

## 2.7.1 数理モデリング

### (1) 研究開発領域の定義

理学・医学・工学から社会人文科学までの広大な領域の研究に現れるイベントには、純粋な物理現象など基礎方程式が明らかな現象とともに、生物・社会現象など基礎方程式がその存在を含めて明らかでない現象が数多く存在する。数理モデリングは、前者のみならず後者も含む広い範囲の現象に対し、必ずしも要素還元的な視点からではなく、現象論的な視点に立って、数学的記述を見いだすことにより、現象の機構の数理的解明と現象の数理的予測を行う領域である。

### (2) キーワード

複雑系、制御理論、流体力学、可視化、データ同化、情報量規準、情報幾何、シグナル

### (3) 研究開発領域の概要

#### [本領域の意義]

数理モデリングは自然法則を表現する基礎方程式がすでに存在している物理系として記述できる物理・工学の問題において、かつてのイジングモデルからスピングラスモデルのように複雑な物性を理解するために有効な手段であった。また流体力学のようにナビエ・ストークス方程式という現象論的な基礎方程式が存在していても、その解の数学的な構造が必ずしも十分に理解されていない場合にはさまざまな時間空間スケールでの数理モデリングが有効である。さらには基礎方程式が必ずしも明確でないその他の複雑物理系、化学反応系、生命系や社会科学系においてはその重要性は格段に高い。これらの中には、地震や火山噴火のように実験室での実験が不可能な系も含まれる。空気力学にはレイノルズ数というスケール変換に対する不変性を表す指標が知られており、このスケール不変性によって風洞実験が可能になった。地震や火山噴火においてはこのようなスケール不変性が知られていない（あるいは存在しない）ため実験は不可能であるので、現象理解のためには観測データの解析と数理モデリングによる構造解析が必須である。生命系においては、分子生物学やバイオインフォマティクスの大きな発展があるが、遺伝子がわかればすべてわかるといった単純な要素還元論は成立しないことが、具体的には一細胞（シングルセル）RNAシーケンシングなどの手法などによってますます明らかとなっている。複雑な遺伝子の組み合わせが細胞内の環境因子に依存してたんぱく質の機能発現に至り、またさまざまなたんぱく質の活性動態が細胞分化に寄与していることが明らかになってきた。これらの複雑なネットワークを解析するには数理モデリングは今や必須となっている。脳科学においても、ながらく生理学的手法によりある脳領域の単一の神経細胞が与えられた刺激に反応するということが主として調べられてきた。しかしながら、この事実の積み上げだけでは脳のさまざまな機能を説明することが困難であるという認識が今や一般的になっている。脳科学が必要としているのは数学的な観点から神経細胞や神経細胞のネットワークの動態を解析し、その生物学的意味を明らかにする数理モデリングである。近年の人工知能（AI、Artificial Intelligence）はこの脳の神経細胞のネットワークの数理モデルが基礎になっている。したがって、AIのさらなる発展においても、また人の脳とAIの相互作用による脳機能拡張を実現するためにも数理モデリングは欠かせない。社会科学においては、インターネットにおける検索システム、仮想通貨、株価予測、保険などにはさまざまな数理モデリングが使用されている。このように、数理モデリングは複雑なシステムの理解に欠かせない方法論として認識されている。

#### [研究開発の動向]

##### ① 複雑系と制御理論、情報量規準、データ同化関連

「複雑系」<sup>1)</sup>とは要素還元的な手法では必ずしも十分な理解に達し得ない系である。典型的には生物・生命系、流体系や人工物がある。生物系においては、どのような生物個体も構成要素が多く異なる時間空

間スケールにおいてそれぞれの機能を持ち、どのレベルの機能と構造も他のレベルの機能と構造から還元されることはなく個体はそれらの相互作用を通じて全体として機能する。どのような生物個体もあらかじめ与えられた機能要素の相互作用から成り立つのではなく、個体全体が機能するように構成要素の機能と構造が分化することで相互作用が実現する。脳の機能分化、細胞分化などはその最たるもので、最近注目されている腸脳相関の重要性もまさに腸と脳が分離不可能な系、すなわち複雑系であることを示している。また流体系は、物質としての流体が分割不可能な連続体であると同時に、流体運動（特に乱流）においては特定の機能要素を分離して定義することが困難なため、多数の異なる長さや時間のスケールを持つ「渦」の総体を同時に扱わざるを得ない点で、複雑系の一典型と考えることができる。他方で、人工物は人が設計図を作ることで人工物の構成要素（部品）が決まる<sup>1</sup>。各構成要素は人工物の中でその機能を発揮し、人工物から取り出されればその機能は失われる。自転車や自動車とその部品の役割を考えれば、これらは明らかであろう。

複雑系の本格的な研究は第2次大戦後のサイバネティクスから始まったと見て良い。ノーバート・ウィナーはホワイトノイズ解析など後に「確率微分方程式」として発展するランダム時系列解析を基礎にして、「制御理論」<sup>2), 3)</sup>の構築を行った。本来、制御理論はシステムに入力と出力を導入したオープンシステムの理論だが、出力をシステムの入力に戻す「フィードバック制御」によってクローズド・システムとしてみる事が可能である。そうすることで、制御対象のシステムを「力学系の族」として扱うことが可能になった。さらに「最適制御」は目的を想定することで終状態を決めてそれに到達する初期値・境界値を求める非因果的作用であるとみなすことができ、「変分問題」としての扱いが本質的となりアンドロノフとポントリャーギン以降、数学的な取り扱いが発展した。また、心拍動の数理モデル化や脳神経系の「ニューラルネットワーク」を数学的に研究する研究も始まった。典型的にはマッカロとピッツの形式ニューロンの導入とそのネットワークがユニバーサルチューリングマシンと等価であることが示され、「計算理論」と結びつくことでその後の神経回路網の数学研究へと発展した。近年では神経回路の動作やその学習の統計的性質を「情報幾何学」<sup>4)</sup>の枠組みで議論できるまでになっている。この理論の根底には微分幾何学があり、「曲率」や「接続」といった数学概念によって神経活動の統計性を数学的に定式化することで神経回路が必然的に持つ不確実性を数学的に確定することができた。さらに、近年のAIを爆発的に発展させた神経回路の学習も情報幾何学によって定式化が可能になってきた。神経活動の確率分布関数に「リーマン計量」を入れることで、学習過程を多様体上の軌道として議論することが可能になった。さらには、多様体が破壊されて出現する「ミルナーアトラクター」の存在が過学習などの学習の不健全さを解消する要因の一つであることもわかってきた。また、サイバネティクス研究は通信と情報の数学理論を促し、シャノンの「通信の数学理論」<sup>3)</sup>、いわゆる今日の「情報理論の数学的基盤」が与えられた。関連して、カルマンフィルターに代表される「フィルター理論」<sup>3)</sup>が構築され、さまざまな情報処理技術に対して数学的ツールを提供する道筋が整い、今日に至っている。

20世紀終盤から21世紀にかけての複雑系研究は、流体乱流とカオス力学系の関係を皮切りに「カオス力学系における分岐理論」<sup>5)</sup>、「非線形数学」<sup>5)</sup>、「フラクタル幾何学」<sup>5)</sup>を生み出し、エルドősのランダムネットワーク理論に端を発した「複雑ネットワーク理論」<sup>6)</sup>や生物進化のダイナミクスを取り入れた「複雑適応系」<sup>6)</sup>の数学モデルによる研究が進んだ。

近年では、1980年代のニューラルネット研究を基盤にしたフィードフォワード型のニューラルネットワークに学習機能を持たせた「深層ニューラルネット」<sup>7)</sup>が新しい「AI」<sup>7)</sup>として提案されすでに社会実験（種々の人型ロボット、自動運転、癌などの病態判定など）まで行われるに至っている。また、近年ではフィード

1 Simonの考え方に依り、人工物は人の設計思想が入っているという意味で複雑系と考える。Herbert A. Simon, The Sciences of the Artificial, reissue of the third edition with a new introduction by John Laird. MIT press, 2019.

バック入力を許すリカレントニューラルネットの事例研究が進み、典型的には「リザーブ計算機」<sup>8)</sup>として主に時系列を学習するAIとして研究が進んでいる。物理現象を物理的リザーブとみなし計算機として使用する研究も盛んになっている。さらには真のシグナルとそれに似せた偽シグナルを生成し判別機をだます敵対的な仕組みを導入して判別性能を向上させるニューラルネットGAN (Generative Adversarial Network) が提案され効果を発揮している。応用面ではこれらAIの導入によって画像処理技術と自然言語翻訳が格段に進歩した。しかしながら、これらのニューラルネットの動作原理と学習に関する機構はいまだ解明にはほど遠く、数学研究が必須であるがまだまだ散発的である。強力な数理モデリングが期待されている。なお、シグナルの別のとらえ方としてパターン理論がある<sup>9)</sup>。Ulf Grenanderによって定式化されたこの理論は、知識をパターンとして記述する数学的形式主義である。それらは物が発するシグナルを捉えて、パターンの概念を正確な言語で明確に表現し、言い換えるための語彙を規定するものであり、極めて幅広い数学に及ぶ。

さらには、生体から測定されるさまざまなレベルのデータ（各細胞でのRNA発現量、各臓器でのタンパク質量、脳波データ、機能MRIデータ、脳磁図データなど）から特定の生体機能を推定し、時には予測することで喫緊の課題である個別化医療に対して数理モデリングを適用する研究動向が見られる<sup>10), 11)</sup>。ここでは、気象予測でかなりの成功を収めている「データ同化」<sup>12)</sup>の手法が応用されている。また、さまざまな数学概念が活用され、高次元ベクトルとして表現されたデータを「低次元多様体」上へ可能な限り情報損失なく写像する方法が「埋め込み」との関係において研究されている。それゆえ、この局面において、可視化手法の開発は必須になっている。加えて、これらデータ解析やAIの学習過程において「カルバック・ライブラー (KL) ダイバージェンス」、「相互情報量」、「移動エントロピー」、「組み合わせエントロピー」などの情報量が学習や判別の「情報量規準 (IC, Information Criterion)」<sup>3)</sup>として頻繁に使用されている。特にKL ダイバージェンスは確率変数が連続であるならば、分布関数を「ラドン・ニコディム微分」で書け、座標変換に対して不変であることが示せるのでよく使われている。

「情報量規準」は赤池のAICに始まり、その拡張である渡邊のWICやBIC (ベイジアン)、MDL (最小記述長) などがある。WICの構築には、佐藤の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論や広中の特異点解消の理論も使われており、現代数学とのつながりの意義深さを示している。これら情報量規準は統計モデリングあるいは情報量理論・学習理論 (情報幾何に通じる) の中で捉えられるものでもある。

複雑な時系列の「予測問題」は複雑系の重要なテーマであり、さまざまな分野への応用を持つ。これはニュートンやライプニッツが微分積分法を開拓し、微分方程式によって物体の運動を予測して以来の人類にとって重要な一歩である。例えば、株価変動、石油採掘、気象カオス、気候変動、流体乱流、脳の神経活動、生物個体群変動など数え上げればきりがなほど多くの多様な現象が予測不可能な不確定要素の多い現象として長年位置づけられてきた。しかしながら、これらは「確率微分方程式」およびその平均化である「拡散方程式」、または「カオス力学系」や「ランダム力学系」として捉えられ数学的に厳密な解析が行われてきた。

## ② 流体力学と可視化、データ同化関連

流体の運動は、われわれの身の回りの至る所に存在するにも関わらず、その多くの部分が非線形効果によるため数学的な理論解析が難しく、流れ場の定量的な詳細がある程度知られるようになったのも、コンピューターによる「数値計算」が広く実用化された1980年代以後のことである。当初は、それ以前の「摂動論的解析」の数値的確認などが行われたが、すぐに理学的にも工学的にも、強非線形段階の流れ、特に乱流計算が試みられるようになった。現在、流体力学が盛んに用いられる領域は、微生物運動やマイクロロボットといった小スケールから、日常のあらゆる流体现象、さらに気象海洋現象、また宇宙プラズマや恒星集団に至るような大スケールまで極端に広い領域となっている。またこれらそれぞれの課題内部の問題も多岐に亘っていることから、ここではいくつかの基礎的課題に絞って説明する。

21世紀に入った後の動きでは、理論な面では、数学、特に解析学との接近が目立っている。前世紀にも流体力学の問題を解析学の問題として扱う数学研究者が見られたが、ミレニアム懸賞問題として「ナビエ・ストークス方程式の解の存在問題」<sup>13)</sup>が取り上げられ、また、数学の一般的傾向として応用分野への興味が増したこともあって、流れの存在や安定性など多様な側面の数学的解明が、数学者と流体力学者の協力によって進んでおり、「数理流体力学」と呼ばれる分野になっている。近年は特に数学者によって、オイラー方程式の弱解について、速度場のHölder指数が1/3未満ではエネルギー保存則が成り立たないこと（「Onsager予想」<sup>14)</sup>）が証明され大きな話題となっている。

非粘性流体の運動では、渦線が流体に凍結して運ばれるため、渦線群のなす「トポロジー」は時間的に変化しない。同様の性質は電磁流体における磁力線群にも存在する。この結果、渦度や磁場のトポロジーは、流れの時間発展に大きな制約を課すことになるため、解の特異点の発生問題（滑らかな解の存在問題）や「ダイナモ現象」、渦線や磁力線のつなぎ変え（reconnection）などに関連する研究が盛んに行われている<sup>15)</sup>。また「核融合プラズマにおける定磁場」が、オイラー方程式の平衡解と密接な関係にあることから、「ベルトラミ場」となる速度場の存在が研究されているが、これには場の定義域の「トポロジー」が重要な要素となっている。

1970年代から80年代にかけて、乱流研究の新しい方向としてカオス概念がもてはやされた時期があったが、当時の「カオス理論」が有効な対象が主に低次元カオスに限られていたことから、次第に下火となった。しかしその後、コンピューターの能力向上により、当時は不可能であった「偏微分方程式」系においても、依然として限界はあるものの力学系的な解析が可能になり、今世紀に入ってから、巨大数値計算を用いた流れの力学系の解析が実行されるようになった。その結果、壁乱流において、「乱流遷移」<sup>16)</sup>に「不安定定常解」が関与していることや、長年、不安定性の発生時に実験的に観察されていた馬蹄形構造の渦が、「非線形最適攪乱」の成長過程に現れる構造として理論的に初めて同定され、「不安定多様体」や「ヘテロクリニック軌道」との関連が論じられるなど、力学系的観点からの目覚ましい成果が得られている。

微細な構造（多くはmm以下）に伴う流れを対象とする「マイクロ流体力学」<sup>17)</sup>は、ナノテクノロジーや生化学、生物工学とも関連する広大な学際分野であり、微細なチップ上の流れなどへの応用と共に、DNA解析など生物学への応用も行われている。また生物の運動機構の流体力学的研究も近年急速に盛んになっており、「生物流体力学」<sup>18)</sup>の分野が広がりつつある。

流体力学は気象学・海洋学など地球科学とのつながりも深く、多くの流体力学的手法が地球科学に導入されてきたが、近年は気象学から流体力学に導入される手法も生まれており、「データ同化」<sup>12)</sup>手法はその代表的なものである。データ同化とは、天気予報などにおいて、コンピューターによる計算値を、計算誤差と観測誤差を考慮しながら、観測値を用いて修正する技術である。時間変化をコンピューターで予測する際に、観測値によって修正しながら計算を進める技術は、流体力学はもちろん、予測が必要なあらゆる分野に応用可能であるため、近年、理論・応用の両面において活発に研究が進められている。

流れの数値計算（数値流体力学）は理工学の広い分野における重要課題であり、近年は乱流の数値計算手法としてDNS（Direct Numerical Simulation）およびLES（Large Eddy Simulation）などの「乱流モデル」<sup>19)</sup>の応用分野が広がっている。また、相変化や化学反応などを含む「混相流」<sup>20)</sup>は埋込境界法などの適用により直接数値シミュレーションが可能となり、さらに非ニュートン流体、燃焼流などの複雑流体の数値計算の研究も活発に行われている。離散化された空間上の粒子分布を用いた「格子ボルツマン法」<sup>21)</sup>は、アルゴリズムの単純さと「並列計算」処理への高い適応度から、広範な流体现象の数値計算手法として注目されている。また近年、流体力学への「機械学習」や「深層学習」の導入が試みられており、流れの予測や推定への応用の研究が盛んである。

### (3) 注目動向

#### [新展開]

#### データ同化手法<sup>12)</sup>

数値気象予報分野を中心に発達したデータ同化手法は、現象の時間発展の予測を、その時々観測データによって修正することにより予測精度を向上させる技術である。多くのデータ同化手法は、制御工学におけるカルマンフィルタを基礎にしているが、数値予報では、アンサンブル計算を組み合わせたアンサンブルカルマンフィルタによって計算コストの軽減が図られている。データ同化手法は、コンピューターによる時間発展の予測の精度向上という一般的課題に対する汎用的な対処法であるため、多くの応用分野が存在し、計算機能力の向上と数値シミュレーションの広がりにより重要性が増している。

#### 非線形最適攪乱と制御<sup>16)</sup>

系の制御においては、小さな関与によって大きな効果が得られることが望ましい。非線形系における制御方法の一つは、系の状態を不安定化し別の安定な状態に移行させることであるが、線形化発展作用素が自己共役でない場合は、線形安定な状態であっても、ある特殊な攪乱の急激な発達とそれに伴う非線形発展によって、別の状態への移行が可能な場合がある。このような攪乱（非線形最適攪乱）は、壁境界を伴う流体運動に極めて普遍的に存在するものであるため、流れの制御方法の一つとして注目されている。線形化作用素が非自己共役となる系には同様の機構が存在する可能性が指摘されている。

#### 生物流体力学<sup>18)</sup>

生物学に関する流体力学は、生物内の循環系の流れに関するものと、生物外の流体と生物の相互作用に関するものにわかれる。前者では循環器系および呼吸器系の流れが、後者では生物の飛行と遊泳が主な研究対象である。近年、流れの実験観察の手法が発展し、流れの詳細が明らかになるとともに、数値シミュレーションと併せて、人体の病変との関係、生物の運動形態との関係などの研究が急速に進展している。レイノルズ数の大きな流れについては、現在でも実験的あるいは数値的考察が主導的であるが、レイノルズ数の小さな流れ、特に微小生物の遊泳運動については、ストークス流を基本とした理論的考察が可能であることから、理論的概念も含めた進展が見られる。生物の運動形態は、長い進化の歴史による生存のための最適化が実現していると考えられるため、工学的な面からも興味を持たれている。

#### AI開発への数学基盤の構築<sup>22)</sup>

深層ニューラルネットがなぜ人以上に優れたパターン識別能力を持てるのかという疑問への解答を得るには、数学的な研究が必須であろう。ニューラルネットの層を深くすることで通常見られる“でこぼこのランドスケープ”に付随した多数の準安定状態が消滅し一つの最適な安定状態が生成されたのか、多数の等価な安定状態が生成されたのかも解明されていない。深層ニューラルネットの学習に対する数学的アプローチは近年増加しているが、決定打は出ていない。例えば積分表現による定式化はあるが、積分を使うことで“でこぼこのランドスケープ”が平均化され粗視化されてしまうことで上記の問題の本質がぼやけてしまう。[研究開発の動向]で述べた情報幾何学によるアプローチにおいても上記の問題は解決していない。また、敵対的ニューラルネットであるGANは人が判別できないフェイク画像を生成することが可能であり、現実には存在しない画像も生成する。GANを制御するためにはその機構を理解する必要があり、そのためにはニューラルネットに生成された情報の数学的構造を抽出する必要がある。時系列解析に向いているリザーバー計算機もネットワーク内部に直交基底が生成されるならば任意の滑らかな関数を近似できるので、その制御のためには基底生成に対する数学理論が必要である。リザーバー内部においてカオスが発生するならば直交基底が生成される可能性が生まれるが、その反面情報損失が大きくなり長期記憶の成立が困難である。リザーバー内部が安定状態であるならば記憶は保存され学習がうまくいく可能性が高くなるが、その反面直交基底を生成することが困難になる。

安定性を保ちながら直交基底を生成する自己組織化原理解明の数学が必要になっている。AIを安全に人社会に組み込むためにはニューラルネットの数学モデルの研究は不可欠であり、またAI内部に生成された情報の数学的構造を抽出する研究は必須である。他方で、このような機械学習を多重時空間スケールが本質的な物理現象に対する理論構築に応用する研究動向が見られる。全く異なる時間空間スケールをつなぐ統一的な理論構築は近い将来の目標であるが、それに対して、実データと異なるスケールでの精密なシミュレーション結果と実データをまとめてビッグデータとしてニューラルネットに学習させることで、現象を支配するパラメータを精度よく推定することが試みられている。また、場の時間変化をニューラルネットワークに学習させることによって、次の時刻の場を予測することや、場を少数モードへ分解しそれらの支配方程式を導出すること、また、場の時間発展に関する縮約方程式の導出などが試みられている<sup>23)</sup>。これらの試みは流体乱流を対象にしていることが多いが、生体系や脳神経系、進化をベースにした生物個体集団の重層社会の形成などにも今後は応用されていくと考えられる。

### [注目すべき国内外のプロジェクト]

#### ・米国

#### IAS (Institute for Advanced Study)

2022 – 2023 特別年「数論と代数幾何におけるダイナミクスの応用」：エルゴード理論、組み合わせ論、解析数論、代数幾何の境界領域に焦点を当てる。

#### IMA (Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota)

2020–2021 テーマプログラム「ビッグデータをハネスする：偏微分方程式、変分計算、機械学習」：アルファ基等強化学習を導入した機械学習が成功したが、背景にある数学は全く解明されていない。そこで、数学分野としての偏微分方程式、変分原理、最適化問題と機械学習の関係を明確にすることを目的とする。

#### ・ドイツ

#### IAM (Institute for Applied Mathematics)

##### 関連基金テーマ

2020–2023 「超互換合金の微細構造に関する数理解析」

#### Max-Planck Institute for Mathematics in Science

Research Group の中に以下のグループが設置されている。

- ・ Complex systems and their mathematical analysis, in particular in neurobiology and cognition, biology, and economic and social systems、
- ・ Information theory, dynamical systems, network analysis、
- ・ Convexity, Optimization and Data Science、
- ・ Mathematical Machine Learning、
- ・ Learning and Inference
- ・ Stochastic Topology and its applications

#### ・英国

#### Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (Cambridge)

2022 プログラムテーマ「Geophysical fluid dynamics; from mathematical theory to operational prediction」：近年気候システムに関する発展は、現業の予報技術から無限次元力学系における抽象的結果に至る広がりを見せている。ここでは、気候システムの流体力学的要素について、抽象的結果の現業への導

入と現業における実際の問題への数学的挑戦を目指し、決定論的あるいは確率的摂動への応答、データ同化などの問題を取り上げる。

2022 プログラムテーマ「Dispersive hydrodynamics: mathematics, simulation and experiments, with applications in nonlinear waves」: 分散性流体力学は、分散性媒質における多スケールの非線形波動の記述を統合する数学的枠組みであり、近年、理論と実験の発展により理論から応用に亘る新しい研究領域が形成されている。ここでは、数学的課題と共に地球科学、非線形光学、超流体、磁性物質への応用を視野に入れた研究を目指している。

2022 プログラムテーマ「Mathematical aspects of turbulence: where do we stand?」: 乱流問題の数学的側面を取り上げて、非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式およびオイラー方程式の数学解析、乱流輸送、非一様非等方な壁面流れと乱流遷移、地球流体力学に関する問題を取り扱う。

## Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Scientific Program 2023 の中に次のものがある。

- Design and Analysis of Infectious Disease Studies
- Random Graphs: Combinatorics, Complex Networks and Disordered Systems
- Mathematical Foundations of Biological Organisation
- Tomographic Inverse Problems: Mathematical Challenges and Novel Applications
- Machine Learning for Science: Mathematics at the Interface of Data-driven and Mechanistic Modelling
- Transport and Scale Interactions in Geophysical Flows

### • フランス

#### Institut Henri Poincare

2022年の研究プログラムとして、Geometry and statistics in data sciences が行われている。AIの数学における統計学、確率論、幾何学、トポロジーの豊かな相互作用を目指す分野横断的なプログラムが企画されている。

### • 日本

#### 統計数理研究所 (ISM)

##### 重点型研究 (数理モデリング関係分)

2022-2023 重点テーマ「高次元データ解析・スパース推定法・モデル選択法の開発と融合」: 高次元データに対しては、非高次元のデータに対するものとは異なるタイプの統計理論が開発され、スパース推定に対しても独自の理論が構築されていることから、新しいタイプの統計理論への貢献および応用研究、方法論の課題解決を目指す。

#### 京都大学数理解析研究所 (RIMS)

##### 訪問滞在型研究 (数理モデリング関係分)

2023 訪問滞在型研究テーマ「確率過程とその周辺」: 今世紀の確率解析の発展は目覚ましく、物理学に動機を持つモデル解析をはじめ、ビッグデータ解析など応用に直接つながる研究も急速に拡大している。ここでは「確率過程と確率解析」をキーワードとする基礎・応用研究を取り上げる。

## 東北大学知の創出センター (Tohoku Forum for Creativity)

### 関連テーマプログラム

2022 テーマプログラム「地球内部ダイナミクスの理解」: 地球内部は未知のことが多い。物理学の一分野として確立する手法を開拓するために物理学者、地質学者、生物学者、工学者が共同して地球内部の物理生物化学の確立を目指す。

## 九州大学マス・フォア・インダストリー (IMI)

### 関連採択課題

2022 国内課題「情報通信の技術革新のための基礎数理」: 次世代移動体通信システムの革新的開発のための基礎となる数学理論を発掘し、通信工学者と数学者の共同研究を促す。

2022 国際課題「統計学と数理モデリング」: モデル同定、逆問題、偏微分方程式、生態系モデリング、感染症モデリング、進化的モデリング、力学系をテーマにして異なる分野を数理モデリングによって融合することを目指す。

2022 女性活躍支援課題「機械学習への組み合わせ最適化アプローチ」: 組み合わせ論、グラフ理論を機械学習のシステム実験計画策定に応用し、より統計学的に効果的な機械学習モデルを提案することを目指す。

## (5) 科学技術的課題

### ① データ同化手法<sup>12)</sup>

データ同化手法は、気象現象の数値予報において、気象観測の密度と精度の不十分さから生じる誤差が系に内在するカオス性によって大きく拡大され、予測精度が時間とともに速やかに減衰することに対する対処法として開発された技術である。それは、計算機による計算値を観測値によっていかに修正すれば良い予測値を得られるか、という予測を課題とする問題一般に共通する普遍的汎用的な対処法を与えるため、潜在的に多くの応用分野が存在する技術でもある。

計算機能力の向上と数値シミュレーションの広がりを背景として、観測データによるデータ駆動型科学と、第一原理による演繹型科学をつなぐ技術でもあり、将来的に、日常生活から宇宙開発技術まで広範な分野で使用されることが予想される。

以上の根拠により次の課題があることがわかる。

課題: 予測と観測の粒度ギャップを埋めることより確実性のある手法の開発

- ・大規模系におけるデータ同化手法、特に、4次元アンサンブルカルマンフィルターと4次元アンサンブル変分法の手法の高度化
- ・課題ごとのデータ同化法の最適化手法の開発

### ② 生物に関する数学的記述<sup>18)</sup>

20世紀は量子力学の発展を基盤とするコンピューターの発達の時代であったが、最後の四半世紀から以後21世紀にかけて、コンピューター技術を基盤とする計測技術が大きく発展したことで、特に生物に関する精密計測が実行可能となった。21世紀に入り、その精密計測を基盤として、生物の構造や行動のみならず、生物・生命の機能的なところを数学的に記述し解明する科学が急速に発展している。数理モデリングや生物流体力学はその代表的な例であり、今後、精密観測・数理モデル・生物工学など多くの関連分野の相互作用によって、理論から工学的応用に亘る分野横断的な一大分野が形成されることが予想される。以上により、生物学の最も重要なテーマである構造と機能の関係を明確にすることが可能になりつつあり、そこに数学・数理科学を応用する最大の利点がある。

課題: 構造と機能の関係に関する数学解析の確立

- ・生物の形状と周囲の流体のなす連成問題の理論的解析法の開発



- ・脳のネットワーク構造と機能の関心の解明
- ・生物の運動形態と生物進化の関心の解明

### ③ AIの導入<sup>24)</sup>

計算速度の有利さから、AIによって、方程式を使わずに流れ場を予測する手法すら試みられているが、工学や実社会応用のためには、基礎方程式なしのこのような手法の利点・欠点を明らかにすることが不可欠である。また、AIは、関与する要素が多く人間には見極めが難しい現象に対して、人間よりも的確な判断を下せる可能性のあるものとして注目されている。流体現象は、多くの場合、連続体の現象であって要素構造の抽出が難しいため、人間による判断も難しい傾向が強いが、このような連続体構造の現象に対してAIが期待通りの優れた能力を示せるかどうかは、理学・工学の両面から大きな興味を持たれる点である。

生物系へのAIの導入において成功しているのは、一部の癌の判別である。今後、さまざまな生体信号のデータ解析や数理モデリングにAIが使われる可能性が議論されている。しかしながら、その動作機構に関する十分な理解なくして、単に応用するのは危険であることは強調して良い。データ解析やモデリング自体にフェイクが混じる可能性が否定できないからである。動作機構に関する数学研究が必須であるゆえんである。このように、データそのものが信頼できるか否かの確定的な判定がまず必要である。

さらに、物理科学では理論と実験、生物科学ではそれに加えて構成、多くの工学では構成と実験が研究手法として骨格をなしてきたが、近年研究手法にAIを導入する動向が見え始めている。例えば数学においても幾何学の定理を人がすべてを行うのではなく、AIの助けを借りて人のインスピレーションを加速させる手法がとられ始めている。新しい物性を持った材料開発、生命現象の解明、創薬、未病の予測・予防<sup>25)</sup>でもAIによる学習が研究の助けになりつつある。このような現状から以下の課題があると考えられる。

課題：大規模データの解析手法の確立；研究手法としてのAI補助をどこまで拡張できるか

- ・数学の定理の証明過程へのAIの導入
- ・マテリアルズインフォマティクス、バイオインフォマティクス、ケモインフォマティクス
- ・未病と早期治療の数理モデル

### ④ 量子情報幾何における幾何構造の統一的描像<sup>4)</sup>

情報幾何においては、上で述べたように、確率分布関数全体に「リーマン計量」(フィッシャー計量と呼ばれる)が入っている。これがただ一つに定まっていることが統計学や情報理論のさまざまな問題を考察するために重要である。ここで、量子力学の(数学的)体系は、確率論の拡張とみなすことができる。よって、量子状態全体にもフィッシャー計量の類似が導入することができるが、その類似物が無数に存在するという状況になっている。量子情報幾何は長年に亘り研究されているが、このように問題ごとに個別的に現れる幾何構造に対して統一的な描像が得られるか、ということがここ20年の大きな課題として残っている。

## (6) その他の課題

人材育成の問題は喫緊の課題である。コンピューターの格段の発展に伴って、旧来の応用数学的な解析技術の直接的な有効性への意識が急速に衰えたため、重要性への認識や関心が急速に減少し、人材教育の中においても、旧来の解析技術に必要な数学とその応用に関する教育が実質的に激減した。このことともに、応用上の要請から新しい数学の芽や数学への刺激、応用の拡大が生まれにくくなっていることも危惧される。微分方程式に関わる数学、特に特異摂動法や特殊関数、偏微分方程式(1階および2階)などは、数学としての教育は数学科における解析学/応用解析学にはある程度あるものの、工学・物理学における実現象の解析ツール(手計算の技術を含む)としての教育は大きく減り、代わりに並列化プログラミングなど計算機に関わる技術の教育が増加している。これは即戦力となる技術を身につける意味では妥当なものであるが、中長期的な視点からは、基礎的素養が十分に育成されず、新しい概念の創造や新しいパラダイムへの対応力の点

で危惧されるものでもある。数学応用における純粋数学の重要性と類似する問題である。これまでの数値的技術は旧来の教育を受けた研究者によって開発され、旧来の解析的な知識や技術を基礎としている。新しい手法は、古い基礎的な事柄を新しい視点から見ることによって生まれるのが通例であり、旧来の知識の欠如は、わが国の研究が海外における進歩・革新を後追いする傾向に拍車をかけることが危惧される。

本領域に限らないが、関連する重要な課題として計算コード作成・実行を担う人材の問題がある。計算コード作成・実行を担うことができる人材は引く手あまたであり、その確保は難しくなっている。現在、研究者の研究環境において高速計算機の利便は不可欠のものであるが、ネット環境の発達によって、高速計算機へのアクセスはある程度保証される環境が整備されている。計算コードを作成・実行し計算結果を得るという作業は、ほとんどの場合、研究者自身あるいは指導学生によってなされている。したがって、今後、大きな数値計算が不可欠の分野においては、若手研究者が計算コードを使いこなせるような教育と環境整備が必須となる。ただし、計算コード作成の重要性は近年ますます高まっている反面、コード作成自体がアカデミアで評価されることが少ない。そのため、優秀なコード作成技術をもつ学生であっても研究職に就くことが難しい状況である。ただでさえ研究職に就くことは困難であるため、問題として埋没してしまっている。

### (7) 国際比較

国際誌における2000年以降2020年までの論文採択数によって研究活動状況を調べ、全体の傾向を表中に示した。大きく2000年～2010年、2010年～2020年に分けてトレンドを見たがさらに最近の伸び方もトレンド要因とした。なお、応用に関しては領域的に企業での開発というレベルは考えにくく、企業と連携可能な研究をおおざっぱに見積もっている。

国・地域	フェーズ	現状	トレンド	各国の状況、評価の際に参考にした根拠など
日本	基礎研究	△	→	複雑系では、上昇傾向のある分野、歴史的に強い分野はあるが、全体としてはほぼ横ばいである。可視化では、分野によっては成果が見えるものもあるが、総体として低調である。流体力学では、2000年代と比して2010年以後、論文数は増加傾向にある。研究者数は少ないが優れた業績がある。データ同化では、気象・海洋分野における研究が活発である。
	応用研究・開発	△	→	複雑系では、企業連携などの活動も増えてはいるが、まだ目立った成果に至っていない。ゼロの状態から低い状態を維持しているのが現状である。可視化では、ほとんど成果はない。流体力学では、世界的に突出した成果は目立たないものの、米国、フランス、ドイツ、英国、中国に続くクラスにある。データ同化では、あまり目立たない。
米国	基礎研究	◎	→	複雑系では、もともと米国が突出している分野が多く、それを維持している。可視化では、グラフ化や多様体を使ったもので圧倒的に米国が強い。流体力学では、研究者の層が厚く、論文数および研究者数で他を圧倒している。データ同化では、論文数で他を圧倒しており、研究をリードしている。
	応用研究・開発	◎	↗	複雑系では、工学系の応用、最適化問題などで米国は突出しており、さらに伸びを見せている。可視化では、医療などへの応用も顕著である。流体力学では、カバーしている分野の多様さでも群を抜いている。データ同化では、大きくまとまったプロジェクトは見られないが、研究者の数が非常に多い。

欧州	基礎研究	○	↗	複雑系では、ドイツ、英国を中心に最初から実績を上げそれを維持している。可視化では、英国、フランスが伸びているが、ドイツはやや下降気味。流体力学では、大規模数値計算と数理流体力学の面で目立っている。基礎研究は英国で盛んであるが、ドイツ、フランスにも優れた研究機関があり、欧州として研究は活発である。データ同化では、英国を中心として研究が盛んである。
	応用研究・開発	○	↗	複雑系では、ドイツ、英国を中心に伸びている分野が認められる。可視化では、目立った成果はないが、レベルは維持している。流体力学では、高いレベルにあり、造船技術研究などがEUプロジェクトの一環として行われている。データ同化では、新しい分野への応用研究が北欧（ノルウェーなど）盛んである。
中国	基礎研究	○	↗	複雑系では、論文数は中国が非常な伸びを見せている。現状は数年前と比べてはるかに質が上がったが、まだ日本の方が質自体は高い。可視化では、論文数は分野によってはかなり増えているが、質的にはそれほど高くはない。流体力学では、応用研究に比して基礎研究はまだあまり目立たないが急速に発展している。データ同化では、気象分野などで活発であり、米国に続く論文数がある。
	応用研究・開発	△	↗	複雑系では、近年、応用分野においても急速に伸びてきている。可視化では、目立った成果はない。流体力学では、論文数は2010年代半ばから急速に増加しており、分野によっては米国に近づいている。レベルは平均的には欧米の水準には達していないが急速に進歩している。データ同化では、あまり目立たない。
韓国	基礎研究	×	→	複雑系では、ずっと低迷している。可視化や流体力学では、目立った成果はない。データ同化では、気象分野などで研究があるが、あまり目立たない。
	応用研究・開発	×	→	複雑系では、ずっと低迷している。可視化や流体力学、データ同化では、目立った成果はない。
その他の国・地域	基礎研究	○	↗	複雑系については、インド、ブラジル、香港が伸びている。
	応用研究・開発	○	↗	複雑系については、インド、イランが伸びている。

(註1) フェーズ

基礎研究：大学・国研などでの基礎研究の範囲

応用研究・開発：技術開発（プロトタイプの開発含む）の範囲

(註2) 現状 ※日本の現状を基準にした評価ではなく、CRDSの調査・見解による評価

◎：特に顕著な活動・成果が見えている

○：顕著な活動・成果が見えている

△：顕著な活動・成果が見えていない

×：特筆すべき活動・成果が見えていない

(註3) トレンド ※ここ1～2年の研究開発水準の変化

↗：上昇傾向、→：現状維持、↘：下降傾向

## 参考文献

### 1) 複雑系

- ・ 国立研究開発法人科学技術振興機構研究開発戦略センター「3.5 複雑システム区分」『研究開発の俯瞰報告書 システム科学技術分野 (2015年)』(2015), 238-289., [https://www.jst.go.jp/crds/pdf/2015/FR/CRDS-FY2015-FR-06/CRDS-FY2015-FR-06\\_11.pdf](https://www.jst.go.jp/crds/pdf/2015/FR/CRDS-FY2015-FR-06/CRDS-FY2015-FR-06_11.pdf), (2023年3月8日アクセス).
- ・ 金子邦彦, 津田一郎『複雑系のカオス的シナリオ』複雑系双書1 (朝倉書店, 1996).
- ・ 津田一郎「複雑系：物理学の新しい地平」『日本物理学会誌』74 巻 6 号 (2019) : 384-385., [https://doi.org/10.11316/butsuri.74.6\\_384](https://doi.org/10.11316/butsuri.74.6_384).
- ・ 日本数学会 編『岩波数学辞典』第4版 (岩波書店, 2007).

### 2) 制御理論

- ・ 国立研究開発法人科学技術振興機構研究開発戦略センター『研究開発の俯瞰報告書 システム・情

報科学技術分野 (2021年)』(2021), <https://www.jst.go.jp/crds/pdf/2020/FR/CRDS-FY2020-FR-02.pdf>, (2023年3月8日アクセス) .

・リレー解説:

太田快人「制御理論における数学 第1回:線形代数:特異値分解を中心にして」『計測と制御』38巻2号(1999):144-149., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.144>.

岩崎徹也「制御理論における数学 第2回:数理計画法:LMIと凸最適化」『計測と制御』38巻3号(1999):209-213., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.209>.

太田快人「制御理論における数学 第3回:複素解析:コーシーの定理を中心にして」『計測と制御』38巻5号(1999):345-351., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.345>.

太田快人「制御理論における数学 第4回:関数解析:直交射影と双対性を中心にして」『計測と制御』38巻6号(1999):397-404., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.397>.

太田快人「制御理論における数学 第5回:フリエ・ラプラス変換」『計測と制御』38巻8号(1999):526-533., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.526>.

山中一雄「制御理論における数学 第6回:確率統計:確率過程の線形モデルと白色雑音」『計測と制御』38巻9号(1999):579-583., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.579>.

井村順一「制御理論における数学 第7回:常微分方程式:安定性と力学系の視点から」『計測と制御』38巻11号(1999):715-720., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.715>.

小原敦美「制御理論における数学 第8回:微分幾何:接続」『計測と制御』38巻12号(1999):788-794., <https://doi.org/10.11499/sicejl1962.38.788>.

### 3) 情報理論・制御理論

・広中平祐, 他 編『現代数理科学事典』第2版(丸善出版, 2009).

### 4) 情報幾何学

・甘利俊一, 長岡浩司『情報幾何の方法』岩波講座応用数学 対象12(東京:岩波書店, 2017).

・甘利俊一『新版:情報幾何学の新展開』SGCライブラリ 154(東京:サイエンス社, 2019).

・長岡浩司「日本数学会2002年度年会企画特別講演:量子情報幾何学の世界」一般社団法人日本数学会, <https://www.mathsoc.jp/activity/meeting/kikaku/2002haru/>, (2023年3月8日アクセス) .

長岡浩司「量子情報幾何学の世界」『総合講演・企画特別講演アブストラクト』2002巻 Spring-Meeting 号(2002):24-37., [https://doi.org/10.11429/emath1996.2002.Spring-Meeting\\_24](https://doi.org/10.11429/emath1996.2002.Spring-Meeting_24).

・長岡浩司「量子力学と情報理論:相対エントロピー、統計力学、Sanovの定理をめぐって」『数理科学』56巻6号(2018):7-14.

### 5) カオス, フラクタル

・S. ウィギンス『非線形の力学系とカオス』丹羽敏雄 監訳(東京:シュプリンガー・フェアラーク東京, 1992).

・K. T. アリグッド, T. D. サウアー, J. A. ヨーク『カオス』津田一郎 監訳, 1-3(東京:シュプリンガー・ジャパン, 2006, 2007).

・B. マンデルブロ『フラクタル幾何学』広中平祐 監訳(日経サイエンス, 1985).

### 6) 複雑ネットワーク

・Réka Albert and Albert-László Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics* 74, no. 1 (2002):47-97., <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47>.

・Duncan J. Watts, *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness* (Princeton: Princeton University Press, 2003).

### 7) 人工知能 (AI) ・ニューラルネット

- ・合原一幸, 他 編著『人工知能はこうして創られる』(東京: ウェッジ, 2017).
  - ・Jürgen Schmidhuber, “Deep learning in neural networks: An overview,” *Neural Networks* 61 (2015) : 85-117., <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2014.09.003>.
  - ・Wikipedia, “Artificial intelligence,” [https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial\\_intelligence](https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_intelligence), (2023年3月8日アクセス) .
- 8) リザーバー計算機
- ・Herbert Jaeger and Harald Haas, “Harnessing Nonlinearity: Predicting Chaotic Systems and Saving Energy in Wireless Communication,” *Science* 304, no. 5667 (2004) : 78-80., <https://doi.org/10.1126/science.1091277>.
  - ・Wolfgang Maass, Thomas Natschläger, and Henry Markram, “Real-time computing without stable states: a new framework for neural computation based on perturbations,” *Neural Computation* 14, no. 11 (2002) : 2531-2560., <https://doi.org/10.1162/089976602760407955>.
- 9) パターン理論
- ・Ulf Grenander and Michael I. Miller, *Pattern Theory: From representation to inference* (Oxford: Oxford Academic, 2006)., <https://doi.org/10.1093/oso/9780198505709.001.0001>.
  - ・David Mumford and Agnès Desolneux, *Pattern Theory: The Stochastic Analysis of Real-World Signals* (CRC Press, 2010).
- 10) 一細胞 (シングルセル) RNA シークエンシング
- ・山形方人 シングルセルRNA シークエンシング 脳科学辞典 DOI : 10.14931/bsd.8038 (2020) (2023年3月8日アクセス) .
- 11) 神経科学：基礎から臨床まで
- ・Donald W. Pfaff, Nora D. Volkow, and John L. Rubenstein, eds., *Neuroscience in the 21<sup>st</sup> Century*, 3rd ed. (Springer Cham, 2022)., <https://doi.org/10.1007/978-3-030-88832-9>.
- 12) データ同化
- ・樋口知之 編著『データ同化入門』シリーズ 予測と発見の科学 6 (朝倉書店, 2011).
- 13) ナビエ・ストークス 方程式の解の存在問題
- ・Camillo De Lellis and László Székelyhidi Jr., “On Turbulence and Geometry: from Nash to Onsager,” *Notices of the American Mathematical Society* 66, no. 5 (2019) : 677-685., <https://doi.org/10.1090/noti1868>.
  - ・Tristan Buckmaster and Vlad Vicol, “Convex integration constructions in hydrodynamics,” *Bulletin of the American Mathematical Society* 58 (2021) : 1-44., <https://doi.org/10.1090/bull/1713>.
- 14) オイラー方程式の特異性と Onsager 予想
- ・Charles R. Doering, “The 3D Navier-Stokes Problem,” *Annual Review of Fluid Mechanics* 41 (2009) : 109-128., <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165218>.
  - ・Reinhard Farwig, “From Jean Leray to the millennium problem: the Navier-Stokes equations,” *Journal of Evolution Equations* 21 (2021) : 3243-3263., <https://doi.org/10.1007/s00028-020-00645-3>.
  - ・小藺英雄「Navier-Stokes方程式」『数学』54巻2号(2002) : 178-202., <https://doi.org/10.11429/sugaku1947.54.178>.
- 15) 流体力学とトポロジー
- ・Vladimir I. Arnold and Boris A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences 125 (New York: Springer, 1998)., <https://doi.org/10.1007/b97593>.

- ・ H. K. Moffatt, K. Bayer, and Y. Kimura, eds., “IUTAM Symposium on Topological Fluid Dynamics: Theory and Applications,” *Procedia IUTAM* 7 (2013) : 1-260.  
<https://www.sciencedirect.com/journal/procedia-iutam/vol/7/suppl/C>

## 16) 乱流遷移と力学系 :

- ・ R. R. Kerswell, “Nonlinear Nonmodal Stability Theory,” *Annual Review of Fluid Mechanics* 50 (2018) : 319-345., <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-045042>.

## 17) マイクロ流体力学

- ・ Michael D. Graham, *Microhydrodynamics, Brownian Motion, and Complex Fluids*, Cambridge Texts in Applied Mathematics 58 (Cambridge: Cambridge University Press, 2018) ., <https://doi.org/10.1017/9781139175876>.

## 18) 生物流体力学

- ・ James B. Grotberg, *Biofluid Mechanics*, Cambridge Texts in Biomedical Engineering (Cambridge: Cambridge University Press, 2021) ., <https://doi.org/10.1017/9781139051590>.
- ・ Eric Lauga and Thomas R. Powers, “The hydrodynamics of swimming microorganisms,” *Reports in Progress in Physics* 72 (2009): 096601., <https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/9/096601>.

## 19) 乱流モデル

- ・ 梶島岳夫『乱流の数値シミュレーション』改訂版 (養賢堂, 2017).
- ・ Stephen B. Pope, *Turbulent Flows* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000) ., <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531>.

## 20) 混相流

- ・ S. Balachandar and John K. Eaton, “Turbulent Dispersed Multiphase Flow,” *Annual Review of Fluid Mechanics* 42 (2010) : 111-133., <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid.010908.165243>.
- ・ Yi Sui, Hang Ding, and Peter D. M. Speltz, “Numerical Simulations of Flows with Moving Contact Lines,” *Annual Review of Fluid Mechanics* 46 (2014) : 97-119., <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141338>.

## 21) 格子ボルツマン法

- ・ Cyrus K. Aidun and Jonathan R. Clausen, “Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows,” *Annual Review of Fluid Mechanics* 42 (2010) : 439-472., <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-121108-145519>.

## 22) 人工知能 (AI) 開発への数学基盤の構築

- ・ Gitta Kutyniok, “The Mathematics of Artificial Intelligence,” arXiv, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.08890>, (2023年3月8日アクセス) .  
(本論文は International Congress of Mathematicians 国際数学者会議 2022 年での招待講演をもとにしている)
- ・ Kenji Kawaguchi, “Deep Learning without Poor Local Minima,” arXiv, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1605.07110>, (2023年3月8日アクセス) .
- ・ Stéphane Mallat, “Understanding deep convolutional networks,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 374, no. 2065 (2016) : 20150203., <https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0203>.

## 23) 乱流ビッグデータ解析

- ・ 深瀧康二, 深見開「機械学習を用いた乱流ビッグデータ解析に向けて」『計測と制御』59 巻 8 号 (2020) : 571-576., <https://doi.org/10.11499/sicejl.59.571>.

## 24) AIの導入

・中島秀之, 他 編『AI事典』第3版 (東京: 近代科学社, 2019).

## 25) 未病の予測・予防

国立研究開発法人科学技術振興機構 (JST) 「ムーンショット目標2: 2050年までに、超早期に疾患の予測・予防をすることができる社会を実現」 <https://www.jst.go.jp/moonshot/program/goal2/index.html>, (2023年3月8日アクセス) .

## 2.7

俯瞰区分と研究開発領域  
数理科学