2.7.4 意思決定と最適化の数理

（1）研究開発領域の定義

人間が合理的な意思決定を行うための数理的手法の開発。標語的には「意思決定のための最適化と予測」の数理科学である。予測と最適化の基盤・背景となる数理モデル、最適化法、シミュレーション手法、ネットワークモデル、確率モデル、ゲーム理論の一部が含まれる。技術開発の基盤となる理論構築のみならず、実際の現場における応用も目指す。特に本俯瞰では意思決定のための数理モデリングの基盤となる最適化・ゲーム理論を中心として俯瞰する。

（2）キーワード

線形計画法、連続最適化、離散最適化、組合せ最適化、グラフ・ネットワーク、ゲーム理論、計算複雑性理論、半正定値計画法、非線形計画法、機械学習、データ同化

（3）研究開発領域の概要

［本領域の意義］

意思決定の数理が社会に重要性を訴える上で必須のキーワードは「予測と最適化」である。そして、それに加えて概念的に重要なのが、それを背後で支える「数理モデル」である。寄与し得る分野としては、地球温暖化、資源配分、スケジューリング、人員配置、最適輸送、最適設計、マーケティングなどが考えられる。新型コロナへの対応や、地球温暖化への対応のように、人間行動のような曖昧なものと自然科学上の的確な記述を目指すモデルをマッチングしていくということも重要な問題意識である。 20世紀はコンピューターの発達とともに、自然科学や工学において、数理的手法が大きな力を発揮した。21世紀に入り、コンピューターやインターネットが大きく発展し、ビッグデータを利用できるようになり、複雑な現象や不確実性を含んだ人間の行動等を扱うための数理科学を深化させ、展開していくことが重要となっている。したがって、それらの分野でコンピューターとビックデータを用いた数理的手法により「予測と最適化」について人間の要求に耐え得るものが多く生まれたことが本領域の意義である。予測は「データサイエンス」、最適化はいわば「デザインサイエンス」であるが、両者の境界は曖昧でありはっきりとしたものではなく、機械学習等の隣接分野とも強力な連携を図りつつ行われる学際的な研究開発領域である（データサイエンスについては「2.1.6　AI・データ駆動型問題解決」を、最適化については「2.3.4 メカニズムデザイン」を参照）。

歴史的に眺めると、第2次世界大戦後勃興した数理科学の中で、意思決定を念頭に置いた人間行動のモデリングに取り組む分野としては、経済学、ゲーム理論、オペレーションズ・リサーチ（OR）などが挙げられる。特にオペレーションズ・リサーチでは、目的を達成する上で最適な戦略や計画を求めるためのさまざまな手法を研究する。そのために、線形計画法を軸として、連続・離散最適化法や最適化モデル、ネットワークモデル、ゲーム理論や待ち行列モデル、確率モデルの研究が展開され、さらに、これらの研究と、計算機科学、計算科学とが密接にかかわりあい、分野として発展してきた。

意思決定の数理は、「医薬品の効果の判定」や「道路行政の費用便益分析」等の例に見られるように、社会や行政の意思決定システムの一部としてそれなりに機能してきた。これらは「制度化された意思決定の数理科学」ということができる。しかし、インターネット・ビッグデータ・機械学習の興隆に見られる社会の大変革が進む中で、その一部はすでに硬直化して時代にそぐわないものとなりつつあり、抜本的な見直しが必要となっている。具体的には「勘と経験と度胸（KKD）」から「数理モデル＋（KKD）」への変革である。さらに、社会制度や組織運営の文化とのすり合わせが本研究開発領域の研究成果を社会に還元する上で極めて重要である。このような問題意識のもと、本俯瞰ではデザインサイエンスの基礎となる最適化・ゲーム理論と関連する数理モデルを中心として俯瞰する。

［研究開発の動向］

❶ 20世紀の展開

数理科学としての最適化・ゲーム理論の始まりの画期的な契機となったのが、1947年にダンツィークによって創始された線形計画法である。線形計画問題は、多面体（内部を含む）上で線形関数を最小化もしくは最大化する問題である。複雑ではないものの、離散的側面と連続的側面を有し、双対性をはじめとする豊富な数理的構造を持ち、ゲーム理論や経済学につながる幅広い応用領域があり幅広く使われてきた。解法は単体法である。単体法は、制約領域の多面体の稜をたどって最適解を求める解法である。1950年代は線形計画法の確立期であり、連続的・離散的最適化の萌芽期であったと言えよう。その後、1960年代から70年代にかけて、連続最適化分野では、無制約最適化に対する最急降下法・ニュートン法、準ニュートン法、そして制約付き最適化に対する罰金法や乗数法等、非線形最適化の諸手法が、離散的最適化分野では、ネットワーク最適化問題等の研究が大きく進展した。この進展で重要な役割を果たした道具立ての一つは双対理論や凸解析であった。

そして、分野として次の大きな転機は1970年後半に計算機科学における計算複雑度の理論の勃興とともに訪れた。多くの離散的最適化問題が計算複雑度の観点、とりわけ多項式時間解法が存在するか否か？の観点から見直され、P対NP問題と関連づけられ、計算機科学と深い関わりを持つようになった。特に、線形計画問題に対して多項式時間算法が存在するか否かが重要な問題として提起され、これが楕円体法という最初の多項式時間解法（1979年）を経て、内点法という、分野に大きな影響を及ぼした多項式時間解法（1984年）の発見と展開へと続いた。

内点法は、多面体の内部で定義された最適解に向かう中心曲線という曲線をたどって最適解に行く解法である。内点法によって多面体上での凸２次関数最小化問題、凸２次計画問題や半正定値計画問題といった新しい最適化問題が解けるようになり多くの分野で活用された[1),2)]。これらの問題が解けることによって新しいモデルが提案され実用化された効用は見逃せない。特に半正定値計画問題は、線形計画問題の行列への拡張としてさまざまな分野でのモデリング手法として威力を発揮している。例えば、0-1整数計画問題の緩和[3)]やシステムと制御理論[4)]への応用がある。また、内点法をはじめとする最適化問題には、リー群の表現論・調和解析の一つの土台ともなっているジョルダン代数による対称錐の理論が大きな役割を果たしている[5)]。統計理論における行列変数の特殊関数の研究は、このような表現論や非可換調和解析と共有する部分が多くあることからも基礎数学と応用数学との交流地点となり、今後の研究人材育成の重要な位置にもある。

また、連続最適化については、制約条件付き非線形最適化問題を内点法で解くという研究も1990年代に大きく進展した。後述するように、内点法は日本の貢献が大きい分野として挙げられる。一方、離散的最適化では、効率的に解くことができるグラフ上の最適化問題の構造を一般化した抽象的概念であるマトロイドや劣モジュラ関数の研究や、計算困難な問題に対する精度保証がある近似解を効率的に求めるアルゴリズム、あるいは、アルゴリズムの中で乱数を用いることによって解の品質を高めることを目的とする乱択アルゴリズムの研究が進展した。また、実用上重要である整数計画問題について、多面体的アプローチを活用した分岐切除法などが発達し、大規模な巡回セールスマン問題等も厳密に解けるようになった。

❷ 21世紀の展開

以下では連続最適化と離散最適化の観点から、21世紀に入ってからの最適化技術の開発と数理モデリング手法の発展の研究の歴史と動向を述べる。研究の方向性としては「理論的研究」「ソルバーの開発」「社会への応用」という三つが大きな柱となる。

まず連続最適化に関しては、内点法によって多面体上で凸２次関数を最小化する凸２次計画問題が実用化され、その結果として、ポートフォリオ設計の基本モデルである平均分散モデルや機械学習の基本モデルであるサポートベクターマシン（SVM）が実用化された[2)]。1980年代後半から1990年代前半にかけて、ニューラルネットワークの第１次ブームが起こったが、パラメーター最適化が困難であり、その点を克服す

るために、内点法を用いた凸最適化によるモデリングが検討され、これがサポートベクターマシンの導入につながった[6)]。さらにこれが機械学習における解の疎性の重要性の認識へと深化し、2000年代に入り、解の疎性を利用して優れた信号復元を行うために線形計画法を用いる圧縮センシングの理論が高次元幾何学や確率解析等、数理関連分野を巻き込んで大きく進展した[7)]。

一方、ビッグデータの時代に入り、画像処理等データの大規模化により、行列計算を必要とするニュートン法は計算コストが膨大で適用しづらくなり、2000年代の後半より最急降下法が復権した。この文脈で特によく研究されたのが、Nesterovによる最急降下法の加速法とADMM（交互方向乗数法）である[8)]。また、変数の数が膨大で勾配を計算するのが困難であるため、一部の座標のみをランダムに選んで降下方向を構築する確率的アルゴリズムが開発された。ここに述べたアルゴリズムはおおむね凸関数に対するものであり、これらのアルゴリズムの計算複雑度の解析と実用化の研究が2000年代後半から2010年代前半にかけて進展した[8)]。機械学習における連続最適化の重要性は、万人の認めるところであると言ってよい。また、最適設計やデータ同化などの文脈でも連続最適化が重要な役割を果たしている。これらは2次元や3次元のメッシュ上の最適化であり、超大規模問題となり、基本的には最急降下法が用いられる。

離散最適化の研究動向に関して、理論的な研究としては、上でも述べたように効率的に解くことのできる離散最適化問題の数学的構造の研究や、計算困難な問題に対する近似アルゴリズム・乱択アルゴリズムの研究が引き続き進められた。加えて以下でも述べるように、機械学習やゲーム理論といった周辺分野との協働・融合が盛んに行われるようになってきた。

❸ 日本の貢献

離散最適化におけるマトロイドや劣モジュラ関数の研究に関しては、伝統的に日本において盛んに研究されてきた。日本のお家芸と言っても過言ではなく、日本の研究者の貢献が大きい。例えば1970年代においては、二つのマトロイドの最適な共通独立集合を求めるという離散最適化において最も重要な問題の一つに関して、重要な役割を果たしている論文がある[9)]。また近年も、重み付き線形マトロイドパリティ問題に対する多項式時間アルゴリズムという、大きな未解決問題を肯定的に解決した成果がある[10)]。加えて11）、12）のようなこの分野に関する重要な教科書も出版されている。効率的に解くことのできる離散最適化の理論的基盤をなす劣モジュラ関数に関する教科書である参考文献11）の重要性は明らかであり、さらに「離散凸解析」[12)]と呼ばれる理論的枠組みは、経済学的な問題との関連も深く離散最適化以外の分野でも注目されている。

連続最適化の分野では、内点法については、日本の貢献が大きかったと認められる。特に、線形計画問題・半正定値計画問題・2次錐計画問題に対する内点法については、多くのソフトウェアの実装の基礎となった論文が日本人によって書かれており、それらは定番として古典的に引用され続けている（例えば13）、14））。非線形最適化についても同様の貢献がある。また、ソフトウェアとしては、半正定値計画法のためのSDPAや NTT数理システムのNuorium Optimizerは世界的に知られている[15)]。しかし、Nuorium Optimizerは商用ソフトウェアである。そのため、同等の性能を有する優れたフリーソフトを日本で開発し、多くの人たちが自由に使うことができるようになれば、それが世界への大きな貢献となる。

ビッグデータの時代にあっては、最適化アルゴリズムを実際に社会で活用するためにはスパコン等、高性能の計算機を用いた処理は必須である。九州大学マス・フォア・インダストリ研究所や理化学研究所を中心とするグループは、スパコンによる大規模グラフ解析に関する国際的な性能ランキングである「Graph500」において、複数回世界第1位を獲得するなど世界的な活躍を見せている（使用したスパコンは「京」）。

❹ 国際研究集会・ソフトウェア等

連続最適化、離散最適化両方を含む最適化コミュニティーにとって一番大きな研究集会は、3年に1度開

催される、International Symposium on Mathematical Programmingである。連続最適化ではSIAM conference on Optimization、International Conference on Continuous Optimizationも評価が高い。これらのシンポジウムで１名程度は基調講演あるいは準基調講演を日本人が行っている。離散最適化では、Integer Programming and Combinatorial Optimizationが著名である。また、機械学習に関する第１級の国際会議であるNeurIPSの一部として、毎年Optimization for Machine Learningが開催されている。また、2017年にはNeurIPSのサテライト会議として、機械学習における離散構造に関するワークショップDiscrete Structures in Machine Learningが開催された。また離散最適化とゲーム理論、特にマッチングの研究に関しては、その基本となるモデルはGaleとShapleyによって提案され、その後このテーマに関しては経済系の研究者と数学系の研究者の交流が盛んに行われている。マッチングの研究における数学・経済学・計算機科学の交流を目的とする国際ワークショップInternational Workshop on Matching Under Preferencesが定期的に開催されていることも、その証拠の一つであると言える。マッチングの研究に関しては、近年現実問題への応用を見据えた複雑な制約を扱うことのできる理論構築を目指す研究が近年盛んである[16)]。この分野に関するサーベイ論文16）はその著者の１人が日本人であり、また、日本の研究者の成果も引用されており、本分野への日本の貢献度は高いと言える。

またソルバーの開発に関しては、例えば整数計画問題に対するソルバーとしては、商用のものとしてGurobi Optimizer（Gurobi Optimization）やIBM CPLEX Optimizer（IBM）などがある。また日本にもNTTデータ数理システムのような数理科学とコンピューターサイエンスを軸とするソリューションを提供する企業もあり、国際的にも通用するレベルのソフトウェアNuorium Optimizerを提供している[15)]。

ドイツのZuse Institute Berlin（ZIB）は本格的な整数計画法のソルバーの開発を進める一方で、そこからILOGやGurobi等で中心となって働いているメンバーを輩出しており、第１級の研究を進めつつ、産学連携や人材育成を行っている組織として注目される。また日本にも、上述のように、九州大学マス・フォア・インダストリ研究所には「Graph500」で世界第１位を獲得した数理最適化の研究者が在籍しており、企業との共同研究を通じて、社会における技術の応用を目指している。

❺ **社会応用**

多くの研究者を魅了し論文引用回数を誇る華麗な理論的研究論文を執筆することが重要な学問的成果であることは言うまでもないことであるが、その一方で、多くの人たちが解決を必要としている重要な現実問題に真摯に向き合い、学問的方法論を適用し、泥臭いやり方であってもそれを解決して世の中に貢献することは、時としてそれ以上に価値のあることと言えよう。

社会応用という観点から分野の状況を眺めると、例えば、離散最適化のモデル・考え方が保育所入所選考のシステムの開発に応用された事例（プレスリリース17）を参照)、大規模時空間ネットワークを活用して首都圏の朝のラッシュ時の電車混雑の解析を行い、それが実際に大手私鉄の通勤の混雑を軽減するダイヤ編成に活用された事例（中央大学)、そして整数計画法を用いて看護師や介護のスケジューリングを行った事例（成蹊大学・国立情報学研究所）等が、国際的にも十分に通用する優良な活用事例であり、これらのさらなる展開、あるいは新しい活用例が今後も期待されるところである。

［論文や特許の動向］

本領域において、論文数については、中国が顕著に増えていて、2017年以降欧州すら超えている。イランとインドの台頭が目立つ。Top1%、10%についてもおおむね同様である。相対被引用度（CNCI）については、米国や英国、イランが高い値を保っている。欧州としてはそれほど高くない。中国が右肩上がりで、インドは１前後ながら中位で伸びていない。各国間の共著率については、中国は米国との割合が多く、米国は中国１位、欧州２位、インドは米国と欧州の割合が多い。英国は中国と欧州に次いで米国が多い。対して日本は中国との割合が多め。論文数上位機関については、フランスCNRSがトップ。イランが２位と４位にある一方、イン

ドは10位以内に入っていない。中国は6機関が10位以内に入っている。

特許については、中国が特許ファミリー件数のシェアを拡大しており、特許価値指標（Pantent.Asset.Index）のシェアも2017年に米国を超えている。米国は相対的にシェアを落としている。イスラエルは特許ファミリー件数のシェアは10位以内ではないが、特許価値指標のシェアは10位以内である。

（4）注目動向

［新展開・技術トピックス］

2010年代に入り、連続最適化の分野では、半正定値計画問題のモデリング・数理・アルゴリズム、機械学習分野での適用を意識した１次法を中心とする超大規模問題の解法、確率的最適化の研究が引き続き続いている一方で、多変数多項式の等式/不等式条件下で多変数多項式の目的関数の最適化を行う多項式計画問題、非線形半正定値計画問題といった新しい問題の研究が進められている。計算複雑度を意識した非凸問題の解析が進められているのが一つの特徴である。

線形計画問題については、強多項式解法が存在するか否かという大きな未解決問題がある。最近、この問題に対して、連続最適化の立場と離散的最適化の立場を融合するような形で、実代数幾何、トロピカル幾何や情報幾何を用いた新しい流れの研究が進展しつつあり、注目されるところである。例えば、限量子消去（Quantifier Elimination）[18) とグレプナ基底がベースとなったものがある[19)。

離散最適化に関する新展開・技術トピックとしては、まず連続最適化と離散最適化の技術の融合が一つの注目すべきトピックとして挙げられる。連続最適化と離散最適化は、線形計画法を共通のルーツとして持ち、互いに密接に関係している。近年は、内点法のような連続最適化手法を用いてネットワーク計画問題等の計算複雑度を改善する優れたアルゴリズムを構築する方向での研究が盛んに行われている。上述した線形計画問題の研究の新展開もその流れに位置付けられる。この潮流を反映した凸最適化の教科書も近年出版されている[20)。またゲーム理論の均衡の概念と離散アルゴリズムの接近により、不動点定理の計算量理論的研究が発展していることも注目に値する。純粋数学的な観点から不動点定理やゲームの均衡を眺めると、その存在性が最も重要なトピックとなる。しかし、アルゴリズムの観点からこれらの概念を眺めると、その存在性のみならず実際に解を「計算」することが重要な問題となる。この不動点定理やゲームの均衡の計算に関する研究の流れは、Papadimitriouによって1994年に始められたのだが、近年も多くの発展が得られている。

離散最適化の技術面での新展開としては、例えば以下の三つが挙げられる。一つ目は前節でも触れた、重み付き線形マトロイドパリティ問題に対する多項式時間アルゴリズムである。この結果は計算機科学の第１級国際会議として知られるAnnual ACM Symposium on the Theory of Computingの2017年最優秀論文の一つに選ばれている。二つ目はCutting Plane Methodの改良に関する論文である[21)。この論文の成果は、組合せ最適化アルゴリズムのデザインや計算複雑度評価に広く影響を与えた点で重要な論文である。三つ目は、22）、6）で得られたTSP多面体とマッチング多面体に対する拡張定式化のサイズの下界に関する結果である。離散最適化問題を解く際に、対応する多面体を考える手法は一般的なものであり、この手法に関する重要な限界を示した。

数学の分野において重要な賞の一つであるAbel Prizeが2021年に離散数学と理論計算機科学に対する基礎的な貢献によりLászló LovászとAvi Wigdersonに与えられたことや、Nevanlinna Prize（現IMU Abacus Medal）が2018年にゲーム理論における均衡の計算等への貢献によりConstantinos Daskalakisに与えられたことは、数学の分野においても離散最適化やアルゴリズムの研究に対する一定の評価があることと示唆していていると言える。さらに2012年にAlvin E. RothとLloyd S. Shapleyが安定マッチングに対する業績でNobel Memorial Prize in Economic Sciences（ノーベル経済学賞）を受賞したことは、経済系の研究者と数学系の研究者の交流が盛んに行われているマッチングの研究の分野において重要な出来事であった。

受賞という点では、Mathematical Optimization Society（MOS）とAmerican Mathematical

Society（AMS）が共催し、離散数学の分野で優れた論文に贈られる賞であるFulkerson Prizeが、2021年にグラフの連結度を計算するアルゴリズム[23)] に関して河原林健一氏に贈られたことは日本の存在感を示している。（過去には2003年に岩田覚氏と藤重悟氏が劣モジュラ関数最小化に関する業績[24)] でFulkerson Prizeを受賞している。）

［注目すべき国内外のプロジェクト］

❶ 国内

日本の数理最適化の研究は大学等における理論的研究が中心となっているが、近年、大学と企業の協働による数理最適化の社会への応用を目指したプロジェクトがいくつかある。例えば以下のものが挙げられる（終了したものも含む）。

・富士通ソーシャル数理共同研究部門（九州大学、2014-2017）
富士通株式会社、株式会社富士通研究所（当時）、九州大学マス・フォア・インダストリ研究所による、数理最適化等の数理技術の社会への応用を目指した共同研究部門。

・数理最適化寄附講座（大阪大学）
大阪大学大学院情報科学研究科が、株式会社ブレインパッドほかから寄付を受け設立。産学連携と研究開発を主な活動として、数理最適化技術のビジネス実装への貢献と基盤技術の開発に取り組んでいくことを目的としている。

また、経済学系のプロジェクトではあるが、その中に離散最適化の研究者も参加しているプロジェクトとして、以下のものが挙げられる。

・東京マーケットデザインセンター（東京大学）

配送計画やスケジューリングといった離散最適化問題は、長年企業等において活用されてきている。特に以下のような配送計画に関する新しい企業が出てきていることは注目に値する。

・株式会社オプティマインド

さらに富士通株式会社、日立製作所、NECといった企業でも離散最適化の技術は注目されている。

連続最適化に関しては、東京大学、京都大学等、慶應義塾大学、東京理科大学、統計数理研究所等に拠点的研究室が存在して、研究成果を発信している。機械学習の関連では、理化学研究所革新知能統合研究センターに数理最適化研究部門が存在する。民間企業では、NTTデータ数理システムが、国際的にも通用するレベルでの連続最適化ソフトウェアを開発している。また（株）構造計画研究所はオペレーションズ・リサーチや最適化分野に強いシンクタンクである。

❷ 国外

国外においては、例えば以下のようなマッチングの理論の社会的課題への応用を目指したプロジェクトがある。

・Matching Systems for Refugees（University of Oxford、UK）
・European Network for Collaboration on Kidney Exchange Programmes（2016-2020）

またドイツのZuse Institute Berlin（ZIB）は、産学連携や人材育成に成果を上げている。米国においては中国のAlibabaによって設立された、基礎科学に関する組織であるDAMO Academyが非常に注目に値する。例えば、連続最適化の分野において重要な研究者の１人であるWotao YinがDAMO AcademyのDecision Intelligence LabのDirectorを務めている点も注目に値する。

新型コロナウイルス感染症の流行が始まって以来、リモートによる共同研究・研究交流が国内外問わず、日常的となった。最適化分野でも2020年４月から2022年４月にかけて、オーストリアUniversity of Viennaが幹事となって１週間に１度程度One World Optimization Seminarというセミナーが開催され、連続最適化を中心に、世界の第一線で活躍する研究者の研究成果が配信された（日本からの講演者は１名）。

（5）科学技術的課題

本研究領域では「モデリング・数理・アルゴリズム」の三分野に跨るもしくは行き来する形で総合的に研究を進めていくことが重要である。そのような視点から、いくつかの研究課題を挙げる。

❶ モデリングのための統合環境の開発

意思決定と最適化の数理はいわばデザインサイエンスである。デザインサイエンスと対をなすとも言えるデータサイエンスの分野においては、R や Python などの、研究者コミュニティーが最新の成果を利用者に使える形で発表し、利用者はそれを無料で利用できる統計モデル/機械モデル開発プラットフォームが基本的インフラとしてその発展に重要な役割を果たしている。デザインサイエンスにおいてはいまだに同様のモデル開発用プラットフォームが存在しているとは言えない。さまざまな要素的な最適化モデルを組み合わせて解析したい問題のモデルを作成し、解析を進めるための優れたインターフェースを有するフリーのプラットフォームを開発していくことが数理科学の成果を社会に還元する上で重要な役割を果たす。

❷ 線形計画法・凸2次計画問題・半正定値計画問題のアルゴリズム開発、理論的解析、応用と優れたソフトウェアの構築

線形計画問題や半正定値計画問題は豊富な数理的構造を持ち、それゆえに、規範的最適化問題として、多くの現実問題が帰着できるという点で最強の凸最適化問題である。最適化分野のみならず計算数理分野で国際的に通用するレベルの研究をわが国で行っていくためには、この部分が充実していることが必須である。主双対内点法をはじめとして、研究の蓄積もある。

❸ 小・中規模の大域的最適化問題の厳密解法の開発

大規模とは言えないまでも、工学やデータサイエンス等に表れる、非常に多くの最適化問題は、数変数から20変数程度である。これらの問題を自動的に解く技術の研究は興味深い。

❹ 機械学習やデータサイエンスに表れる超大規模最適化問題のアルゴリズムの開発

この問題の重要性は言うまでもない。現状必ずしもわが国の大きな貢献があるとまでは言えないまでも、強化していくべき分野であると考えられる。

❺ 整数計画問題の優れたソフトウェアの開発

特に気軽に安価で使用することのできるソルバーを構築することは企業等での整数計画問題の活用に関して非常に重要である。実際に問題を解くことはソルバーに任せることができれば、ユーザーは課題の数理モデル化に集中することができる。

❻ ナーススケジューリングをはじめとする、さまざまなスケジューリングや人員配置のモデルとアルゴリズムの研究

人口減少と高齢化が進む日本社会においては、より少ない人員で効率的に社会活動を行うことは、重要な課題である。そこに大きく寄与できるのが、このスケジューリングや人員配置の数理モデルである。数理モデルに基づいて、手軽に利用できるアプリのような形で、社会のいろいろな場面で起こるスケジューリングや人員配置問題を手軽に解決できるようなプラットフォームを実現できれば、社会に対する大きなインパクトを与え得る。

❼ 離散最適化の活用を促すための Python 等のライブラリーの開発

機械学習が社会に普及した理由の一つにPythonのライブラリー等で気軽に使うことができるようになったことが挙げられる。離散最適化がさらに社会で普及浸透するためには、このようにPythonのライブラ

リー等を整備し、取りあえず使ってみようと思える環境を整える必要がある。しかし、現実の課題を離散最適化として定式化することが職人芸のようなところもあり、同時に数理モデル化に関しても何かしらの対策をする必要がある。

意思決定の数理は現実を解析してモデルを作成し、最適化する、という点でデータサイエンスとデザインサイエンスの両方の視点が必要であり、そのシームレスな結合が鍵となる。その意味では、機械学習やデータサイエンスとも柔軟に連携した分野横断的な研究文化の醸成が重要であろう。また、アルゴリズムを実装する部分を強化する必要がある。

（6）その他の課題

意思決定と最適化の数理は、それを社会が問題解決に有効な手段であると正しく認識しない限りは、適用場面は極めて限定されたものとなる。意思決定と最適化の数理が適用される場面は、しばしば、不確実性が高く、しかも再現実験が不可能であるようなことが多い。そのため、科学的手法の適用と検証の積み重ねによって、その有用性を示していくことは困難であり、実際その舞台にすら上がることができていない。それは、新型コロナウイルス感染症への対応において、意思決定や統計、最適化の数理の出番がほとんどなかったことに象徴的に表れている。意思決定の数理は適用対象が限定されないヨコ型の手法であり、また、複雑な対象に対するものである点に（ゆえに、その適用には困難さがあることに）、常に留意し、数理系の研究者は、社会にその意義と有用性を発信していくべきであろう。意思決定の数理に対する社会的合意や制度的基盤に関して日本は米国と比較して脆弱であり、大いに改善の余地がある。意思決定の数理は人間の行動に関係しているだけに、制度との関わりは深い。数理モデルや手法の有効性を社会にどのような形でアピールし、制度にどのような形で取り入れていくか、といった出口戦略が重要であろう。

今後数理技術を用いた意思決定が社会に受け入れられるためには、技術の有益性の社会への啓蒙に加え、さらに数理技術を使える・受け入れることができる人材育成が重要である。この点において、大学等の教育機関が果たす役割は非常に大きいと言える。一番重要なのは、大学における数学を英語と同様に社会人となってから必要とされる必須の素養として位置付け「リベラルアートとしての数学・数理」を万人に導入すべく、大学でのカリキュラムを再編成することであろう。その際には、教えるべき数学は「道具としての数学」あるいは「世の中の仕組みを記述する言語としての数学」であることを意識することが望ましい。これは、データサイエンス時代である現代では必須と言えよう。

より専門的な人材の育成について言えば、九州大学では「九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラム」において、「卓越社会人博士課程制度」という制度を実施している。それは修士の学生が修了後、企業に採用され、同時に社会人として博士後期課程に進学するという制度である。また、「社会の課題に数理技術を応用することを学ぶ」ということに関しては、九州大学、東京大学等により「Study Group Workshop（SGW）」という取り組みが2010年から行われている。この SGW は、産業・自治体・病院などのさまざまな分野から問題提供者を募り、それぞれが抱える問題で数学を使えば解決に至ると期待できるものを、数学の研究者・学生に対して紹介・解説してもらい、おおむね一週間の会期中、協力して解決を目指すworkshop である。2022年のSGWは九州大学、東京大学、金沢大学によって組織された。また、東北大学でも「g-RIPS」という取り組みが実施されている。

線形計画問題は最適化のみならず、計算数理や計算機科学にとって基本的な問題である。主双対内点法をはじめとして内点法について日本発の業績があり、研究の蓄積もあるため、このような本格的な問題に実力のある若い研究者が挑戦できるような環境と文化を国内に用意することは重要である。また離散最適化の理論に関しては、毎年RIMS共同研究「組合せ最適化セミナー」というセミナーが実施されており、近年、連続最適化についても同様のセミナーが開始された。このような学生から若手研究者の育成に有益なイベントを実施することは、今後の人材育成という点では非常に重要であると言える。

最後に、意思決定の数理と数学とのより深い連携、具体的には確率計画問題や半正定値計画問題や多項式計画法、機械学習における確率的降下法、対称性を有する大規模問題の解法などの解析においては、確率解析、代数幾何、群論・群の表現論などが本格的に活用され、使われている数学的技法も高度化し、より本格的な数学との接点が広がりつつある。このような立場から、意思決定の数理や最適化の研究者と数学諸分野の研究者の協働を実施することは重要なプロジェクトとなり得る。

（7）国際比較

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	○	↗	離散最適化に関して、マトロイドや劣モジュラ関数といった分野においては、伝統的に研究者が比較的多い。また、マッチングの研究に関しても、日本の研究者が貢献をしている。連続最適化では線形計画法や半正定値計画法等に対する内点法や数理的解析、アルゴリズムの研究で国際的に通用する成果を挙げてきている。
	応用研究・開発	○	↗	離散最適化に関して、理論的な研究が中心ではあるが、近年は大学と企業の共同による社会への技術の応用の取り組みが見られる。また、企業においても離散最適化問題への注目が増している。連続最適化は機械学習では必須の技術であり、データ同化、最適設計等の分野でも特に注目されている。
米国	基礎研究	◎	↗	研究者の層が非常に厚い。また、例えば理論計算機科学と経済学といったように分野間の交流も盛んである。
	応用研究・開発	◎	↗	研究者が起業するなど基礎研究と応用の交流は非常に活発である。DAMO Academyのような組織がある。
欧州	基礎研究	◎	↗	離散最適化の基礎理論に関しては、ハンガリーを代表として非常に盛んである。また、離散最適化とゲーム理論の融合に関しては、ドイツや英国を中心に盛んである。連続最適化も一定の水準を保っている。
	応用研究・開発	◎	↗	例えば英国等においてマッチングの社会への応用を目指すプロジェクトがある。またドイツのZuse Institute Berlin（ZIB）は、産学連携や人材育成の面で重要な役割を果たしている。
中国	基礎研究	○	↗	例えば清華大学にInstitute for Interdisciplinary Information Sciencesが作られたように、基礎理論に関する人材育成が盛んである。また、現在は中国外にあるが、Alibabaによって創設され、中国系研究者を多く擁するDAMO Academy（所在地：米国カリフォルニアやシアトル等）が今後大きな影響を与えると予想される。
	応用研究・開発	○	↗	深圳に存在する、香港中文大学深圳ビッグデータ研究センターと香港中文大学-TencentAI・機械学習研究所では、連続最適化と信号処理で著名な研究者であるZhi-Quan Luo（元University of Minnesota教授）が副所長および所長を務め活発に最適化の応用研究を進めている。
韓国	基礎研究	△	→	最適化に関して、研究者はいるが多いとは言えない。
	応用研究・開発	△	→	目立った成果は見られない。

（註1）フェーズ

基礎研究：大学・国研などでの基礎研究の範囲

応用研究・開発：技術開発（プロトタイプの開発含む）の範囲

（註2）現状　※日本の現状を基準にした評価ではなく、CRDS の調査・見解による評価

◎：特に顕著な活動・成果が見えている　　○：顕著な活動・成果が見えている

△：顕著な活動・成果が見えていない　　×：特筆すべき活動・成果が見えていない

（註3）トレンド　※ここ１～２年の研究開発水準の変化

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

参考文献

1）Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii, *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Studies in Applied and Numerical Mathematics* (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994)., https://doi.org/10.1137/1.9781611970791.

2）Stephen Boyd and Lieven Vanderberghe, *Convex Optimization* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004)., https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441.

3）László Lovász and Alexander Schrijver, "Cones of Matrices and Set-Functions and 0-1 Optimization," *SIAM Journal on Optimization* 1, no. 2 (1991) : 166-190., https://doi.org/10.1137/0801013.

4）Stephen Boyd, et al., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied and Numerical Mathematics (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994)., https://doi.org/10.1137/1.9781611970777.

5）Jacques Faraut and Adam Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Mathematical Monographs (Oxford: Clarendon Press, 1994).

6）Thomas Rothvoss, "The Matching Polytope has Exponential Extension Complexity," *Journal of the ACM* 64, no. 6 (2017) : 41., https://doi.org/10.1145/3127497.

7）Simon Foucart and Holger Rauhut, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*, Applied and Numerical Harmonic Analysis (New York: Birkhäuser, 2013)., https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4948-7.

8）Amir Beck, *First Order Methods in Optimization*, MOS-SIAM Series on Optimization (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017)., https://doi.org/10.1137/1.9781611974997.

9）Masao Iri and Nobuaki Tomizawa, "An algorithm for finding an optimal "independent assignment,"" *Journal of the Operations Research Society of Japan* 19, no. 1 (1976) : 32-57., https://doi.org/10.15807/jorsj.19.32.

10）Satoru Iwata and Yusuke Kobayashi, "A Weighted Linear Matroid Parity Algorithm," *SIAM Journal on Computing* 51, no. 2 (2022) : STOC17-238-STOC17-280., https://doi.org/10.1137/17M1141709.

11）Satoru Fujishige, *Submodular Functions and Optimization*, 2nd ed., Annals of Discrete Mathematics 58 (Elsevier Science, 2005).

12）Kazuo Murota, *Discrete Convex Analysis, Discrete Mathematics and Applications* (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003).

13）Masakazu Kojima, Shinji Mizuno, and Akiko Yoshise, "A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming," in *Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods*, ed. Nimrod Megiddo (New York: Springer-Verlag, 1989), 29-47., https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9617-8_2.

14）Kunio Tanabe, "Centered newton method for mathematical programming," in *System Modelling and Optimization*, eds. Masao Iri and Keiji Yajima, Lecture Notes in Control and Information Sciences 113 (Berlin, Heidelberg: Springer, 1988), 197-206., https://doi.org/10.1007/BFb0042787.

15）Bernd Scherer and R. Douglas Martin, *Modern Portfolio Optimization with NuOPT™, S-PLUS®, and S+Bayes™* (New York: Springer, 2005)., https://doi.org/10.1007/978-0-387-27586-4.

16）Haris Aziz, Péter Biró, and Makoto Yokoo, "Matching Market Design with Constraints," *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence* 36, no. 11 (2022) : 12308-12316., https://doi.org/10.1609/aaai.v36i11.21495.

17）株式会社富士通研究所, 国立大学法人九州大学, 富士通株式会社「最適な保育所入所選考を実現するAIを用いたマッチング技術を開発」, https://pr.fujitsu.com/jp/news/2017/08/30.html,（2023年3月8日アクセス）.

18）穴井宏和, 横山和弘『QEの計算アルゴリズムとその応用：数式処理による最適化』(東京: 東京大学出版会, 2011).

19）九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 若手・学生研究-短期共同研究「限量子消去の効率的なアルゴリズムの構築と産業課題解決への応用」https://joint1.imi.kyushu-u.ac.jp/research_chooses/view/2022a005,（2023年3月8日アクセス）.

20）Nisheeth K. Vishnoi, *Algorithms for Convex Optimization*（Cambridge: Cambridge University Press, 2021）., https://doi.org/10.1017/9781108699211.

21）Yin Tat Lee, Aaron Sidford, and Sam Chiu-Wai Wong, “A Faster Cutting Plane Method and its Implications for Combinatorial and Convex Optimization,” in *2015 IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*（IEEE, 2015）, 1049-1065., https://doi.org/10.1109/FOCS.2015.68.

22）Samuel Fiorini, et al., “Exponential Lower Bounds for Polytopes in Combinatorial Optimization,” *Journal of the ACM* 62, no. 2 (2015) : 17., https://doi.org/10.1145/2716307.

23）Ken-ichi Kawarabayashi and Mikkel Thorup, “Deterministic Edge Connectivity in Near-Linear Time,” *Journal of the ACM* 66, no. 1 (2018) : 4., https://doi.org/10.1145/3274663.

24）Satoru Iwata, Lisa Fleischer, and Satoru Fujishige, “A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions,” *Journal of the ACM* 48, no. 4 (2001) : 761-777., https://doi.org/10.1145/502090.502096.