

拡がりゆく数 ~ 複素数という蕾(つぼみ)

濱野 佐知子

福島大学人間発達文化学類

2013年1月5日(土)

内容

- ① 数の体系
- ② 複素数
- ③ ガウス平面・複素平面
- ④ 代数学の基本定理

§1. 数の体系

色々な数：

- 自然数 (\mathbb{N}): $1, 2, 3, \dots$; $+$, \times , 大小関係
- 整数 (\mathbb{Z}): $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$; $+$, $-$, \times , 大小関係
- 有理数 (\mathbb{Q}): $\frac{m}{n}$ (m, n は整数, $n \neq 0$); $+$, $-$, \times , \div , 大小関係
- 実数 (\mathbb{R}): $x^2 \geq 0$ をみたす数; $+$, $-$, \times , \div , 大小関係
- 複素数 (\mathbb{C}): $+$, $-$, \times , \div

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

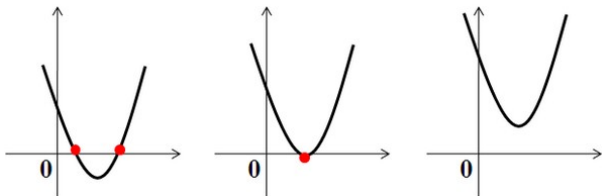
どんどん数の体系を大きくしていった。

どうしてそのような数を考えることになったのか？

実数の範囲で代数方程式を考える.

(1) 1次方程式: $ax + b = 0$, $a \neq 0 \implies x = -\frac{b}{a}$

(2) 2次方程式: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



- ① $b^2 - 4ac > 0 \implies$ 異なる2つの実数解をもつ.
- ② $b^2 - 4ac = 0 \implies$ 1つの実数解をもつ(重解).
- ③ $b^2 - 4ac < 0 \implies$ 実数解はない ($x \in \mathbb{R}$ の範囲では解はない).
実数の2乗は0以上である(数の大小がある).

(3) 3次方程式: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$

- ・ニコロ・フォンタナ・タルタリア (1499 or 1500–1557)
- ・ジェロラモ・カルダーノ (1501–1576)

3次方程式の実数解を求めるために“ $\sqrt{\text{負の実数}}$ ”の導入が必要.

§2. 複素数

$\circ^2 = -1$ となる“数 \circ ”を導入し、それを i と書き、虚数単位とよぶ。

$$\begin{aligned} \text{虚数単位} : i^2 &= -1, \quad i = \sqrt{-1} \\ \text{複素数 } z &= x + iy \in \mathbb{C} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

数の体系を拡大（四則演算はできる．大小関係はない．）

複素数を発展させた人

- ・レオンハルト・オイラー (1707–1783) :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{オイラーの公式}$$

- ・カール・フリードリヒ・ガウス (1777–1855) : ガウス平面・複素平面

2つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ について,

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

- 複素数の四則演算は i を1つの文字とみなして普通の代数計算を行い, $i^2 = -1$ を代入する.

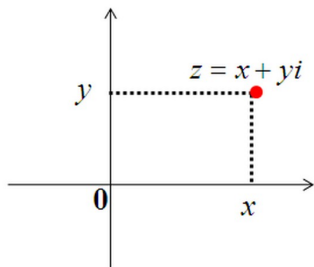
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

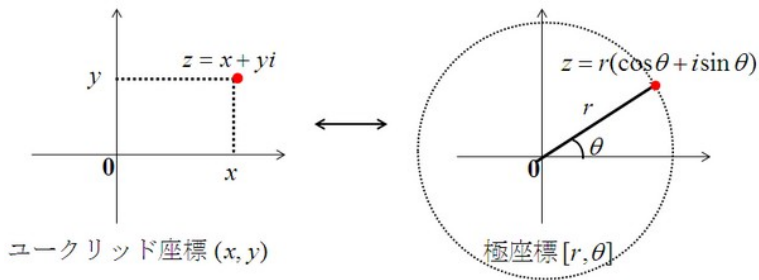
§3. ガウス平面・複素平面

ユークリッド座標 (x, y)

実 2 次元平面の 1 点 (x, y)	\iff	1 つの複素数 $z = x + yi$
x 軸 $(x, 0)$	\iff	実軸 $x = x + 0i$
y 軸 $(0, y)$	\iff	虚軸 $y = 0 + yi$
点 $(0, 0)$	\iff	$0 = 0 + 0i$

点が複素数を表している平面をガウス平面または複素平面という。

ガウス平面・複素平面



$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) : z \text{ の極形式}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \quad : \quad z \text{ の絶対値 (長さ)}$$

$$\arg z = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad : \quad z \text{ の偏角}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ を用いると}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\} \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}. \end{aligned}$$

$$\text{複素数 } (z_1 \cdot z_2) \text{ の長さ: } |z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$$

$$\text{複素数 } (z_1 \cdot z_2) \text{ の偏角: } \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1 (z_2 \neq 0) \text{ を利用すると}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

“人工的” に設けた “虚数単位 i ” が測量等で実用的に利用されてきた加法定理と結びついて、上の事実が示せた。

§4. 代数学の基本定理

問題：複素数の範囲で代数方程式を考えると、解は存在するか？

代数学の基本定理 (Gauss)

任意の複素数を係数とする代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

は、複素数の範囲で必ず解が存在する。

複素数係数の n 次方程式は、重複度を込めて n 個の複素数解をもつ。