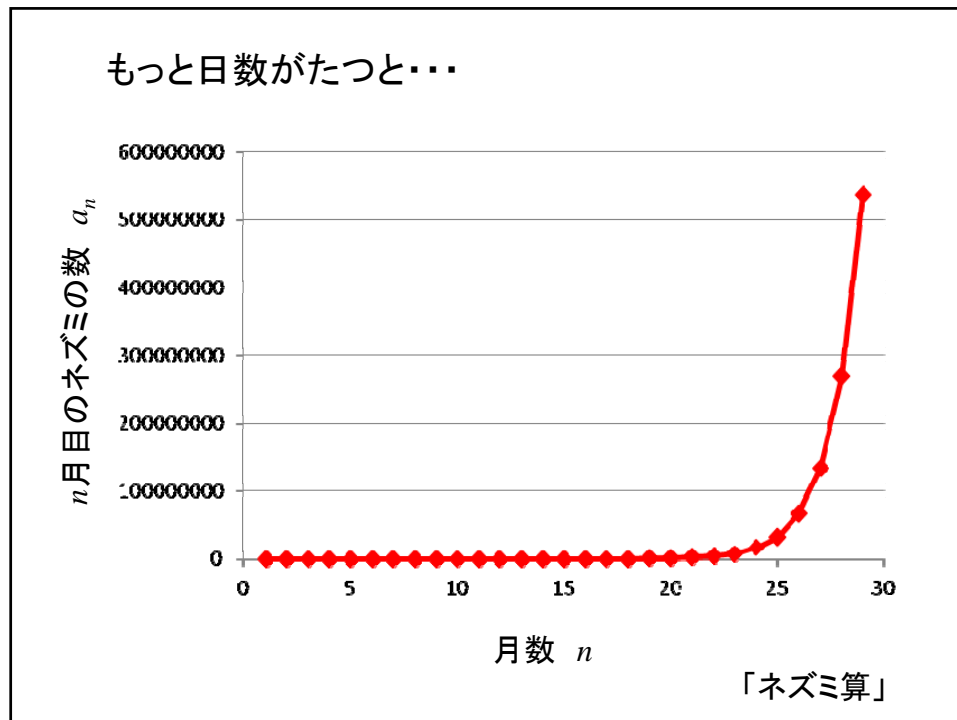
個体数はどんどん増える。

$$k = 2$$

$$a_{n+1} = k a_n$$

$$a_1 = 2$$





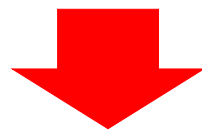
実際には、どんどん増えることはない。

仮定2:

数が増えすぎると増え方が減る

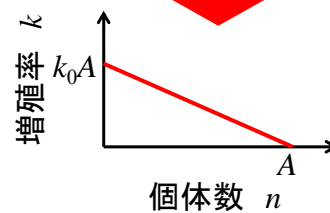
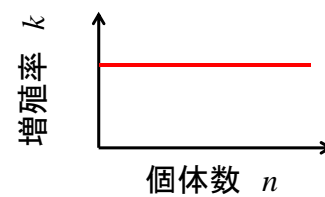
$$a_{n+1} = k a_n$$

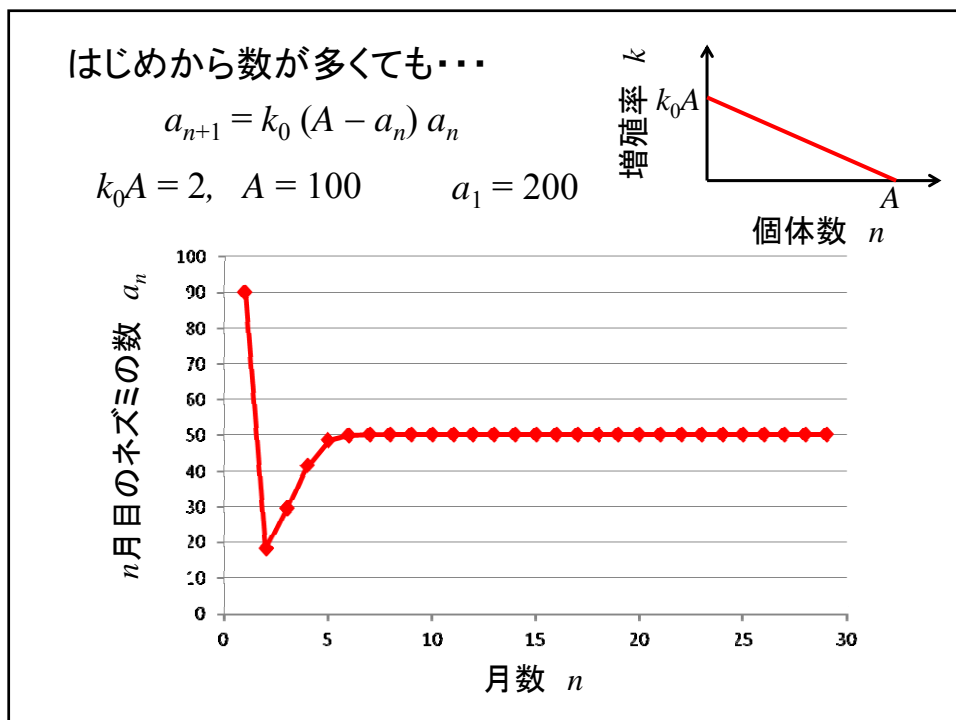
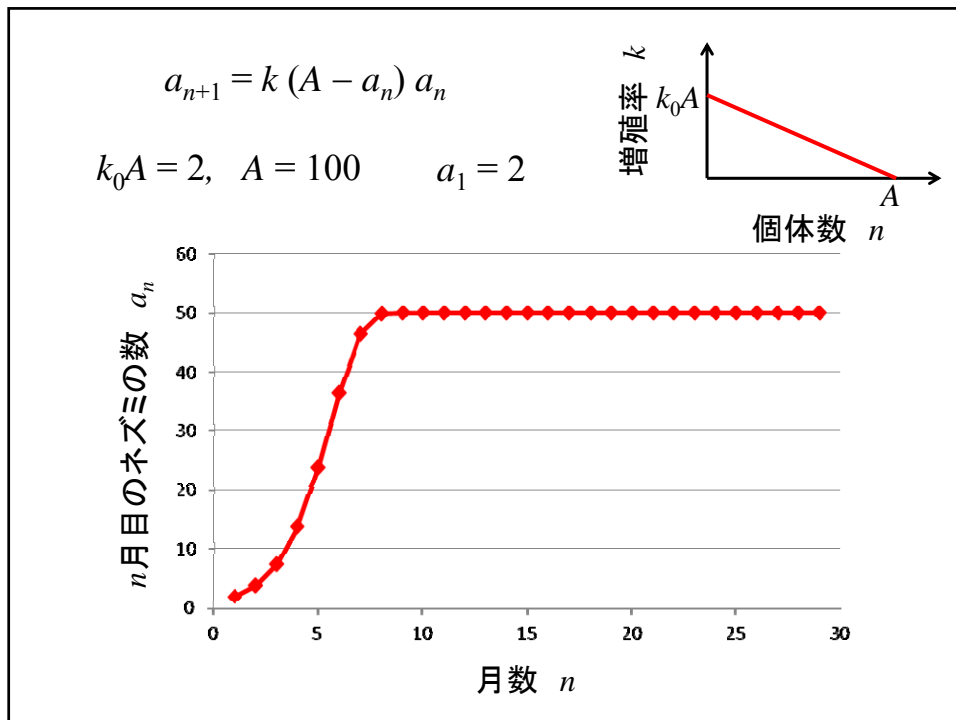
$$k = k_0 (A - a_n)$$

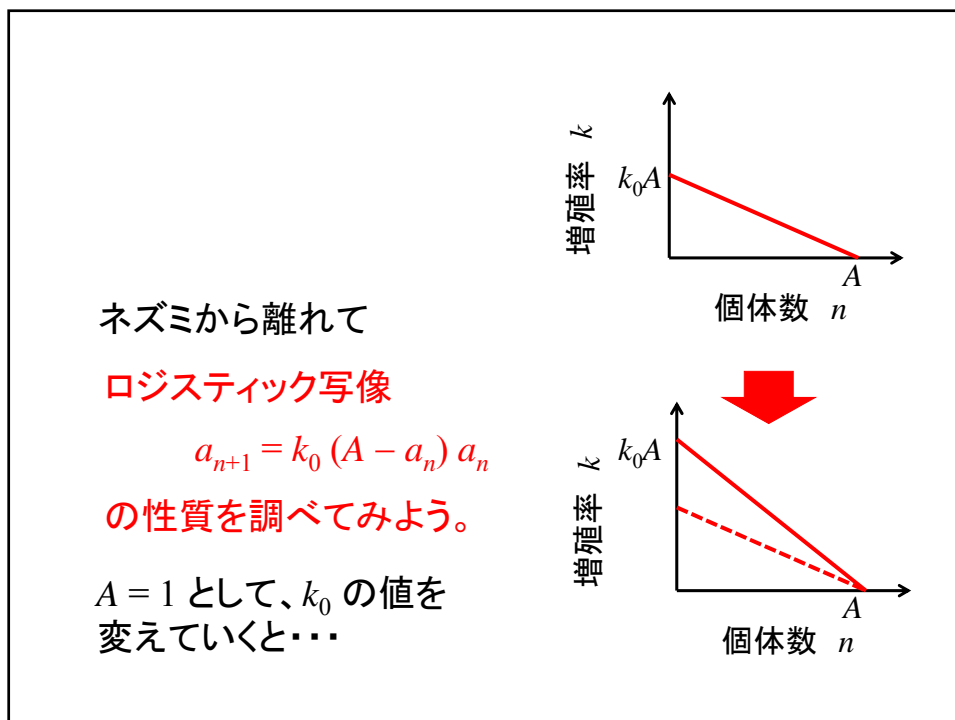
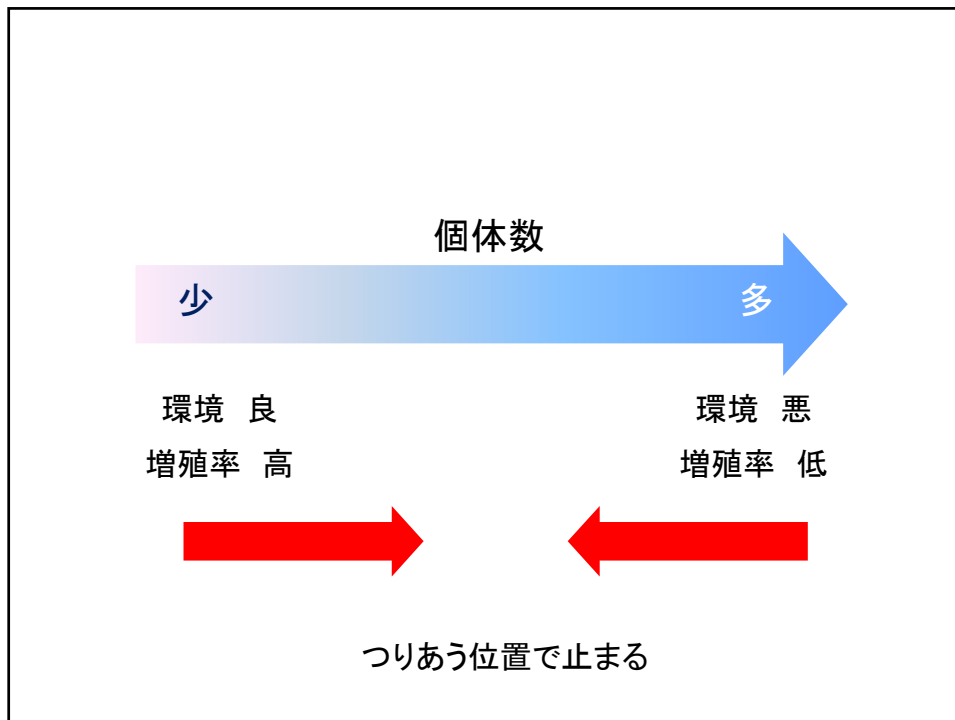


$$a_{n+1} = k_0 (A - a_n) a_n$$

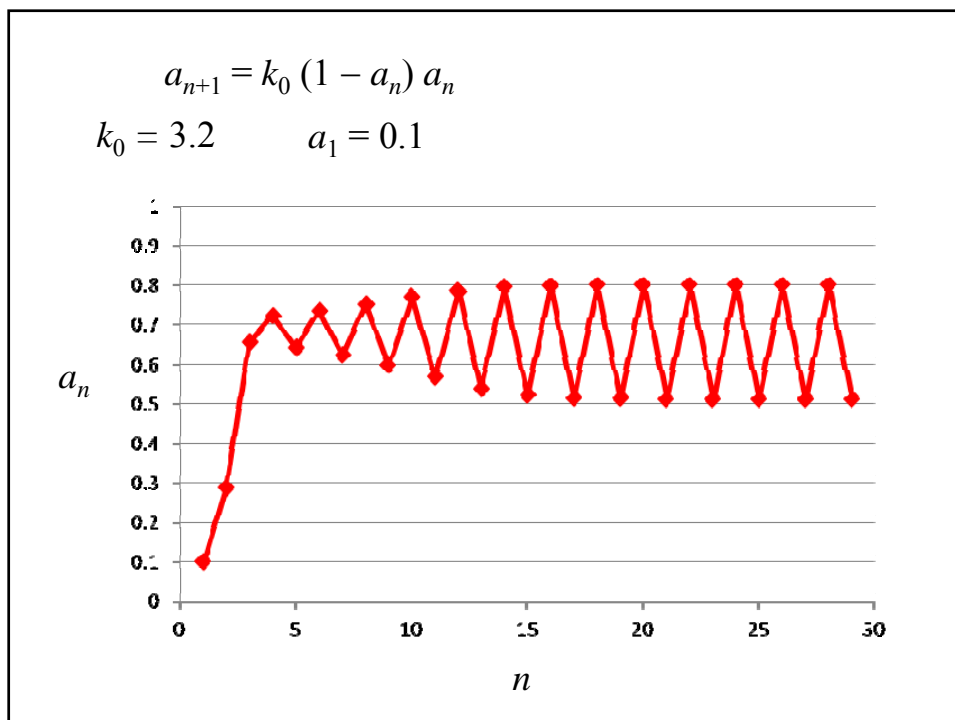
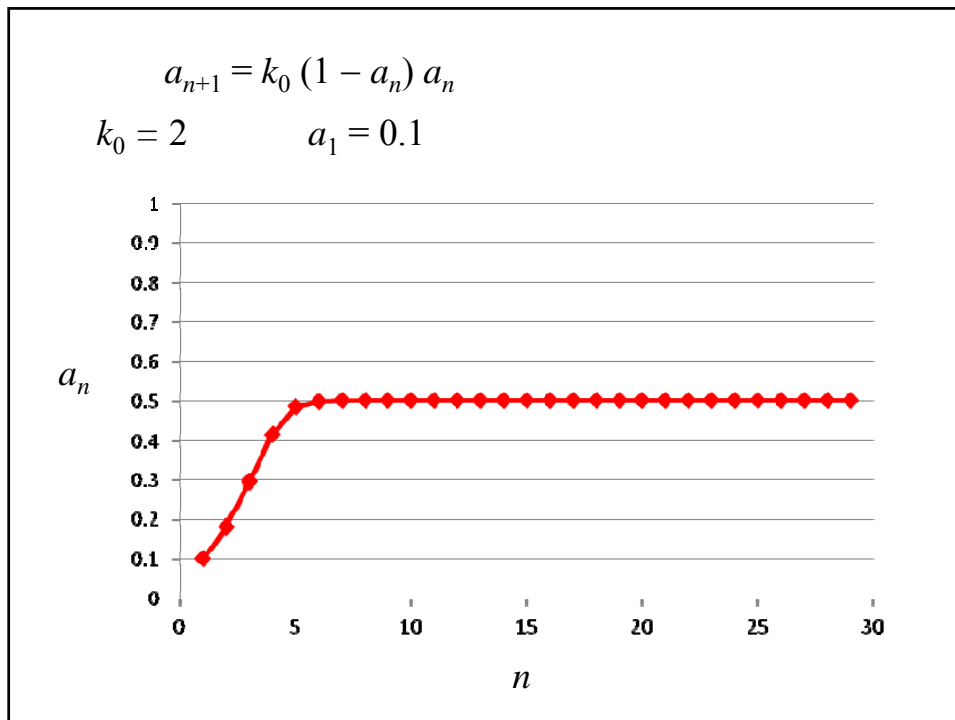
「ロジスティック写像」

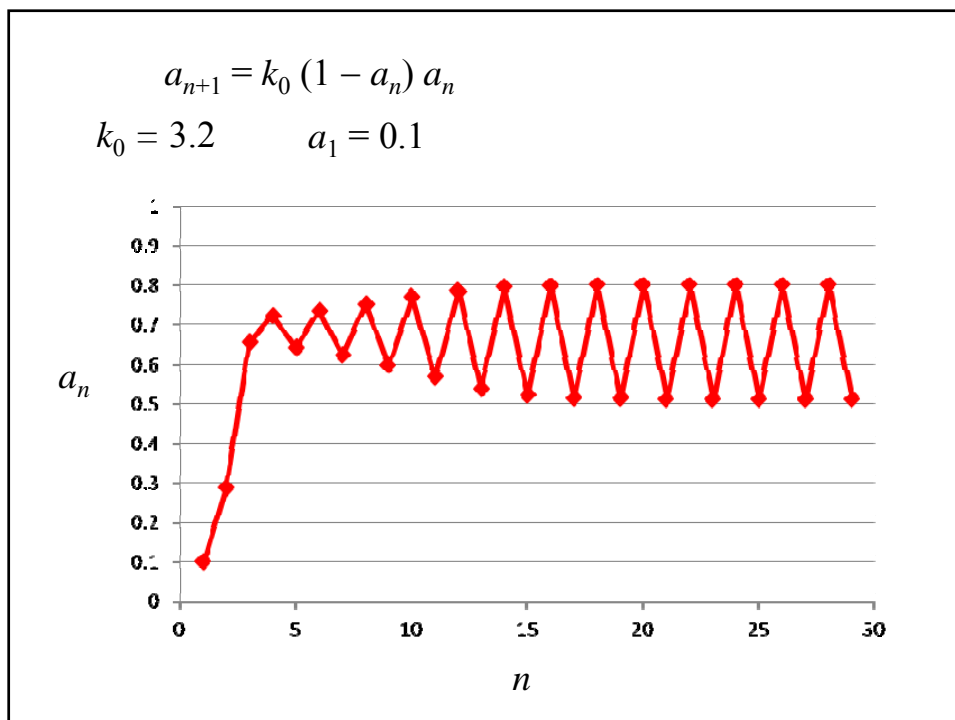
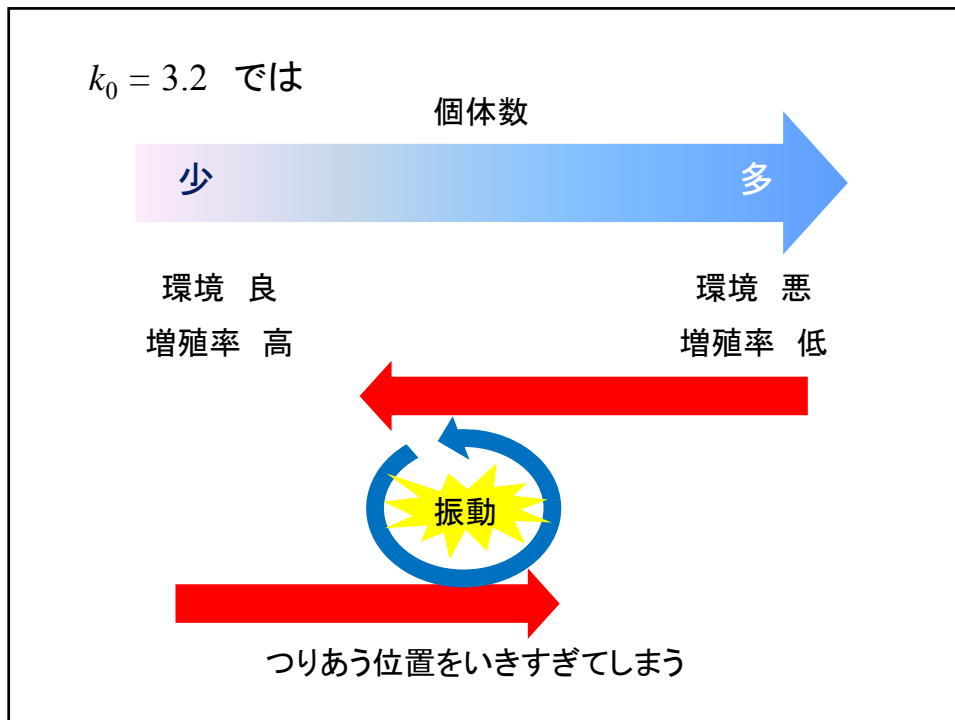


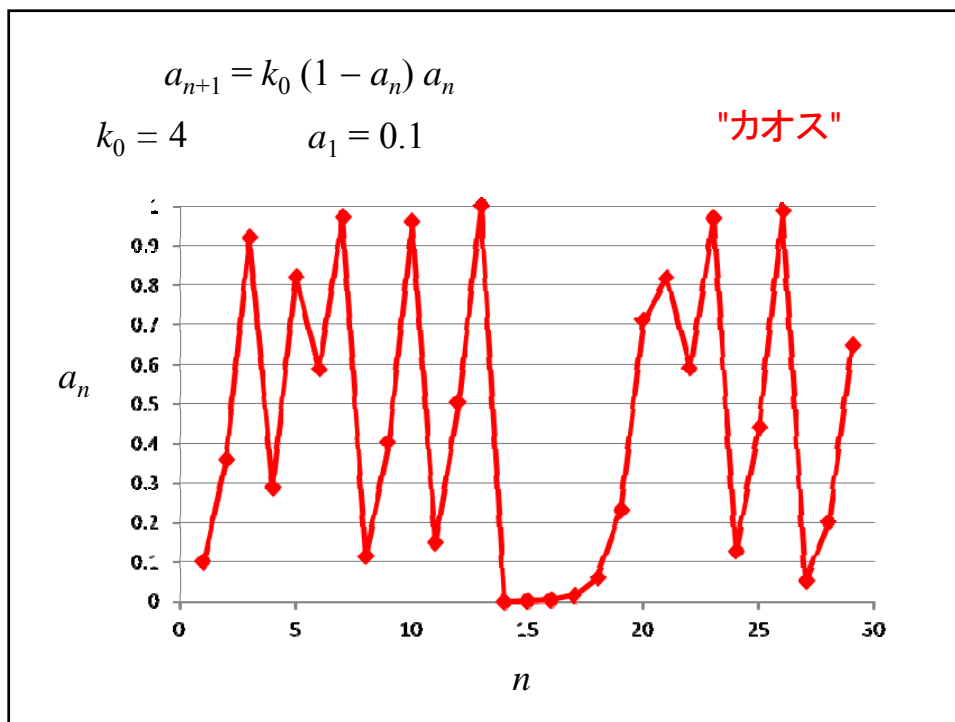
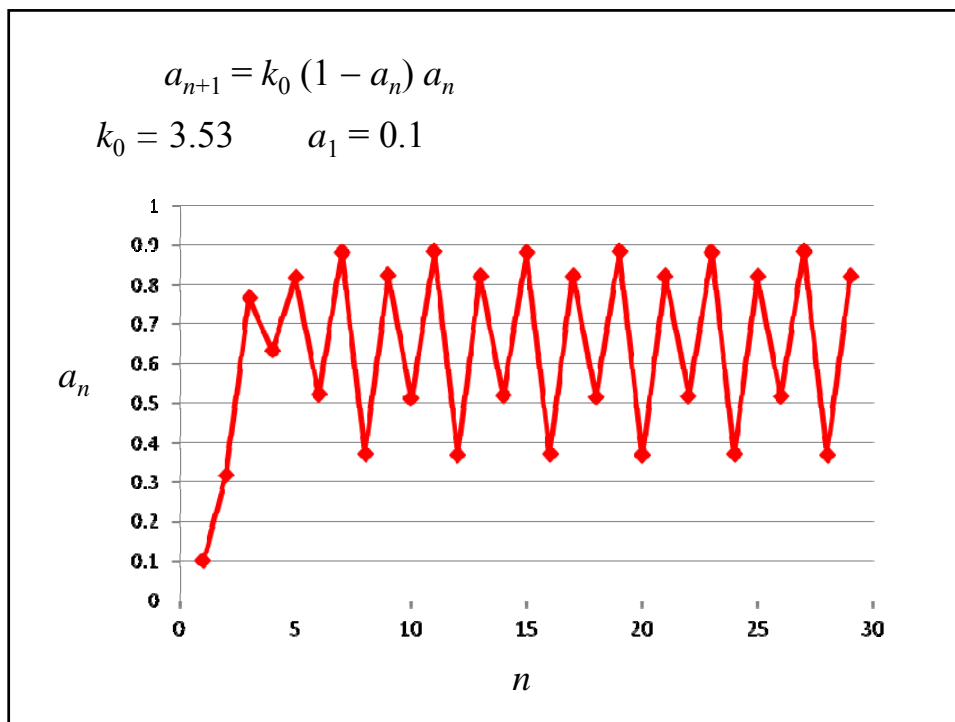


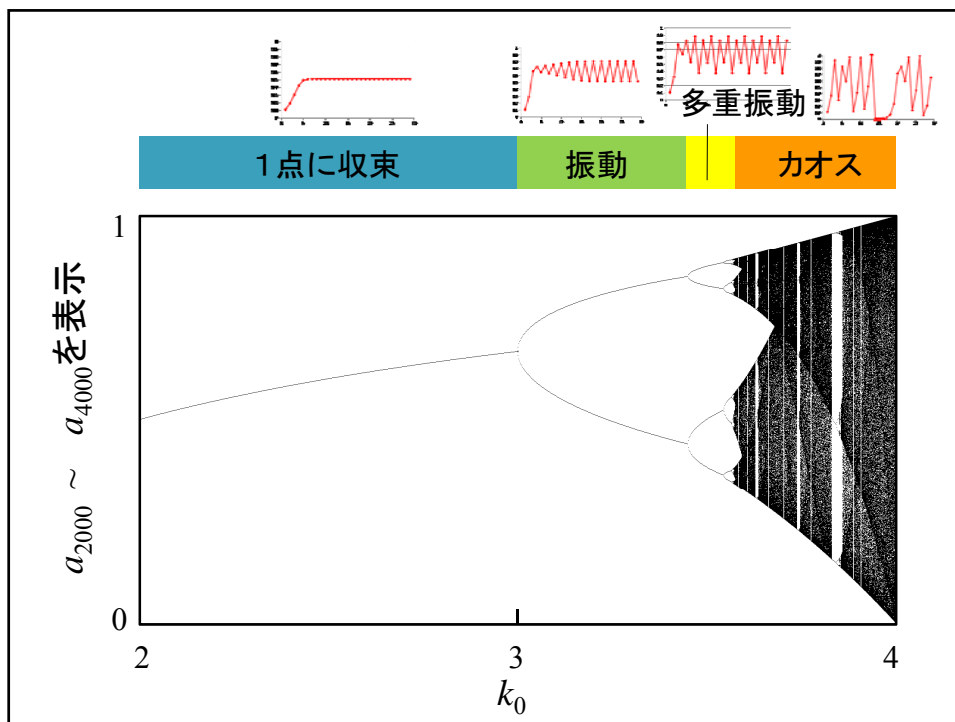












## 化学反応でも見られる振動:BZ反応

時間的に色が変わるような化学反応って見たことありますか？

次の5種類の溶液を混合

1.0 mol/l 臭素酸ナトリウム	3.0 ml
3.0 mol/l 硫酸水溶液	2.0 ml
1.0 mol/l マロン酸水溶液	2.0 ml
1.0 mol/l 臭化ナトリウム水溶液	0.3 ml
0.025 mol/l フェロイン水溶液	0.3 ml
蒸留水	2.4 ml
<hr/>	
合 計	10 ml

## Belousov-Zhabotinsky (BZ)反応の実験

## i) 攪拌した系で



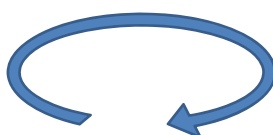
1 cm

## 振動現象(リズムの発現)

酸化状態



還元状態



マグネチックスターラー  
(磁石式の攪拌機)で  
混ぜ続けています

## ii) 静置した系で

BZ反応溶液を目の細かなろ紙(メンブレンフィルター)にしみこませる

a) 同心円パターン  
(Target Pattern)



b) らせんパターン  
(Spiral Pattern)



溶液は完全には  
混ざり合わず  
近くに“しみこんで”  
いきます

(4倍速)

3 mm

微分方程式(反応拡散方程式)を使うとパターンも再現できる。

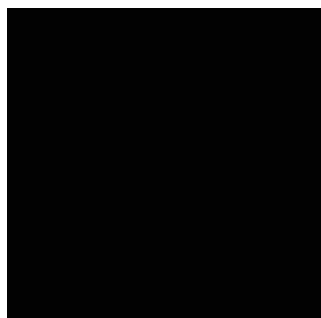
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( U(1-U) - fV \frac{U-q}{U+q} \right) + D_U \nabla^2 U$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = U - V + D_V \nabla^2 V$$

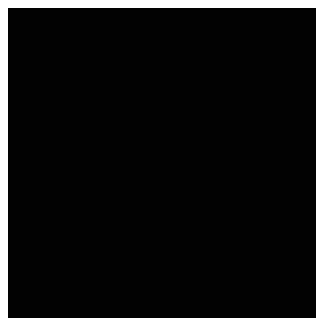
$U, V$  : 化学物質の濃度(時間と位置の関数)

$V$  大  $\rightarrow$  青(白)、  $V$  小  $\rightarrow$  赤

同心円パターン



らせんパターン



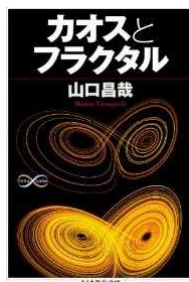
## 心臓の拍動パターンとBZ反応

正常時

異常時

心臓上のパターンは  
<http://thevirtualheart.org/>  
をご覧ください

## より詳しく知りたい人へ



「カオスとフラクタル」  
山口昌哉著（ちくま学芸文庫）

以下の単語でWEBで検索

カオス、ロジスティック写像、  
Belousov-Zhanotinsky反応、BZ反応  
同期現象

身近なところに不思議はいっぱい



不思議なことに数学(数式)を使って  
アプローチしてみましよう！