

(19)日本国特許庁(JP)

(12)特許公報(B2)

(11)特許番号

特許第7688947号
(P7688947)

(45)発行日 令和7年6月5日(2025.6.5)

(24)登録日 令和7年5月28日(2025.5.28)

(51)Int. Cl.

G 0 6 F 17/10 (2006.01)
H 0 2 P 9/00 (2006.01)

F I

G 0 6 F 17/10
H 0 2 P 9/00

Z

請求項の数 13 (全 109 頁)

(21)出願番号 特願2023-545687(P2023-545687)
(86)(22)出願日 令和4年9月2日(2022.9.2)
(86)国際出願番号 PCT/JP2022/033059
(87)国際公開番号 W02023/033132
(87)国際公開日 令和5年3月9日(2023.3.9)
審査請求日 令和5年12月14日(2023.12.14)
(31)優先権主張番号 特願2021-143668(P2021-143668)
(32)優先日 令和3年9月3日(2021.9.3)
(33)優先権主張国・地域又は機関
日本国(JP)

(73)特許権者 503360115
国立研究開発法人科学技術振興機構
埼玉県川口市本町四丁目1番8号
(74)代理人 100105924
弁理士 森下 賢樹
(72)発明者 東 俊一
愛知県名古屋市千種区不老町1番 国立大
学法人東海国立大学機構内
(72)発明者 坂野 幾海
愛知県名古屋市千種区不老町1番 国立大
学法人東海国立大学機構内
(72)発明者 井村 順一
東京都目黒区大岡山二丁目12番1号 国
立大学法人東京工業大学内

最終頁に続く

(54)【発明の名称】 データ処理装置、制御システム、データ処理方法およびプログラム

(57)【特許請求の範囲】

【請求項1】

【数142】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表すn次元ベクトル、

【数139】

$$u(t)$$

を制御入力を表すm次元ベクトル、Aを未知のn×n行列、Bを既知のn×m行列とし、

【数1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、
【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン
【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の
【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限
【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定するデータ処理装置であって、
【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間
【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組
【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{21}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得部と、
【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}]$$

に関して、

線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} & x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する可制御性グラミアン計算部と、

推定された可制御性グラミアンを出力する出力部と、を備えることを特徴とするデータ処理装置。

【請求項 2】

前記時系列的な状態データの組はノイズを含み、

前記可制御性グラミアン計算部は、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned}
 & x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\
 &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, q)
 \end{aligned}$$

に代えて、線形方程式

10

【数 108】

$$\begin{aligned}
 & x_{i1}^\top (E(h)E_0^+)X(E(h)E_0^+)^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\
 &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^+)BB^\top (E(t)E_0^+)^\top x_{i1} dt \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, p) \qquad (23)
 \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 146】

20

$$G(\infty) = X$$

を推定することを特徴とする請求項 1 に記載のデータ処理装置。

【請求項 3】

前記可制御性グラミアン計算部は、
 解 X の行列成分の一部または全部の符号に関する事前知識を用いて数値計算を行うことを
 特徴とする請求項 2 に記載のデータ処理装置。

【請求項 4】

【数 142】

30

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 139】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 138】

$$G(t)$$

の

【数 144】

$$t = \infty$$

における極限

【数 140】

$$G(\infty)$$

20

のトレース

【数 141】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するデータ処理装置であって、

【数 39】

$$u(t) \equiv 0$$

30

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{21}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

取得するデータ取得部と、

【数 7】

$$Q := I$$

としたきの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する最大化条件計算部と、推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を出力する出力部と、を備えることを特徴とするデータ処理装置。

【請求項 5】

【数 4 7】

$$B \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

であるとき、前記最大化条件計算部は、

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

の最大固有値に対応する単位固有ベクトルを計算することにより

第 1 入力行列

【数 1 1】

$$\tilde{B}_1^*$$

を求めることを特徴とする請求項 4 に記載のデータ処理装置。

【請求項 6】

【数 4 9】

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n$$

であるとき、

【数 9】

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*$$

の対角成分のうち最大となるものが (k , k) 成分としたとき、

前記最大化条件計算部は、(k , k) 成分が 1 でありそれ以外の成分が 0 である n × n 行列を計算することにより

第 2 入力行列

【数 1 2】

$$\tilde{\mathbf{B}}_2^*$$

を求めるとを特徴とする請求項 4 に記載のデータ処理装置。

【請求項 7】

制御対象を制御するための制御システムであって、

前記制御対象からの時系列的な状態データの組を検出するセンサと、

請求項 1 から 3 のいずれかに記載のデータ処理装置と、

前記制御対象を制御する制御部と、を備え、

前記センサは、検出した時系列的な状態データの組を前記データ処理装置のデータ取得部に送信し、

前記データ処理装置は、推定した

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を前記制御部に送信し、

前記制御部は、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

に基づいて前記制御対象を制御することを特徴とする制御システム。

【請求項 8】

制御対象を制御するための制御システムであって、

前記制御対象からの時系列的な状態データの組を検出するセンサと、

請求項 4 から 6 のいずれかに記載のデータ処理装置と、

前記制御対象を制御する制御部と、を備え、

前記センサは、検出した時系列的な状態データの組を前記データ処理装置のデータ取得部に送信し、

前記データ処理装置は、推定した

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を前記制御部に送信し、

前記制御部は、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

に基づいて制御信号を生成し、該制御信号を用いて前記制御対象を制御することを特徴とする制御システム。

【請求項 9】

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定するデータ処理方法であって、

データ取得部を用いて、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{21}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

20

を取得するデータ取得ステップと、

可制御性グラミアン計算部を用いて、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \dots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{bmatrix}$$

に関して、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\ = - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, q$)

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する計算ステップと、

20

出力部を用いて、

推定された可制御性グラミアンを出力するステップと、を備えることを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 1 0】

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

30

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するデータ処理方法であって、

データ取得部を用いて、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

30

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{\underline{21}}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

最大化条件計算部を用いて、

【数 7】

$$Q := I$$

としたときの線形方程式

40

【数 8】

$$\begin{aligned}
 & x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\
 & = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, q)
 \end{aligned}$$

の解

10

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する計算ステップと、

出力部を用いて、推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となるときの
 の入力行列を出力するステップと、を備えることを特徴とするデータ処理方法。

【請求項 1 1】

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、A を未知の n × n 行列、B を既知の n × m 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 138】

$$G(t)$$

の

【数 144】

$$t = \infty$$

における極限

【数 140】

$$G(\infty)$$

20

を推定するプログラムであって、

【数 39】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

30

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{21}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 74】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}]$$

に関して、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ = - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する計算ステップと、

推定された可制御性グラミアンを出力するステップと、をコンピュータに実行させることを特徴とするプログラム。

【請求項 1 2】

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するプログラムであって、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{21}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7】

$$Q := I$$

としたきの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 141】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する計算ステップと、推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を出力するステップと、をコンピュータに実行させることを特徴とするプログラム。

【請求項 13】

【数 142】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、
を A の変化量とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される行列 A の可制御性グラミアンの極限を

【数 2 3 1】

$$G_c(A)$$

としたとき、

【数 2 3 2】

$$G_c(A + \Delta)$$

を推定するデータ処理装置であって、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{\underline{21}}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得部と、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

20

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}]$$

に関して、

線形方程式

【数 2 2 5】

30

$$\begin{aligned} & z_i^\top(h)Xz_i(h) - z_i^\top(0)Xz_i(0) \\ & \quad + \int_0^h z_i^\top(t)(\Delta X + X\Delta^\top)z_i(t) dt \\ & = - \int_0^h z_i^\top(t)BBz_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (47)$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 2 3 3】

40

$$G_c(A + \Delta) = X$$

を推定する可制御性グラミアン計算部と、

推定された可制御性グラミアンを出力する出力部と、を備えることを特徴とするデータ処理装置。

【発明の詳細な説明】

【技術分野】

【0 0 0 1】

本発明は、データ処理装置、制御システム、データ処理方法およびプログラムに関する

。

【背景技術】

【0002】

系の可制御性を示す指標として、可制御性グラミアンが知られている（例えば、非特許文献1～6参照）。系が可制御であるかは、可制御性グラミアンが正則であるかによって判別できる。さらに可制御性グラミアンの固有値の大きさは、入力が状態へ及ぼす影響の度合を定量的に示す。

【先行技術文献】

【非特許文献】

【0003】

【非特許文献1】F. Pasqualetti, S. Zampieri, and F. Bullo, “Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks,” IEEE Transactions on Control of Network Systems, vol. 1, no. 1, pp. 40-52, 2014.

【非特許文献2】V. Tzoumas, M.A. Rahimian, G.J. Pappas, and A. Jadbabaie, “Minimal actuator placement with bounds on control effort,” IEEE Transactions on Control of Network Systems, vol. 3, no. 1, pp. 40-52, 2016.

【非特許文献3】K. Kashima, “Noise response data reveal novel controllability Gramian for nonlinear network dynamics,” Scientific Reports vol. 6, Art. 27300, 2016.

【非特許文献4】V.M. Preciado and M.A. Rahimian, “Controllability Gramian spectra of random networks,” 2016 American Control Conference, pp. 3874-3879, 2016.

【非特許文献5】X. Cheng and J.M.A. Scherpen, “A new controllability Gramian for semistable systems and its application to approximation of directed networks,” 56th Annual Conference on Decision and Control, pp. 3823-3828, 2017.

【非特許文献6】S. Zhao and F. Pasqualetti, “Networks with diagonal controllability Gramians: analysis, graphical conditions, and design algorithms,” Automatica, vol. 102, pp. 10-18, 2019.

【非特許文献7】Z. Wang and D. Liu, “Data-based controllability and observability analysis of linear discrete-time systems,” IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 22, no. 12, pp. 2388-2392, 2011.

【非特許文献8】D. Bhattacharjee, B. Klose, G.B. Jacobs, and M.S. Hemati, “Data-driven selection of actuators for optimal control of airfoil separation,” Theoretical and Computational Fluid Dynamics, vol. 34, no. 4, pp. 557-575, 2020.

【非特許文献9】K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice Hall, 1996.

【非特許文献10】C. Kenney and G. Hewer, “Trace norm bounds for stable Lyapunov operators,” Linear Algebra and its Applications, vol. 221, pp. 1-18, 1995.

【発明の概要】

【発明が解決しようとする課題】

【0004】

可制御性グラミアンは、系の数学的モデルが既知であれば容易に計算可能である（以下、系の数学的モデルに基づく計算手法を「モデルベース手法」と呼ぶ）。しかしながら、系のモデル化に必要な量のデータが必ず得られるとは限らない。このような場合、系の数学的モデルは得られない。

【0005】

モデルベース手法に対し、数学的モデルを用いずに、系の状態軌道のデータを基に計算する手法は「データ駆動型手法」と呼ばれる。データ駆動型手法は、系の数学的モデルを特定する必要がないため、モデルベース手法より決定変数が少なく済むというメリットがある。

【0006】

10

20

30

40

50

データ駆動型手法を用いて、可制御性グラミアンを推定する手法（例えば、非特許文献 7）や可制御性グラミアンを最大化する手法（例えば、非特許文献 8）が知られている。これらの手法はいずれも、離散時間を基に定式化された離散時間モデルである。しかしながらデータに含まれる物理的情報は、連続時間を基に定式化された連続時間モデルでは見通しよく表現されているのに対し、離散時間モデルでは見通しが悪くなるという問題がある。すなわち従来の離散時間モデルには、連続時間系の特性に関する事前知識を活用することが困難であるという課題がある。

【 0 0 0 7 】

本発明はこうした課題に鑑みてなされたものであり、その目的は、数学的モデルが未知の系に対し、連続時間系のデータ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定することにある。

10

【課題を解決するための手段】

【 0 0 0 8 】

上記課題を解決するために、本発明のある態様のデータ処理装置は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

20

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定するデータ処理装置である。このデータ処理装置は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得部と、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \dots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{bmatrix}$$

に関して、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} & x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\ &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する可制御性グラミアン計算部と、

推定された可制御性グラミアンを出力する出力部と、を備える。

【0 0 0 9】

ある実施の形態では、時系列的な状態データの組はノイズを含んでもよい。可制御性グラミアン計算部は、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} & x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\ &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

に代えて、線形方程式

【数 1 0 8】

$$\begin{aligned} & x_{i1}^\top (E(h)E_0^+)X(E(h)E_0^+)^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\ &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^+)BB^\top (E(t)E_0^+)^\top x_{i1} dt \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \tag{23}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する。

【0 0 1 0】

ある実施の形態では、可制御性グラミアン計算部は、解 X の行列成分の一部または全部

の符号に関する事前知識を用いて数値計算を行う。

【 0 0 1 1 】

本発明の別の態様もまた、データ処理装置である。この装置は、

【 数 1 4 2 】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【 数 1 3 9 】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【 数 1 】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【 数 2 】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【 数 1 3 8 】

$$G(t)$$

の

【 数 1 4 4 】

$$t = \infty$$

における極限

【 数 1 4 0 】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する。このデータ処理装置は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得部と、

【数 7】

$$Q := I$$

としたときの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する最大化条件計算部と、

推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を出力する出力部と、を備える。

【 0 0 1 2 】

ある実施の形態では、

【数 4 7】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

であるとき、最大化条件計算部は、

【数 9】

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*$$

の最大固有値に対応する単位固有ベクトルを計算することにより第 1 入力行列

【数 1 1】

$$\tilde{\mathbf{B}}_1^*$$

を求めてもよい。

【 0 0 1 3 】

ある実施の形態では、

【数 4 9】

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n$$

であるとき、

【数 9】

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*$$

の対角成分のうち最大となるものが (k , k) 成分としたとき、最大化条件計算部は、 (k , k) 成分が 1 でありそれ以外の成分が 0 である n × n 行列を計算することにより第 2 入力行列

【数 1 2】

$$\tilde{\mathbf{B}}_2^*$$

を求めてもよい。

【 0 0 1 4 】

本発明のさらに別の態様は、制御システムである。この制御システムは、制御対象を制御するためのものであり、制御対象からの時系列的な状態データの組を検出するセンサと

、前述のデータ処理装置と、制御対象を制御する制御部と、を備える。センサは、検出した時系列的な状態データの組をデータ処理装置のデータ取得部に送信し、データ処理装置は、推定した

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を制御部に送信し、制御部は、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

に基づいて制御対象を制御する。

【0 0 1 5】

本発明のさらに別の態様は、データ処理方法である。この方法は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定するデータ処理方法である。この方法は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \dots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{bmatrix}$$

に関して、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\ = - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, q$)

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する計算ステップと、推定された可制御性グラミアンを出力するステップと、
を備える。

20

【0 0 1 6】

本発明のさらに別の態様もまた、データ処理方法である。この方法は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

30

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

50

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するデータ処理方法である。この方法は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7】

$$Q := I$$

としたときの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned}
 & x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\
 & = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, q)
 \end{aligned}$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 141】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する計算ステップと、推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を出力するステップと、を備える。

【0017】

本発明のさらに別の態様は、プログラムである。このプログラムは、

【数 142】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 139】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、A を未知の n × n 行列、B を既知の n × m 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

20

を推定するプログラムであって、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

30

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}]$$

に関して、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ = - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する計算ステップと、

推定された可制御性グラミアンを出力するステップと、をコンピュータに実行させる。

【0 0 1 8】

本発明のさらに別の態様もまた、プログラムである。このプログラムは、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するプログラムであって、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7】

$$Q := I$$

としたきの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 141】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する計算ステップと、推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となる時の入力行列を出力するステップと、をコンピュータに実行させる。

【0019】

本発明のさらに別の態様はデータ処理装置である。このデータ処理装置は、

【数 142】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、
を A の変化量とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される行列 A の可制御性グラミアンの極限を

【数 2 3 1】

$$G_c(A)$$

としたとき、

【数 2 3 2】

$$G_c(A + \Delta)$$

を推定する。

このデータ処理装置は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得部と、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

20

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}]$$

に関して、

線形方程式

【数 2 2 5】

30

$$\begin{aligned} & z_i^\top(h)Xz_i(h) - z_i^\top(0)Xz_i(0) \\ & \quad + \int_0^h z_i^\top(t)(\Delta X + X\Delta^\top)z_i(t) dt \\ & = - \int_0^h z_i^\top(t)BBz_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (47)$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 2 3 3】

40

$$G_c(A + \Delta) = X$$

を推定する可制御性グラミアン計算部と、

推定された可制御性グラミアンを出力する出力部と、を備える

【0 0 2 0】

なお、以上の構成要素の任意の組合せ、本発明の表現を装置、方法、システム、記録媒体、コンピュータプログラムなどの間で変換したものもまた、本発明の態様として有効である。

【発明の効果】

50

【 0 0 2 1 】

本発明によれば、数学的モデルが未知の系に対し、連続時間系のデータ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定することができる。

【 図面の簡単な説明 】

【 0 0 2 2 】

【 図 1 】 第 1 の実施の形態に係るデータ処理装置の機能ブロック図である。

【 図 2 】 第 2 の実施の形態に係るデータ処理装置の機能ブロック図である。

【 図 3 】 第 7 の実施の形態に係る制御システムの機能ブロック図である。

【 図 4 】 第 8 の実施の形態に係る制御システムの機能ブロック図である。

【 図 5 】 第 9 の実施の形態に係るデータ処理方法の処理手順を示すフローチャートである

10

。

【 図 6 】 第 1 0 の実施の形態に係るデータ処理方法の処理手順を示すフローチャートである。

【 図 7 】 時間区間

【 数 1 5 1 】

$$[t_{11}, t_{12}]$$

におけるノイズを含まない時系列データを示す図である。

【 図 8 】 時間区間

【 数 1 5 2 】

$$[t_{21}, t_{22}]$$

におけるノイズを含まない時系列データを示す図である。

【 図 9 】 時間区間

【 数 1 5 3 】

$$[t_{31}, t_{32}]$$

におけるノイズを含まない時系列データを示す図である。

【 図 1 0 】 時間区間

【 数 1 5 4 】

$$[t_{41}, t_{42}]$$

におけるノイズを含まない時系列データを示す図である。

【 図 1 1 】 時間区間

【 数 1 5 5 】

$$[t_{51}, t_{52}]$$

におけるノイズを含まない時系列データを示す図である。

【 図 1 2 】 時間区間

【 数 1 5 6 】

$$[t_{61}, t_{62}]$$

におけるノイズを含まない時系列データを示す図である。

【 図 1 3 】 時間区間

50

【数 1 5 1】

$$[t_{11}, t_{12}]$$

におけるノイズを含む時系列データを示す図である。

【図 1 4】時間区間

【数 1 5 2】

$$[t_{21}, t_{22}]$$

におけるノイズを含む時系列データを示す図である。

【図 1 5】時間区間

【数 1 5 3】

$$[t_{31}, t_{32}]$$

におけるノイズを含む時系列データを示す図である。

【図 1 6】時間区間

【数 1 5 4】

$$[t_{41}, t_{42}]$$

におけるノイズを含む時系列データを示す図である。

【図 1 7】時間区間

【数 1 5 5】

$$[t_{51}, t_{52}]$$

におけるノイズを含む時系列データを示す図である。

【図 1 8】時間区間

【数 1 5 6】

$$[t_{61}, t_{62}]$$

におけるノイズを含む時系列データを示す図である。

【図 1 9】第 7 の実施の形態の変形例に係る制御システムの機能ブロック図である

【発明を実施するための形態】

【0 0 2 3】

以下、本発明を好適な実施の形態をもとに図面を参照しながら説明する。実施の形態は、発明を限定するものではなく例示である。実施の形態に記述されるすべての特徴やその組み合わせは、必ずしも発明の本質的なものであるとは限らない。各図面に示される同一又は同等の構成要素、部材、処理には、同一の符号を付するものとし、適宜重複した説明は省略する。また、各図に示す各部の縮尺や形状は、説明を容易にするために便宜的に設定されており、特に言及がない限り限定的に解釈されるものではない。また、本明細書又は請求項の中で「第 1」、「第 2」等の用語が用いられる場合、特に言及がない限りこの用語はいかなる順序や重要度を表すものでもなく、ある構成と他の構成とを区別するためのものである。また、各図面において実施の形態を説明する上で重要ではない部材の一部は省略して表示する。

【0 0 2 4】

具体的な実施の形態を説明する前に、先ず基本となる知見を説明する。

[記号の定義]

以下、本明細書で用いる数学記号の定義を述べる。

R : 実数

【数 1 2 8】

$$\mathbf{R}_+$$

: 正の実数

【数 1 2 9】

$$\mathbf{R}_{0+}$$

: 非負の実数

【数 1 3 0】

$$\mathbf{S}_n$$

: $n \times n$ 対称行列

【数 1 3 1】

$$\mathbf{D}_n$$

: $n \times n$ 対角行列

0 : 零行列

I : 単位行列

【数 1 3 2】

$$e_i$$

: n 次元実ベクトル空間の i 番目の標準基底

【数 1 3 3】

$$A^+$$

: 行列 A のムーア - ペンローズ擬似逆行列

【数 1 3 4】

$$\lambda_{max}(A)$$

: すべての固有値が実数である実対称行列 A の最大固有値

【数 1 3 5】

$$\text{tr}(A)$$

: 正方行列 A のトレース
(任意の正方行列 A, B について、

【数 1 3】

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

が成り立つことに注意)

【数 1 4】

$$\|A\|_F$$

: 行列 A のフロベニウスノルム (すなわち、
【数 1 5】

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$$

である)

さらに、 (i, j) 成分が

【数 1 3 6】

$$p_{ij}$$

である $n \times n$ 対称行列 P (従って、

【数 1 3 7】

$$p_{ij} = p_{ji}$$

) に対し、
列ベクトル

【数 1 6】

$$\text{rvec}(P) \in \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)}$$

および行ベクトル

【数 1 7】

$$\text{lvec}(x) \in \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)}$$

を以下で定義する。

【数 1 8】

$$\text{rvec}(P) = [p_{11} \mid p_{12} \ p_{22} \mid \cdots \mid p_{1n} \ p_{2n} \ \cdots \ p_{nn}]^\top$$

【数 1 9】

$$x^\top P x = \text{lvec}(x) \text{rvec}(P)$$

例えば、

【数 2 0】

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

【数 2 1】

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{S}_2$$

に対し、

【数 2 2】

$$\text{lvec}(x) = [x_1^2 \quad 2x_1x_2 \quad x_2^2]$$

【数 2 3】

$$\text{rvec}(P) = [p_{11} \ p_{12} \ p_{22}]^\top$$

である。

【0 0 2 5】

[線形系と可制御性グラミアン]

以下の線形系を考える。

【数 2 4】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

ここで、

【数 2 5】

$$x(t) \in \mathbf{R}^n$$

は系の状態、

【数 2 6】

$$u(t) \in \mathbf{R}^m$$

は制御入力、

【数 2 7】

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

は $n \times n$ の定数行列、

【数 2 8】

$$B \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

は $n \times m$ の定数行列である。

このとき可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

は、以下で定義される。

【数 2 9】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau \quad (2)$$

ただし

【数 3 0】

$$t \in \mathbf{R}_+$$

である。

【数 3 1】

$$\int_0^t \|u(\tau)\|_2 d\tau = 1$$

を満たす制御入力

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

が与えられたとき、可制御性グラミアンは、初期状態から始めて、時刻 t に到達可能な状態の集合を表す。

系が可制御であるとき（すなわち

【数 3 2】

$$\text{rank}([B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]) = n$$

であるとき)、

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

は正則である。このとき到達可能な状態の集合は、以下で表される。

【数 3 3】

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid x^\top G^{-1}(t)x \leq 1\}$$

特に

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における可制御性グラミアンの極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

により、到達可能な方向を定量化することができる。

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

は行列

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

の固有値の和である。従って

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

は系の可制御性の強さの指標となる。

【0 0 2 6】

以下の補題は、可制御性グラミアンの計算の基本である（例えば、非特許文献 9 参照）

。

【0 0 2 7】

(補題 1)

(1) で示される系に対し、リアプノフ方程式

【数 3 4】

$$XA^{\top} + AX = -BB^{\top} \quad (3)$$

を考える。ここで

【数 3 5】

$$X \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

は方程式 (1) の未知変数である。行列 A がフルピッツ行列 (すなわち、行列 A のすべての固有値の実部が負である) であれば、一意解 X が存在し、これは

10

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

に等しい (補題 1 終)。

【0 0 2 8】

【データ駆動型の推定および最大化問題】

(1) の数学的モデルが得られれば、可制御性グラミアン

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

は計算可能であり、(2) または (3) によって最適化される。しかし数学的モデルが得られない場合は、別のアプローチが必要となる。可能なアプローチに 1 つに、系の挙動の測定データを使うものがある。これは以下のように定式化される。

【0 0 2 9】

【数 3 6】

$$t_i \in \mathbf{R}_{0+} \quad (i = 1, 2)$$

30

および

【数 3 7】

$$x_1 \in \mathbf{R}^n$$

に関し、

【数 3 8】

$$x(t_1) = x_1$$

40

および

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

の条件で、

(1) の状態

50

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を

【数 4 0】

$$x(t, t_1, x_1) \in \mathbf{R}^n$$

と表す。

また、同じ境界条件および入力の下での時間区間

【数 4 1】

$$[t_1, t_2]$$

における状態軌道のセグメントを

【数 4 2】

$$x([t_1, t_2], x_1) \subset [t_1, t_2] \times \mathbf{R}^n$$

20

と表す。

【0 0 3 0】

以上により、与えられたデータを基に

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定および最大化する問題は、以下のように整理される。

(問題 1)

(1) で示される系に関し、行列 A はフルピッツ行列で未知であるとする。 q 個の状態軌道のセグメントからなるデータの組

【数 4 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots; q)$$

が与えられるとする。ただし

【数 4 4】

$$t_{i1} < t_{i2}$$

である。

(i) 既知の入力行列 B が与えられたときに、

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定する。

(i i)

【数 4 5】

$$\|B\|_F \leq 1$$

の条件の下で、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

を最大化する入力行列

【数 4 6】

$$B \in \mathbf{B}$$

を求める。ここで

【数 4 7】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

は、可能な入力行列の所定の組である。

【0 0 3 1】

以下の4つの点に注意する。第1に、問題1(i)では、入力行列Bは既知であるとする。一方、問題1(ii)の主要な目的は、系を制御するための最適な入力チャネルを求めることにある。この観点に立てば、問題1(i)は、入力行列Bの性能解析に相当する。すなわちこの場合、

30

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

の性能測定のために、入力行列Bを評価することになる。

【0 0 3 2】

第2に、一般に

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

40

はBのノルムとともに増加する。従って、問題1(ii)における

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

の最大化を考えるために、

【数 4 5】

$$\|B\|_F \leq 1$$

の条件が必要となる。

【0 0 3 3】

第 3 に、B は柔軟に選ぶことができるが、以下の 2 つの設定が基本的である。

【数 4 7】

$$B \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

【数 4 9】

$$B = D_n$$

前者は、系への入力が完全に任意の場合である。後者は、系が n 個のノードからなるネットワークであり、入力が各ノードに 1 つずつ加えられる場合に有用である。B のその他の設定に関しては、上記の設定からの近似解を得ることができる。これは例えば、特異値分解に基づく低ランク行列近似と同様に、B の影響の少ない部分を切り捨てることにより得られてもよい。

【0 0 3 4】

第 4 に、得られるデータの組は連続時間信号であり、ノイズを含まないと仮定する。しかしこの仮定が成り立たない場合も、本明細書で説明する手法は、上記の問題に適用可能である。この点については後述する。

【0 0 3 5】

[安定解析におけるデータ駆動型のリアプノフ方程式の解法]

【0 0 3 6】

$B = 0$ としたときの (1) の系を考える。

【数 5 0】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (4)$$

この系では、リアプノフ方程式は以下で与えられる。

【数 5 1】

$$YA + A^T Y = -Q \quad (5)$$

ここで

【数 5 2】

$$Q \in \mathbf{S}_n$$

は与えられた対称行列であり、

【数 5 3】

$$Y \in \mathbf{S}_n$$

はこの方程式の未知変数である。A がフルピッツ行列であれば、一意解

【数 5 3】

$$Y \in \mathbf{S}_n$$

が存在する。

10

【数 5 4】

$$Q = BB^T$$

であっても、(5) は (3) と異なる点に注意する。

【0037】

ここでは、A が未知であるが、状態軌道のデータの組が与えられたときに、(5) を解くことを考える。この問題は以下のように定式化される。

(問題 2)

(4) で示される系に関し、行列 A はフルピッツ行列で未知であるとする。対称行列

20

【数 5 2】

$$Q \in \mathbf{S}_n$$

および q 個の状態軌道のセグメントからなるデータの組

【数 4 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots; q)$$

が与えられるとする。ただし

【数 4 4】

$$t_{i1} < t_{i2}$$

である。このとき (5) の解

【数 5 5】

$$Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

を求める。

【0038】

問題 2 の解は、以下のように与えられる。(4) の、初期状態 $x(0)$ からの状態軌道 x を考える。(5) の両辺に関し、 $x(t)$ の二次形式を作ることにより、

【数 5 6】

$$x^T(t)(YA + A^T Y)x(t) = -x^T(t)Qx(t) \quad (6)$$

が得られる。さらにこの両辺を時間区間

【数 4 1】

$$[t_1, t_2]$$

で積分することにより、

【数 5 7】

$$\int_{t_1}^{t_2} x^\top(t)(YA + A^\top Y)x(t)dt = - \int_{t_1}^{t_2} x^\top(t)Qx(t)dt \quad (7)$$

が得られる。(7)の左辺は

【数 5 8】

$$x^\top(t_2)Yx(t_2) - x^\top(t_1)Yx(t_1)$$

に等しい。なぜなら、(4)より

【数 5 9】

$$\begin{aligned} x^\top(t)(YA + A^\top Y)x(t) &= x^\top(t)YA + A^\top Yx(t) \\ &= x^\top(t)Y\dot{x}(t) + \dot{x}^\top(t)Yx(t) = \frac{d}{dt}(x^\top(t)Px(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

だからである。以上により、(7)は以下のように表される。

【数 6 0】

$$x^\top(t_2)Yx(t_2) - x^\top(t_1)Yx(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} x^\top(t)Qx(t)dt \quad (9)$$

【0 0 3 9】

問題 2 のデータの組を(9)に適用することにより、以下の q 個の方程式が得られる。

【数 6 1】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1})Yx(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Yx_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1})Qx(t, t_{i1}, x_{i1})dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで

【数 6 2】

$$x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}), x_{i1}$$

および右辺は既知の定数であるため、(10)は、未知の行列 Y に関する線形方程式であると考えることができる。標準的な形式では、(10)は以下のように表される。

【数 6 3】

$$D_1 \text{rvec}(Y) = d_1 \quad (11)$$

ここで、

【数 6 4】

$$\text{rvec}(Y) \in \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)}$$

は未知変数である。

また、

【数 2 3 4】

$$D_1 \in \mathbf{R}^{q \times (1/2)n(n+1)}$$

は

【数 6 5】

$$D_1 := \begin{bmatrix} \text{lvec}(x(t_{12}, t_{11}, x_{11})) - \text{lvec}(x_{11}) \\ \text{lvec}(x(t_{22}, t_{21}, x_{21})) - \text{lvec}(x_{21}) \\ \vdots \\ \text{lvec}(x(t_{q2}, t_{q1}, x_{q1})) - \text{lvec}(x_{q1}) \end{bmatrix}$$

で与えられる行列であり、

【数 6 6】

$$d_1 \in \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)}$$

は、(10)の右辺の値を

【数 6 7】

$$i = 1, 2, \dots, q$$

に関して並べてできるベクトルである。

【0040】

以上により、問題2の解は以下のように得られる。

【0041】

(補題2)

問題2を考える。

【数 6 8】

$$\text{rank}(D_1) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (12)$$

であれば、(10)には一意解Yが存在し、これは問題2の解に等しい(補題2終)。

【0042】

補題2は、(4)で示される系の状態軌道のデータの組を用いて線形方程式(10)(

言い換えれば (11) を解くことによって、問題 2 の解が得られることを示す。

【0043】

[可制御性グラミアンの推定]

以下、問題 1 (i) の解法について説明する。

【0044】

[データ変換]

前述の補題 1 により、問題 1 (i) は、データ駆動型手法によりリアプノフ方程式 (3) を解くことに帰結する。以下、(10) を得たのと同様の手法を用いて、データベースの (3) の解法を得る。(6) と同様に、(3) の左辺と (1) で $B = 0$ としたときの状態 $x(t)$ の二次形式を作る。

【数69】

$$x^\top(t)(XA^\top + AX)x(t) = x^\top(t)XA^\top x(t) + x^\top(t)AXx(t)$$

しかし今度は (8) の場合と異なり、一般的に、

【数70】

$$A^\top x(t)$$

(および

【数71】

$$x^\top(t)A$$

を)

【数72】

$$\dot{x}(t)$$

で置き換えることはできない。なぜなら $x(t)$ は (1) の状態であり、一般に

【数73】

$$\dot{x}(t) \neq A^\top x(t)$$

だからである。

【0045】

そこで先ず、行列 A の転置行列で定義される以下の系を導入する。

【数74】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

ここで

【数75】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

は状態である。この系において、

【数 7 6】

$$z(t_1) = z_1 \in \mathbf{R}^n$$

であるときの状態

【数 1 4 3】

$$z(t)$$

を表すのに、記号

【数 7 7】

$$z(t, t_1, z_1)$$

を用いる。

【0 0 4 6】

ここで二次形式

【数 7 8】

$$z^\top(t)(XA^\top + AX)z(t)$$

を作る。これは

【数 7 9】

$$\begin{aligned} z^\top(t)(XA^\top + AX)z(t) &= z^\top(t)XA^\top z(t) + z^\top(t)AXz(t) \\ &= z^\top(t)X\dot{z}(t) + \dot{z}^\top(t)Xz(t) = \frac{d}{dt}z^\top(t)Xz(t) \end{aligned} \quad (14)$$

を満たす。一方、(3)により

【数 8 0】

$$\int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)(XA^\top + AX)z(t)dt = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (15)$$

が成り立つ。従って(14)と(15)とにより、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

が得られる。これは(19)と同じ形をしている。

【0 0 4 7】

しかしながらここでは、問題 1 における(13)の状態軌道のデータの組は得られていない。この困難さは、以下の結果によって解決することができる。

【0 0 4 8】

(補題 3)

問題 1 における

【数 4 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots; q)$$

を考える。

【数 8 2】

$$q \geq n$$

であるとし、データの組から n 個の任意のデータを選ぶ。ただし n は、(1)における

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

の次元である。選ばれたデータは、一般性を失うことなく、

【数 8 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

であると考えてよい。

【数 8 4】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})] \quad (17)$$

【数 8 5】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}] \quad (18)$$

とする。

【数 8 6】

$$E_0$$

が正則であれば、

【数 8 7】

$$i \in \{1, 2, \dots, q\}$$

【数 8 8】

$$t \in [0, h]$$

に関し

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

が成り立つ。ここで

【数 9 0】

$$h := \min_{i \in \{1, 2, \dots, q\}} (t_{i2} - t_{i1})$$

である（補題 3 終）。

【0 0 4 9】

（証明）

与えられた

【数 8 7】

$$i \in \{1, 2, \dots, q\}$$

【数 9 1】

$$j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

に関し、データ点

【数 9 2】

$$x_{j1}$$

および状態軌道

【数 9 3】

$$x([t_{j1}, t_{j2}], x_{j1})$$

を考える。任意の

【数 9 4】

$$t \in [0, t_{j2} - t_{j1}]$$

に関し、

【数 9 5】

$$x^\top(t + t_{j1}, t_{j1}, x_{j1})$$

と

【数 9 2】

$$x_{j1}$$

との積は以下で与えられる。

【数 9 6】

$$\begin{aligned} x^\top(t + t_{j1}, t_{j1}, x_{j1})x_{i1} &= (e^{At}x_{j1})^\top x_{i1} = x_{j1}^\top e^{A^\top t}x_{i1} \\ &= x_{j1}^\top z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) \end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, n$ に関してこの関係を得ることにより、

【数 8 8】

$$t \in [0, h]$$

に関して以下が得られる。

【数 9 7】

$$E^\top(t)x_{i1} = E_0^\top z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1})$$

これは

【数 8 6】

$$E_0$$

が正則であれば、

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

であることを意味する（証明終）。

【0 0 5 0】

この補題により、問題 1 のデータの組を、(13) の状態軌道のデータの組に変換することができる。ここで

【数 8 2】

$$q \geq n$$

の仮定は制限的でないことに注意する。なぜなら、状態軌道を複数のセグメントに分割することにより、データ数を増やすことができるからである。

【0 0 5 1】

[データ駆動型の推定]

(16)、(19) および

【数 8 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

により、線形方程式

【数 8 4】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})] \quad (17)$$

が得られる。これは

【数 1 0 0】

10

$$D_2 := \begin{bmatrix} \text{lvec}((E(h)E_0^{-1})^\top x_{11}) - \text{lvec}(x_{11}) \\ \text{lvec}((E(h)E_0^{-1})^\top x_{21}) - \text{lvec}(x_{21}) \\ \vdots \\ \text{lvec}((E(h)E_0^{-1})^\top x_{q1}) - \text{lvec}(x_{q1}) \end{bmatrix}$$

およびベクトル

【数 1 0 1】

20

$$d_2 \in \mathbf{R}^{(1/2)n(n+1)}$$

に関し

【数 1 0 2】

$$D_2 \text{rvec}(X) = d_2 \quad (21)$$

と表される。

【0 0 5 2】

30

結果として、問題 1 の解は以下のように得られる。

【0 0 5 3】

(定理 1)

問題 1 (i) を考える。

【数 8 2】

$$q \geq n$$

であるとする。

【数 1 0 3】

40

$$\text{rank}(D_2) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (22)$$

であれば、(20) に一意解 X が存在し、これは問題 1 の解に等しい (定理 1 終)。

【0 0 5 4】

定理 1 によれば、問題 1 (i) の解は、線形方程式 (20) の解として与えられる。

【0 0 5 5】

上記では、得られるデータの組は連続時間信号であり、ノイズを含まないと仮定した。しかしこれに限られず、以下に示すように、前述の結果は、ノイズを含むデータに適用することもできる。

【数 0 5 6】

データ

【数 4 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots; q)$$

はノイズを含むものとする。ノイズの影響を抑制するために、補題 3 における行列

【数 1 4 5】

$$E(t)$$

および

【数 8 6】

$$E_0$$

を作るのに、より多くのデータを使うことが好ましい。従って

【数 1 0 4】

$$p \leq q$$

に関し、

【数 1 0 5】

$$E(t) \in \mathbf{R}^{n \times p}$$

【数 1 0 6】

$$E_0 \in \mathbf{R}^{n \times p}$$

が得られる。そして (19) およびムーア - ペンローズ擬似逆行列の性質から

【数 1 0 7】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) \simeq (E(t)E_0^+)^{\top} x_{i1}$$

の関係が得られる。結果として、(20) の変形

【数 1 0 8】

$$\begin{aligned}
 & x_{i1}^\top (E(h)E_0^+)X(E(h)E_0^+)^\top x_{i1} - x_{i1}^\top X x_{i1} \\
 &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^+)BB^\top (E(t)E_0^+)^\top x_{i1} dt \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, p) \qquad (23)
 \end{aligned}$$

から、問題 1 (i) の近似解が得られる。ここで

【数 1 4 5】

10

$$E(t)$$

および

【数 8 6】

$$E_0$$

は、p 個のデータおよび

【数 1 0 9】

$$h := \min_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} (t_{i2} - t_{i1})$$

に関して定義される。

【0 0 5 7】

次に、データの組が、状態軌道の非周期的な標本データとして与えられると仮定する。
(20) の左辺は、各状態軌道の端点からなるので、状態軌道の標本データから計算することができる。これに対して(20)の右辺は、状態軌道の二次形式の積分である。これは、例えば台形公式を用いることにより、標本データから近似的に計算することができる。これらの原理を用いて、上記問題の近似解を得ることができる。

30

【0 0 5 8】

[可制御性グラミアンの最大化]

以下、問題 1 (i i) の解法について説明する。

【0 0 5 9】

[入力行列の特徴づけ]

入力行列 B に関する可制御性グラミアン

40

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

の最大化を示す。

【0 0 6 0】

(補題 4)

(1) で示される系に関し、行列 A はフルビッツ行列であるとする。以下の最大化問題を考える。

50

【数 1 1 0】

$$\begin{cases} \max_{B \in \mathbf{B}} \operatorname{tr}(G(\infty)) \\ \text{s.t. } \|B\|_F \leq 1 \end{cases} \quad (24)$$

ここで

【数 4 7】

10

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

は、可能な入力行列の所定の組である。

【数 1 1 1】

$$Y^* := \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} e^{A \tau} d\tau \quad (25)$$

とおく（行列 A がフルビッツ行列なので、これは有限の正定値である）。このとき以下の命題が成り立つ。

(i)

【数 1 1 2】

$$Y^*$$

の最大の固有値に関する単位固有ベクトルを

【数 1 1 3】

$$B_1^* \in \mathbf{R}^n$$

とおく。行列

【数 1 1 4】

$$B_1^*$$

は、

【数 4 7】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

に対する (24) の解であり、

【数 1 1 5】

$$\text{tr}(G(\infty)) = \lambda_{\max}(Y^*) \text{tr}(B_1^*(B_1^*)^\top) \quad (26)$$

が成り立つ。

(i i)

【数 1 1 6】

$$B_2^* \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

を、(k , k) 成分が 1 でありそれ以外の成分が 0 である対角行列であるとする。ただし

【数 1 1 7】

$$k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

は、行列

【数 1 1 2】

$$Y^*$$

の対角成分が最大となる時の行番号 (列番号でもある) である。

行列

【数 1 1 8】

$$B_2^*$$

は、

【数 4 9】

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n$$

に対する (24) の解であり、

【数 1 1 9】

$$\text{tr}(G(\infty)) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} y_i \quad (= y_k) \quad (27)$$

が成り立つ。ここで

【数 1 2 0】

$$y_i \in \mathbf{R}$$

は、

【数 1 1 2】

 Y^*

の i 番目の対角成分である (補題 4 終)。

【0 0 6 1】

(証明)

(i) (例えば、非特許文献 10 参照)。

(ii) 行列 B の i 番目の対角成分を

【数 1 2 1】

 $b_i \in \mathbf{R}$

とおく。(2) およびトレースの性質から

【数 1 2 2】

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(G(\infty)) &= \operatorname{tr} \left(\int_0^\infty e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau \right) \\ &= \int_0^\infty \operatorname{tr}(e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau}) d\tau = \int_0^\infty \operatorname{tr}(e^{A^\top \tau} e^{A\tau} B B^\top) d\tau \\ &= \operatorname{tr} \left(\int_0^\infty e^{A^\top \tau} e^{A\tau} B B^\top d\tau \right) = \operatorname{tr} \left(\int_0^\infty e^{A^\top \tau} e^{A\tau} d\tau B B^\top \right) \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。任意の

【数 1 2 3】

 $B \in \mathbf{D}_n$

に関し、

【数 1 2 4】

 $B B^\top$

は対角行列である。従って (28) から、

【数 4 5】

$$\|B\|_F \leq 1$$

(すなわち

【数 1 2 5】

$$\| [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \|_2 \leq 1$$

)
を満たす任意の

【数 1 2 3】

$$B \in \mathbf{D}_n$$

に関し、

【数 1 2 6】

$$\begin{aligned} \text{tr}(G(\infty)) &= \text{tr} \left(\int_0^\infty e^{A^\top \tau} e^{A\tau} d\tau B B^\top \right) = \sum_{i=1}^n y_i b_i^2 \\ &\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} y_i \end{aligned} \quad (29)$$

が成り立つ。一方、(29)および

【数 1 1 8】

$$B_2^*$$

の定義から、

【数 1 1 8】

$$B_2^*$$

に関し(27)が成り立つ。さらに

【数 1 2 7】

$$\|B_2^*\|_F = 1$$

である(証明終)。

【0 0 6 2】

[データ駆動型最大化問題]

補題 4 は、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

を最大化する入力行列が、(25)における

【数 1 1 2】

$$Y^*$$

によって特徴づけられることを意味する。一方

【数 1 1 2】

$$Y^*$$

は、

【数 7】

$$Q := I$$

に関するリアプノフ方程式 (5) の一意解に等しい。従って、補題 2 および補題 4 より、以下が成り立つ。

【0 0 6 3】

(定理 2)

問題 1 (i i) を考える。問題 1 で与えられたデータの組に関し、(1 2) が成り立つとする。

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を

【数 7】

$$Q := I$$

に関する

【数 6 1】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (10)$$

の解とする。さらに、補題 4 において

【数 1 1 2】

$$Y^*$$

に関して

【数 1 1 4】

$$B_1^*$$

および

【数 1 1 8】

$$B_2^*$$

を定めたのと同様に、

【数 1 1】

$$\tilde{B}_1^*$$

および

【数 1 2】

$$\tilde{B}_2^*$$

を

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

に関する入力行列とする。このとき以下の命題が成り立つ。

(i) 入力行列

【数 1 1】

$$\tilde{B}_1^*$$

は、

【数 4 7】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

に関し、問題 1 (i i) の解である。

(i i) 入力行列

【数 1 2】

$$\tilde{\mathbf{B}}_2^*$$

は、

【数 4 9】

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n$$

に関し、問題 1 (i i) の解である (定理 2 終) 。

20

【 0 0 6 4】

定理 2 は、線形方程式 (1 0) を解き、補題 4 の方法で入力行列を作ることにより、問題 1 (i i) の解が求められることを示す。

【 0 0 6 5】

[第 1 の実施の形態]

図 1 は、第 1 の実施の形態に係るデータ処理装置 1 の機能ブロック図である。データ処理装置 1 は、データ取得部 1 0 と、可制御性グラミアン計算部 1 2 と、出力部 1 5 と、を備える。データ処理装置 1 は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、A を未知の n × n 行列、B を既知の n × m 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 138】

$$G(t)$$

の

【数 144】

$$t = \infty$$

における極限

【数 140】

$$G(\infty)$$

20

を推定するものである。

【0066】

データ取得部 10 は、複数の時間区間における時系列的な状態データの組を取得する。
以下の説明では、データ取得部 10 は、 q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するものとする。

【0067】

可制御性グラミアン計算部 12 は、データ取得部 10 が取得した状態データの組

【数 145】

$$E(t)$$

に基づいて、

40

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} & x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で解くことにより

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する。

【0 0 6 8】

出力部 1 5 は、可制御性グラミアン計算部 1 2 が推定した可制御性グラミアンを出力する。

【0 0 6 9】

ここで制御対象は、例えば以下のようなものである。

(例 1) 電力システム。時系列データは、各発電所の発電量、電力使用量、温度、湿度などである。

(例 2) ロボット。時系列データは、負荷、姿勢、外力、運動状態などである。

(例 3) 人体。時系列データは、血圧、脈拍、体温、血液成分などである。

(例 4) 化学工場。時系列データは、温度、湿度、気圧、空気中の塵埃量などである。

(例 5) メンテナンス対象となる装置。時系列データは、故障アラーム頻度、電気抵抗、金属疲労度、発熱量などである。

これらの制御対象は、ネットワークシステムとして構成される。ここから出力される時系列データを記述する数学的モデルは複雑であり、一般にはこうした数学的モデル自体が未

知である。これに対し本実施の形態を用いて可制御性グラミアンを推定して出力することにより、数学的モデルを未知としたまま、ネットワークシステムとして構成された制御対象のいずれのノードを入力チャネルとして制御すべきかを判断することができる。以上の特徴は、下記のすべての実施の形態においても共通する。

【 0 0 7 0 】

本実施の形態によれば、数学的モデルが未知の系に対し、取得した連続時間的な状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定することができる。

【 0 0 7 1 】

[第 2 の実施の形態]

データ取得部が取得する時系列的な状態データの組はノイズを含んでいてもよい。この場合、可制御性グラミアン計算部 1 2 は、(2 0) に代えて

【 数 1 0 8 】

$$\begin{aligned} & x_{i1}^\top (E(h)E_0^+)X(E(h)E_0^+)^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ &= - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^+)BB^\top (E(t)E_0^+)^\top x_{i1} dt \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \quad (23)$$

から、問題 1 (i) の近似解を計算することにより

【 数 1 4 6 】

$$G(\infty) = X$$

を推定する。ここで

【 数 1 4 5 】

$$E(t)$$

および

【 数 8 6 】

$$E_0$$

は、p 個のデータおよび

【 数 1 0 9 】

$$h := \min_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} (t_{i2} - t_{i1})$$

に関して定義される。

【 0 0 7 2 】

本実施の形態によれば、状態データがノイズを含む場合であっても、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定することができる。

【 0 0 7 3 】

[第 3 の実施の形態]

【 0 0 7 4 】

状態データがノイズを含む場合、(2 3) の解 X の行列成分の一部または全部の符号に関する知識が事前知識として与えられていてもよい。この場合、可制御性グラミアン計算部 1 2 は、当該事前知識を用いて数値計算を行う。

【 0 0 7 5 】

本実施の形態によれば、状態データがノイズを含む場合であっても、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを、より精度よく推定することができる。

【 0 0 7 6 】

[第 4 の実施の形態]

図 2 は、第 4 の実施の形態に係るデータ処理装置 1 の機能ブロック図である。データ処理装置 2 は、データ取得部 1 0 と、最大化条件計算部 1 4 と、出力部 1 5 と、を備える。データ処理装置 2 は、

10

【 数 1 4 2 】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【 数 1 3 9 】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【 数 1 】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【 数 2 】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【 数 1 3 8 】

40

$$G(t)$$

の

【 数 1 4 4 】

$$t = \infty$$

における極限

50

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するものである。

【0 0 7 7】

データ取得部 1 0 は、複数の時間区間における時系列的な状態データの組を取得する。
以下の説明では、データ取得部 1 0 は、q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

20

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するものとする。

【0 0 7 8】

最大化条件計算部 1 4 は、データ取得部 1 0 が取得した状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

に基づいて、線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算することにより

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を計算する。

【0 0 7 9】

出力部 1 5 は、最大化条件計算部 1 4 が推定した最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を出力する。

【0 0 8 0】

本実施の形態によれば、数学的モデルが未知の系に対し、取得した連続時間的な状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を推定することができる。

10

【0 0 8 1】

[第 5 の実施の形態]

第 5 の実施の形態では、

【数 4 7】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

であるとき、最大化条件計算部 1 4 は、

【数 9】

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*$$

の最大固有値に対応する単位固有ベクトルを計算することにより

第 1 入力行列

【数 1 1】

$$\tilde{\mathbf{B}}_1^*$$

30

を求める。

【0 0 8 2】

本実施の形態によれば、

【数 4 7】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

40

であるときに、有効な入力行列を得ることができる。

【0 0 8 3】

[第 6 の実施の形態]

第 6 の実施の形態では、

【数 4 9】

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n$$

であるとき、

【数 9】

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*$$

の対角成分のうち最大となるものが (k , k) 成分としたとき、

前記最大化条件計算部は、(k , k) 成分が 1 でありそれ以外の成分が 0 である n × n 行列を計算することにより

第 2 入力行列

【数 1 2】

$$\tilde{\mathbf{B}}_2^*$$

を求める。

【0 0 8 4】

本実施の形態によれば、

【数 4 9】

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n$$

であるときに、有効な入力行列を得ることができる。

【0 0 8 5】

[第 7 の実施の形態 (1)]

図 3 は、第 7 の実施の形態に係る制御システム 3 の機能ブロック図である。制御システム 3 は、センサ 1 6 と、データ処理装置 1 と、制御部 1 8 と、を備える。データ処理装置 1 は、データ取得部 1 0 と、可制御性グラミアン計算部 1 2 と、を備える。すなわち、データ処理装置 1 は、図 1 のデータ処理装置 1 と同じく構成され、同じ動作をする。制御システム 3 は、外部の制御対象 1 0 0 に制御信号を入力することにより、制御対象 1 0 0 を制御するものである。

【0 0 8 6】

センサ 1 6 は、制御対象 1 0 0 からの時系列的な状態データの組を検出する。そしてセンサ 1 6 は、検出した状態データの組をデータ処理装置 1 のデータ取得部 1 0 に送信する。データ処理装置 1 は、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定し、これを制御部 1 8 に送信する。制御部 1 8 は、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

に基づいて制御信号を生成し、これを用いて制御対象 1 0 0 を制御する。

【 0 0 8 7】

本実施の形態によれば、外部の制御対象からの時系列的な状態データを検出し、検出した状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定し、推定した可制御性グラミアンに基づいて当該制御対象を適切に制御することができる。

【 0 0 8 8】

10

[第 7 の実施の形態 (2)]

図 1 9 は、第 7 の実施の形態の変形例に係る制御システム 5 の機能ブロック図である。制御システム 5 は、センサ 1 6 と、データ処理装置 1 と、制御部 1 9 と、を備える。データ処理装置 1 は、データ取得部 1 0 と、可制御性グラミアン計算部 1 2 と、を備える。制御部 1 9 は、制御入力値決定部 1 9 1 と、入力チャネル決定部 1 9 2 と、を備える。すなわち制御システム 5 は、制御部 1 9 が、制御入力値決定部 1 9 1 と、入力チャネル決定部 1 9 2 と、を含んで構成されている点で、図 3 の制御システム 3 と異なる。制御システム 5 のその他の構成は、制御システム 3 と共通である。以下では、制御システム 3 と異なる部分に焦点を当てて説明し、重複する説明は省略する。

【 0 0 8 9】

20

制御入力値決定部 1 9 1 には、センサ 1 6 が検出した状態のデータの組が送信される。制御入力値決定部 1 9 1 は、この状態データの組に基づいて、入力チャネル決定部 1 9 2 が決定した制御対象に対し、どのような制御を行えばよいかを決定する。制御入力値決定部 1 9 1 は、決定した制御内容を入力チャネル決定部 1 9 2 に送信する。

【 0 0 9 0】

入力チャネル決定部 1 9 2 には、推定した可制御性グラミアンが送信される。入力チャネル決定部 1 9 2 は、この可制御性グラミアンに基づいて、制御対象 1 0 0 のうちのどの制御対象を制御すればよいかを決定する。入力チャネル決定部 1 9 2 は、決定した制御対象を選択するとともに、当該選択した制御対象に対し、制御入力値決定部 1 9 1 が決定した制御を実行する。

30

【 0 0 9 1】

本実施の形態によれば、外部の制御対象からの時系列的な状態データを検出し、検出した状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定し、推定した可制御性グラミアンに基づいて適切な制御対象を選択するとともに、選択した盛業対象を適切に制御することができる。

【 0 0 9 2】

[第 8 の実施の形態]

図 4 は、第 8 の実施の形態に係る制御システム 4 の機能ブロック図である。制御システム 4 は、センサ 1 6 と、データ処理装置 2 と、制御部 1 8 と、を備える。データ処理装置 2 は、データ取得部 1 0 と、最大化条件計算部 1 4 と、を備える。すなわち、制御システム 2 は、図 2 のデータ処理装置 2 と同じく構成され、同じ動作をする。制御システム 4 は、外部の制御対象 1 0 0 に制御信号を入力することにより、制御対象 1 0 0 を制御するものである。

40

【 0 0 9 3】

センサ 1 6 は、制御対象 1 0 0 からの時系列的な状態データの組を検出する。そしてセンサ 1 6 は、検出した状態データの組をデータ処理装置 1 のデータ取得部 1 0 に送信する。データ処理装置 2 は、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定し、これを制御部 1 8 に送信する。制御部 1 8 は、行列 B に基づいて制御信号を生成し、これを用いて制御対象 1 0 0 を制御する。

【0 0 9 4】

本実施の形態によれば、外部の制御対象からの時系列的な状態データを検出し、検出した状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を推定し、推定した入力行列に基づいて当該制御対象を適切に制御することができる。

10

【0 0 9 5】

[第 9 の実施の形態]

図 5 は、第 9 の実施の形態に係るデータ処理方法の処理手順を示すフローチャートである。本方法は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、A を未知の n × n 行列、B を既知の n × m 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定するものである。

【0 0 9 6】

ステップ S 1 で本方法は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得する。

【0 0 9 7】

ステップ S 2 で本方法は、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \cdots \quad x_{n1}]$$

に関して、線形方程式

【数 6】

10

$$\begin{aligned} x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ = - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

20

$$G(\infty) = X$$

を推定する。

【0 0 9 8】

ステップ S 3 で本方法は、ステップ S 2 で推定した可制御性グラミアンを出力する。

【0 0 9 9】

本実施の形態によれば、数学的モデルが未知の系に対し、取得した連続時間的な状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンをコンピュータを用いて推定することができる。

30

【0 1 0 0】

[第 1 0 の実施の形態]

図 6 は、第 1 0 の実施の形態に係るデータ処理方法の処理手順を示すフローチャートである。

本方法は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^\top e^{-A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

のトレース

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するものである。

【0 1 0 1】

ステップ S 1 で本方法は、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得する。

【0 1 0 2】

ステップ S 4 で本方法は、

【数 7】

$$Q := I$$

としたきの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する。

【0 1 0 3】

ステップ S 5 で本方法は、ステップ S 4 で推定した最大化条件を基に、可制御性グラムアンが最大となるときの入力行列を出力する。

【0 1 0 4】

本実施の形態によれば、数学的モデルが未知の系に対し、取得した連続時間的な状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラムアンが最大となるときの入力行列をコンピュータを用いて推定することができる。

【0 1 0 5】

[第 1 1 の実施の形態]

第 1 1 の実施の形態はプログラムである。このプログラムは、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【数 1 3 8】

$$G(t)$$

の

【数 1 4 4】

$$t = \infty$$

における極限

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定するプログラムであって、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、

【数 1 5 7】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \quad \dots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

【数 1 5 8】

$$E_0 := [x_{11} \quad x_{21} \quad \dots \quad x_{n1}]$$

に関して、線形方程式

【数 6】

$$\begin{aligned} x_{i1}^\top (E(h)E_0^{-1})X(E(h)E_0^{-1})^\top x_{i1} - x_{i1}^\top Xx_{i1} \\ = - \int_0^h x_{i1}^\top (E(t)E_0^{-1})BB^\top (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} dt \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

の解 X を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 6】

$$G(\infty) = X$$

を推定する計算ステップと、

推定された可制御性グラミアンを出力するステップと、をコンピュータに実行させる。

【0 1 0 6】

本実施の形態によれば、数学的モデルが未知の系に対し、取得した連続時間的な状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンを推定するソフトウェアをプログラムとして実装できる。

【 0 1 0 7 】

[第 1 2 の実施の形態]

第 1 2 の実施の形態はプログラムである。このプログラムは、

【 数 1 4 2 】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

【 数 1 3 9 】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【 数 1 】

20

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【 数 2 】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

で定義される可制御性グラミアン

【 数 1 3 8 】

$$G(t)$$

の

【 数 1 4 4 】

40

$$t = \infty$$

における極限

【 数 1 4 0 】

$$G(\infty)$$

のトレース

50

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定するプログラムであって、

【数 3 9】

$$u(t) \equiv 0$$

としたときの q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するデータ取得ステップと、

【数 7】

$$Q := I$$

としたときの線形方程式

【数 8】

$$\begin{aligned} x^\top(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) Y x(t_{i2}, t_{i1}, x_{i1}) - x_{i1}^\top Y x_{i1} \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x^\top(t, t_{i1}, x_{i1}) Q x(t, t_{i1}, x_{i1}) dt \\ (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

の解

【数 9】

$$\tilde{Y}^*$$

を数値計算で求めることにより、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

が最大となるときの行列 B を推定する計算ステップと、推定された最大化条件を基に、可制御性グラミアンが最大となる時の入力行列を出力するステップと、をコンピュータに実行させる。

【0108】

本実施の形態によれば、数学的モデルが未知の系に対し、取得した連続時間的な状態データの組に基づいて、データ駆動型手法を用いて可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を推定するソフトウェアをプログラムとして実装できる。

【0109】

[検証1]

以下、ノイズを含まない時系列的な状態データの組に関し、第1の実施の形態により結果を示す。(1)で示される系で

【数147】

$$n = 3$$

のときの問題1(i)の解を求める。ここでは

【数148】

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【数149】

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする。

【0110】

比較のために(3)およびMatlab(登録商標)の「lyap」を用いて得た可制御性グラミアン

【数140】

$$G(\infty)$$

の真の値は以下の通りである。

【数150】

$$G(\infty) = \begin{bmatrix} 6.813 & 0 & 0.875 \\ 0 & 2.438 & 0.875 \\ 0.875 & 0.875 & 0.500 \end{bmatrix}$$

【 0 1 1 1 】

図 7 ~ 図 1 2 は、ノイズを含まない時系列データを示す。具体的には、
図 7 は、時間区間

【 数 1 5 1 】

$$[t_{11}, t_{12}]$$

における時系列データを示す。

図 8 は、時間区間

【 数 1 5 2 】

$$[t_{21}, t_{22}]$$

における時系列データを示す。

図 9 は、時間区間

【 数 1 5 3 】

$$[t_{31}, t_{32}]$$

における時系列データを示す。

図 1 0 は、時間区間

【 数 1 5 4 】

$$[t_{41}, t_{42}]$$

における時系列データを示す。

図 1 1 は、時間区間

【 数 1 5 5 】

$$[t_{51}, t_{52}]$$

における時系列データを示す。

図 1 2 は、時間区間

【 数 1 5 6 】

$$[t_{61}, t_{62}]$$

における時系列データを示す。

【 0 1 1 2 】

図 1 のデータ処理装置 1 のデータ取得部 1 0 は、図 7 ~ 図 1 2 に示される 6 個の時間区
間における時系列的な状態データの組

【 数 1 5 9 】

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{61}, t_{62}], x_{61})$$

を取得する。このとき

【 数 1 4 5 】

$$E(t)$$

10

20

40

および

【数 8 6】

$$E_0$$

は、それぞれ (17) および (18) で定められる。すると、以下が得られる。

【数 1 6 0】

$$D_2 = \begin{bmatrix} -111.330 & 58.021 & -4.521 & 76.071 & 19.440 & 113.823 \\ -114.141 & -218.566 & -104.632 & -112.263 & -107.462 & 6.134 \\ 2.389 & 27.479 & -233.018 & 31.881 & -169.490 & 6.613 \\ -70.105 & -46.067 & -7.410 & -59.942 & -14.605 & 28.202 \\ -79.264 & -55.735 & -9.642 & -9.312 & 2.214 & 48.204 \\ -6.446 & 63.871 & -104.918 & 37.316 & -46.008 & 36.435 \end{bmatrix}$$

これは

【数 1 6 1】

$$\text{rank}(D_2) = 6 = (1/2)n(n+1)$$

であることを示す。従って (22) が成り立っており、線形方程式 (22) には一意解 X が存在する。

【0 1 1 3】

可制御性グラミアン計算部 12 は、(22) を数値計算で解くことにより、以下の値を得る。

【数 1 6 2】

$$X = \begin{bmatrix} 6.813 & 0 & 0.875 \\ 0 & 2.438 & 0.875 \\ 0.875 & 0.875 & 0.500 \end{bmatrix} \quad (31)$$

これは真の値 (30) と一致しており、本実施の形態の有用性が示される。

【0 1 1 4】

[検証 2]

以下、ノイズを含む時系列的な状態データの組に関し、第 2 の実施の形態により得た結果を示す。図 13 ~ 図 18 は、ノイズを含まない時系列データを示す。具体的には、

図 13 は、時間区間

【数 1 5 1】

$$[t_{11}, t_{12}]$$

における時系列データを示す。

図 14 は、時間区間

【数 1 5 2】

$$[t_{21}, t_{22}]$$

における時系列データを示す。

図 15 は、時間区間

【数 1 5 3】

$$[t_{31}, t_{32}]$$

における時系列データを示す。

図 1 6 は、時間区間

【数 1 5 4】

$$[t_{41}, t_{42}]$$

における時系列データを示す。

図 1 7 は、時間区間

【数 1 5 5】

$$[t_{51}, t_{52}]$$

における時系列データを示す。

図 1 8 は、時間区間

【数 1 5 6】

$$[t_{61}, t_{62}]$$

における時系列データを示す。

ここで図 1 3 ~ 図 1 8 の信号は、それぞれ図 7 ~ 図 1 2 の信号に平均 0、分散 0.1 のノイズを加えたものである。

【0 1 1 5】

可制御性グラミアン計算部 1 2 は、(2 3) を数値計算で解くことにより、以下の値を得る。

【数 1 6 3】

$$X = \begin{bmatrix} 6.612 & 0.016 & 0.812 \\ 0.016 & 2.228 & 0.826 \\ 0.812 & 0.826 & 0.470 \end{bmatrix} \quad (32)$$

この結果は (3 1) に比べれば悪いとはいえ、概ね真の値 (3 0) と一致している。

【0 1 1 6】

[検証 3]

ノイズを含む時系列的な状態データの組に関し、第 3 の実施の形態を用いて実際に得た結果を述べる。この場合の時系列的な状態データの組も、前述と同様に図 1 3 ~ 図 1 8 に示すものである。

【0 1 1 7】

ここでは

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

が以下の符号のパターンを持つという事前知識が得られているとする。

【数 1 6 4】

$$\begin{bmatrix} + & 0 & * \\ 0 & + & * \\ * & * & + \end{bmatrix}$$

ただし * は、符号が未知であることを示す。すると

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定する問題は、以下の最適化問題に帰結する。

【数 1 6 5】

$$\begin{cases} \min_{\xi \in \mathbf{R}^6} \|D_2 \xi - d_2\|_2 \\ \text{s.t. } \xi_1 > 0, \xi_3 > 0, \xi_6 > 0, \xi_2 = 0 \end{cases} \quad (33)$$

ここで

【数 1 6 6】

$$D_2 \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$$

および

【数 1 6 7】

$$d_2 \in \mathbf{R}^6$$

は (2 1) に関するもので、(2 3) で使われる。

【数 1 6 8】

$$\xi \in \mathbf{R}^6$$

は (2 1) の

【数 1 6 9】

$$\text{rvec}(X)$$

に対応する。

【数 1 7 0】



は

【数 1 7 1】



10

の i 番目の成分である。

【0 1 1 8】

(3 3) を数値計算することにより、

【数 1 7 2】

20

$$X = \begin{bmatrix} 6.657 & 0 & 0.794 \\ 0 & 2.250 & 0.806 \\ 0.794 & 0.806 & 0.526 \end{bmatrix}$$

が得られる。この事前知識を適用した近似解は、近似解 (3 2) より真の値 (3 0) に近い。

【0 1 1 9】

[検証 4]

以下、図 7 ~ 図 1 2 のデータを用いて、第 4 の実施の形態により得た結果を述べる。この場合、

【数 1 7 3】

$$D_1 = \begin{bmatrix} -114.033 & 53.362 & -6.242 & 38.923 & -9.110 & -3.311 \\ -56.781 & -280.494 & -88.226 & -114.210 & -113.084 & -29.771 \\ 8.664 & 11.552 & -230.861 & 9.445 & -185.936 & -36.786 \\ -54.121 & -66.226 & -2.459 & -70.825 & -24.182 & -18.020 \\ -79.077 & -58.335 & -9.658 & -21.689 & -7.737 & -1.471 \\ -1.685 & 53.084 & -104.062 & 17.608 & -60.784 & -8.659 \end{bmatrix}$$

が得られる。

【数 1 7 4】

$$\text{rank}(D_1) = 6 = (1/2)n(n + 1)$$

が成り立っているため、(1 2) が成り立つ。すなわち

50

【数 7】

$$Q := I$$

に関し、(10)には一意解 Y が存在する。実施の形態による数値計算により、以下が得られる。

【数 175】

$$\tilde{Y}^* = \begin{bmatrix} 1.500 & 0.500 & 1.250 \\ 0.500 & 0.500 & 1.250 \\ 1.250 & 1.250 & 6.750 \end{bmatrix}$$

【0120】

[検証5]

以下、図7～図12のデータを用いて、第5の実施の形態により得た結果を述べる。

【数 47】

$$\mathbf{B} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{n \times m}$$

の場合、実施の形態による数値計算により、

【数 48】

$$\mathbf{B} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{R}^{3 \times m}$$

に関し、第1入力行列

【数 176】

$$\tilde{B}_1^* = \begin{bmatrix} 0.223 \\ 0.192 \\ 0.956 \end{bmatrix}$$

が求まる。この第1入力行列により、

【数 141】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

は、最大値

【数 177】

$$\text{tr}(G(\infty)) = 7.293$$

を取る。これ

の結果に対し、比較例としてすべての成分が1/3である入力行列

30

40

50

【数 1 7 8】

$$B \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$$

を用いた場合、

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

は

【数 1 7 9】

$$\text{tr}(G(\infty)) = 4.917$$

となる。これは実施の形態で得られた

【数 1 7 7】

$$\text{tr}(G(\infty)) = 7.293$$

に比べて明らかに小さい。

【0 1 2 1】

[検証 6]

以下、図 7 ~ 図 1 2 のデータを用いて、第 6 の実施の形態により得た結果を述べる。

【数 4 9】

$$B = D_n$$

の場合、実施の形態による数値計算により、

【数 1 8 0】

$$\text{tr}(G(\infty)) = 6.750$$

で、第 2 入力行列

【数 1 8 1】

$$\tilde{B}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が求まる。

【0 1 2 2】

表 1 に、

【数 4 9】

$$B = D_n$$

の各場合における、

10

20

50

【数 1 4 1】

$$\text{tr}(G(\infty))$$

の値を示す。これより、

【数 1 2】

$$\tilde{B}_2^*$$

が最も有効な入力行列であることが分かり、本実施の形態の有用性が示される。

【表 1】

| B | $\text{tr}(G(\infty))$ |
|---------------------------------|------------------------|
| $[e_1 \ 0 \ 0]$ | 1.500 |
| $[0 \ e_2 \ 0]$ | 0.500 |
| $\tilde{B}_2^* = [0 \ 0 \ e_3]$ | 6.750 |

【0 1 2 3】

[作用量が変化する場合の態様]

以上で説明した態様では、ネットワークの各ノードへの入力チャンネルを固定したときの「制御のしやすさ」の指標を推定することを目標の1つとした(問題1(i))。すなわち、以下の問題について議論した。

30

(問題1)

式(1)で示される系に関し、行列Aはフルピッツ行列で未知であるとする。q個の状態軌道のセグメントからなるデータの組

【数 4 3】

$$x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots; q)$$

が与えられるとする。ただし

【数 4 4】

$$t_{i1} < t_{i2}$$

である。

40

(i) 既知の入力行列Bが与えられたときに、

【数 1 4 0】

$$G(\infty)$$

を推定する。

【0 1 2 4】

すなわち上で説明した実施の態様では、ネットワークを構成する各ノード間の作用量（ノード間の接続強度や、流通データの量を示す指標）は、すべて固定値であるとした。この場合「制御のしやすさを向上させるためには、どのように入力チャネルを選択すればよいか」を知ることができた。これに対し、以下では、作用量の調整を行ったときの制御のしやすさの推定（作用量を変化させたときの可制御性グラミアンの推定）について述べる。これにより「制御のしやすさを向上させるためには、どのように作用量を調整すればよいか」を知ることが目標とする。

10

【0 1 2 5】

以下では、未知の行列 A に変化量 Δ が加えられたときの可制御性グラミアンの推定について考える。この問題は以下のように定式化することができる。

（問題 3）

式（1）のシステムを考える。ただし、

【数 2 8】

$$B \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

20

は既知であるが、

【数 2 7】

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

は未知であるとする。またこのシステムに対し、 N 個の状態軌道のデータが次のように与えられるとする。

30

【数 1 8 2】

$$\mathcal{D}: x([t_{i1}, t_{i2}], x_{i1}) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (34)$$

ただし、

【数 1 8 3】

$$t_{i1} < t_{i2} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

である。また

【数 1 8 4】

$$A + \Delta$$

が安定行列となるような

【数 1 8 5】

$$\Delta \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

が任意に与えられるものとする。このとき

【数 1 8 6】

$$G_c(A + \Delta)$$

を求める。

50

【 0 1 2 6 】

問題 3 は、式 (1) のシステムに対して、A 行列を だけ変化させた場合に、可制御性
グラミアンの値をデータから推定することを課題としている。この問題は、例えばシステム
に対し状態フィードバックを適用する場合や、ネットワークシステムにおいてノード間
の接続強度を調整する場合などに現れる。

【 0 1 2 7 】

[リアプノフ方程式のデータ駆動型解法]

以下では、問題 13 の準備として、システムの状態軌道を用いてリアプノフ方程式を解
く方法について述べる。次のシステムを考える。

【数 1 8 7】

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) \quad (35)$$

10

ここで

【数 1 8 8】

$$\tilde{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

は安定行列である。また、式 (3 5) のシステムの状態軌道を、前述と同様に

【数 1 8 9】

$$x(t, t_1, x_1)$$

20

で表す。このシステムに対し、リアプノフ方程式

【数 1 9 0】

$$(\tilde{A} + \tilde{\Delta})^T Y + Y(\tilde{A} + \tilde{\Delta}) = -Q \quad (36)$$

を考える。ただし

【数 1 9 1】

$$\tilde{\Delta} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

30

は

【数 1 9 2】

$$\tilde{A} + \tilde{\Delta}$$

が安定となる行列であり、

【数 1 9 3】

$$Q \in \mathbf{S}_n$$

40

は対称行列である。このとき、式 (3 6) は一意解を持つことが知られている。

【 0 1 2 8 】

このとき、次の問題を考える。

(問題 4)

式 (3 5) のシステムを考える。ただし

【数 1 9 4】

$$\tilde{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

は安定だが未知であると仮定する。またこのシステムに対し、N個の状態軌道のデータDが問題3と同様に与えられるとする。また

【数 1 9 2】

$$\tilde{A} + \tilde{\Delta}$$

が安定行列となるような

【数 1 9 1】

$$\tilde{\Delta} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

と

【数 1 9 3】

$$Q \in \mathbf{S}_n$$

とが任意に与えられるものとする。このとき、式(36)の解を求める。

20

【0 1 2 9】

問題4の解は、以下のように与えられる。まず、式(36)の両辺に対し、状態軌道

【数 1 9 5】

$$x(t)$$

に関する二次形式を考えると、

【数 1 9 6】

$$\begin{aligned} x^\top(t) \left(\tilde{A}^\top Y + Y \tilde{A} \right) x(t) + x^\top(t) \left(\tilde{\Delta}^\top Y + Y \tilde{\Delta} \right) x(t) \\ = -x^\top(t) Q x(t) \end{aligned} \quad (37)$$

が成り立つ。ここで左辺第1項に対して

【数 1 9 7】

$$\begin{aligned} x^\top(t) (Y \tilde{A} + \tilde{A}^\top Y) x(t) \\ = x^\top(t) Y (\tilde{A} x(t)) + (\tilde{A} x(t))^\top Y x(t) \\ = x^\top(t) Y \dot{x}(t) + \dot{x}^\top(t) Y x(t) = \frac{d}{dt} (x^\top(t) Y x(t)) \end{aligned}$$

が成り立つことから

【数 1 9 8】

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^\top(t) Y x(t)) + x^\top(t) \left(\tilde{\Delta}^\top Y + Y \tilde{\Delta} \right) x(t) \\ = -x^\top(t) Q x(t) \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる。さらにこの式の両辺を時間区間

50

【数 4 1】

$$[t_1, t_2]$$

で積分することにより、

【数 1 9 9】

$$\begin{aligned} x^\top(t_2)Yx(t_2) - x^\top(t_1)Yx(t_1) \\ + \int_{t_1}^{t_2} x^\top(t) \left(\tilde{\Delta}^\top Y + Y \tilde{\Delta} \right) x(t) dt \\ = - \int_{t_1}^{t_2} x^\top(t) Q x(t) dt \end{aligned} \quad (39)$$

が導かれる。ここで式(39)に対し、状態軌道データ

【数 2 0 0】

$$x_i(t) := x(t, t_{i1}, x_{i1})$$

を適用することにより、未知数 Y に関する N 本の線形方程式

【数 2 0 1】

$$\begin{aligned} x_i^\top(t_{i2})Yx_i(t_{i2}) - x_i^\top(t_{i1})Yx_i(t_{i1}) \\ + \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x_i^\top(t) \left(\tilde{\Delta}^\top Y + Y \tilde{\Delta} \right) x_i(t) dt \\ = - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} x_i^\top(t) Q x_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (40)$$

が得られる。

【0 1 3 0】

次に式(40)を、行列を用いた形式に書き換えることを考える。先ず式(39)は、 lvec 、 rvec を用いれば、

【数 2 0 2】

$$\begin{aligned} \left(\text{lvec}(x(t_2), x(t_2)) - \text{lvec}(x(t_1), x(t_1)) \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} (\text{lvec}(\tilde{\Delta}x(t), x(t)) + \text{lvec}(x(t), \tilde{\Delta}x(t))) dt \right) \text{rvec}(Y) \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \text{lvec}(x(t), x(t)) dt \text{rvec}(Q) \end{aligned} \quad (41)$$

となる。このことに注目すれば、式(40)は

【数 2 0 3】

$$\tilde{D}_1 \text{rvec}(Y) = \tilde{D}_2 \text{rvec}(Q) \quad (42)$$

と等価に書き換えられる。ただし、

【数 2 0 4】

$$\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 \in \mathbf{R}^{N \times (1/2)n(n+1)}$$

は、式 (35) のシステムの状態軌道データによって定まる行列であり、それらの i 行目

【数 2 0 5】

$$\tilde{d}_{1i}, \tilde{d}_{2i} \in \mathbf{R}^{1 \times (1/2)n(n+1)}$$

は、それぞれ

【数 2 0 6】

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{1i} := & \text{lvec}(x_i(t_{i2}), x(t_{i2})) - \text{lvec}(x_i(t_{i1}), x_i(t_{i1})) \\ & + \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} \left(\text{lvec}(\tilde{\Delta}x_i(t), x_i(t)) \right. \\ & \left. + \text{lvec}(x_i(t), \tilde{\Delta}x_i(t)) \right) dt \end{aligned}$$

【数 2 0 7】

$$\tilde{d}_{2i} := - \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} \text{lvec}(x_i(t), x_i(t)) dt$$

で与えられる。

【0 1 3 1】

このとき問題 4 の解は次のように得られる。

(定理 3)

問題 4 を考える。もし

【数 6 8】

$$\text{rank}(D_1) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (12)$$

ならば、式 (40) の解は、対称行列の範囲で一意であり、問題 4 の解と等しい (定理 3 終)。

【0 1 3 2】

[可制御性グラミアンのデータ駆動型推定]

次に問題 3 の解を考える。

【0 1 3 3】

[データの変換]

式 (35) の双対システムである

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

状態軌道データが利用可能であれば、定理 3 を用いて

【数 1 8 6】

$$G_c(A + \Delta)$$

を計算することができる。この事実は次のように示される。補題 1 より、可制御性グラミアン

【数 1 8 6】

$$G_c(A + \Delta)$$

は

【数 2 0 8】

10

$$(A + \Delta)X + X(A + \Delta)^\top = -BB^\top \quad (43)$$

の一意解として得られる。ここで式 (43) が式 (36) に対して対して

【数 2 0 9】

$$\tilde{A} = A^\top$$

【数 2 1 0】

20

$$\tilde{\Delta} = \Delta^\top$$

【数 2 1 1】

$$Q = BB^\top$$

とした場合に対応することに注意すれば、上記の議論と同様に

【数 2 1 2】

$$\begin{aligned} & z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) \\ & + \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)(\Delta X + X\Delta^\top)z(t) dt \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BBz(t) dt \end{aligned} \quad (44)$$

が得られる。従って、式 (44) に対して式 (13) のシステムの状態軌道を適用することによって、

【数 1 8 6】

$$G_c(A + \Delta)$$

を解にもつ線形方程式を状態軌道データのみから構成することができる。

【0 1 3 4】

しかしながら、問題 3 においては、式 (13) のシステムの状態軌道は

【数 2 1 3】

$$A = A^\top$$

の場合を除き一般には利用できない。従って、上述のアイデアを問題 3 に直接用いることはできない。一方、もし式 (35) のシステムの状態軌道を式 (13) のシステムの状態軌道に変換することができれば、問題 3 の解を構成できる。そのようなデータの変換は、

50

次の補題 5 によって達成される。

【 0 1 3 5 】

(補題 5)

式 (1 3) のシステムの状態軌道を前述の

【数 1 9 3】

$$Q \in \mathbf{S}_n$$

と同様に

【数 2 1 4】

$$z(t, t_{i1}, z_{i1})$$

で表す。問題 3 の状態軌道データ D が任意に与えられるものとする。ただし、 $N = n$ であると仮定する。この D に対し、

【数 2 1 5】

$$E(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

【数 2 1 6】

$$E_0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

【数 2 1 7】

$$h \in (0, \infty)$$

をそれぞれ

【数 2 1 8】

$$E(t) := [x(t + t_{11}, t_{11}, x_{11}) \quad x(t + t_{21}, t_{21}, x_{21}) \\ \cdots \quad x(t + t_{n1}, t_{n1}, x_{n1})]$$

$$E_0 := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$h := \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (t_{i2} - t_{i1})$$

で定めるものとする。このとき、 E_0 が正則ならば、任意の

【数 2 1 9】

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

と

【数 2 2 0】

$$t \in [0, h]$$

とで、

【数 2 2 1】

$$z(t, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1} \quad (46)$$

が成り立つ。

【 0 1 3 6 】

[データ駆動型推定]

上記の結果を用いて、問題 3 の解を与える。先ず関数

【 数 2 2 2 】

$$z_i(t) \in \mathbf{R}^n \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

を、

【 数 2 2 3 】

$$z_i(t) := (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

で定めるものとする。このとき、式 (4 4) に対して

【 数 2 2 4 】

$$z(t) = z_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

を適用することで、N本の線形方程式

【 数 2 2 5 】

$$\begin{aligned} & z_i^\top(h)Xz_i(h) - z_i^\top(0)Xz_i(0) \\ & \quad + \int_0^h z_i^\top(t)(\Delta X + X\Delta^\top)z_i(t) dt \\ & = - \int_0^h z_i^\top(t)BBz_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (47)$$

が得られる。さらに、式 (4 7) と等価な表現として

【 数 2 2 6 】

$$D_1 \text{rvec}(X) = D_2 \text{rvec}(BB^\top)$$

が得られる。ただし、

【 数 2 2 7 】

$$D_1, D_2 \in \mathbf{R}^{N \times (1/2)n(n+1)}$$

は、問題 3 の状態軌道データ D によって定まる行列であり、それらの i 行目

【 数 2 2 8 】

$$d_{1i}, d_{2i} \in \mathbf{R}^{1 \times (1/2)n(n+1)}$$

は、それぞれ

【 数 2 2 9 】

$$\begin{aligned} d_{1i} := & \text{lvec}(z_i(h), z_i(h)) - \text{lvec}(z_i(0), z_i(0)) \\ & + \int_0^h \left(\text{lvec}(\Delta^\top z_i(t), z_i(t)) \right. \\ & \quad \left. + \text{lvec}(z_i(t), \Delta^\top z_i(t)) \right) dt \end{aligned}$$

【数 2 3 0】

$$d_{2i} := - \int_0^h \text{lvec}(z_i(t), z_i(t)) dt$$

で与えられる。

【0 1 3 7】

従って、問題 3 の解は次のように得られる。

(定理 4)

問題 3 を考える。ただし $N = n$ であるとする。式 (4 5) の E_0 が正則であり、かつ

10

【数 6 8】

$$\text{rank}(D_1) = \frac{1}{2}n(n + 1) \quad (12)$$

が成り立つならば、式 (4 7) の解は、対称行列の範囲で一意で、問題 3 の解と等しい。

【0 1 3 8】

[第 1 3 の実施の形態]

第 1 の実施の形態と同様に、図 1 を用いて第 1 3 の実施の形態に係るデータ処理装置を説明する。

20

図 1 は、第 1 3 の実施の形態に係るデータ処理装置 1 の機能ブロック図である。データ処理装置 1 は、データ取得部 1 0 と、可制御性グラミアン計算部 1 2 と、出力部 1 5 と、を備える。データ処理装置 1 は、

【数 1 4 2】

$$x(t)$$

を制御対象の状態を表す n 次元ベクトル、

30

【数 1 3 9】

$$u(t)$$

を制御入力を表す m 次元ベクトル、 A を未知の $n \times n$ 行列、 B を既知の $n \times m$ 行列とし、

【数 1】

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

が成り立つとき、

【数 2】

$$G(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

で定義される行列 A の可制御性グラミアンの極限を
【数 2 3 1】

$$G_c(A)$$

としたとき、
【数 2 3 2】

$$G_c(A + \Delta)$$

を推定するものである。

10

【0 1 3 9】

データ取得部 1 0 は、複数の時間区間における時系列的な状態データの組を取得する。
以下の説明では、データ取得部 1 0 は、 q 個の時間区間

【数 4】

$$[t_{i1}, t_{i2}] \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

における時系列的な状態データの組

【数 5】

20

$$x([t_{11}, t_{12}], x_{11}), x([t_{21}, t_{22}], x_{11}), \dots, x([t_{q1}, t_{q2}], x_{q1})$$

を取得するものとする。

【0 1 4 0】

可制御性グラミアン計算部 1 2 は、データ取得部 1 0 が取得した状態データの組

【数 1 4 5】

$$E(t)$$

に基づいて、

【数 7 4】

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) \quad (13)$$

で表される

【数 7 5】

$$z(t) \in \mathbf{R}^n$$

を定義し、

【数 8 1】

$$z^\top(t_2)Xz(t_2) - z^\top(t_1)Xz(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} z^\top(t)BB^\top z(t)dt \quad (16)$$

【数 8 9】

$$z(t + t_{i1}, t_{i1}, x_{i1}) = (E(t)E_0^{-1})^\top x_{i1}$$

を計算し、
線形方程式

【数 2 2 5】

$$\begin{aligned} & z_i^\top(h)Xz_i(h) - z_i^\top(0)Xz_i(0) \\ & + \int_0^h z_i^\top(t)(\Delta X + X\Delta^\top)z_i(t) dt \\ & = - \int_0^h z_i^\top(t)BBz_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (47)$$

の解 X を数値計算で解くことにより

【数 2 3 3】

$$G_c(A + \Delta) = X$$

を推定する。

【0 1 4 1】

出力部 1 5 は、可制御性グラミアン計算部 1 2 が推定した可制御性グラミアンを出力する。

【0 1 4 2】

本実施の形態によれば、ネットワークを構成する各ノード間の作用量が増減したときの可制御性グラミアンを推定することができる。

【0 1 4 3】

以上、本発明を実施の形態にもとづいて説明した。これらの実施の形態は例示であり、それらの各構成要素や各処理プロセスの組合せにいろいろな変形例が可能で、またそうした変形例も本発明の範囲にあることは当業者に理解されるところである。

30

【0 1 4 4】

上述した各実施の形態と変形例の任意の組み合わせもまた本発明の実施の形態として有用である。組み合わせによって生じる新たな実施の形態は、組み合わせられる各実施の形態及び変形例それぞれの効果をあわせもつ。

【産業上の利用可能性】

【0 1 4 5】

本発明の原理は、以下のように様々な分野における系の制御に応用が可能である。

(応用例 1) 制御対象が電力システムの場合、各発電所の発電量、電力使用量、温度、湿度などの時系列データから最適な電力供給制御ができる。

40

(応用例 2) 制御対象がロボットの場合、負荷、姿勢、外力、運動状態などの時系列データから最適な姿勢制御ができる。

(応用例 3) 制御対象が人体の場合、血圧、脈拍、体温、血液成分などの時系列データから最適な投薬制御ができる。

(応用例 4) 制御対象が化学工場の場合、温度、湿度、気圧、空気中の塵埃量などの時系列データから最適な稼働制御ができる。

(応用例 5) 制御対象が装置のメンテナンスの場合、故障アラーム頻度、電気抵抗、金属疲労度、発熱量などの時系列データから最適なメンテナンス制御ができる。

【符号の説明】

【0 1 4 6】

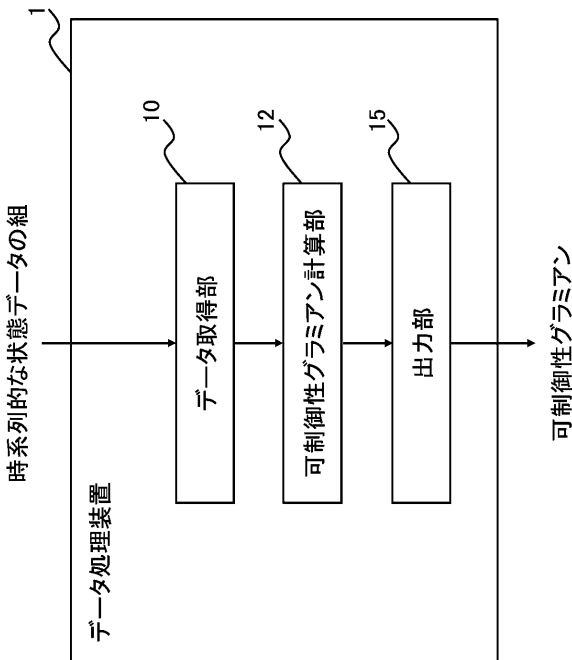
50

- 1・・・データ処理装置。
- 2・・・データ処理装置。
- 3・・・制御システム。
- 4・・・制御システム。
- 5・・・制御システム。
- 10・・・データ取得部。
- 12・・・可制御性グラミアン計算部。
- 14・・・最大化条件計算部。
- 15・・・出力部。
- 16・・・センサ。
- 18・・・制御部。
- 19・・・制御部。
- 100・・・制御対象。
- 191・・・制御入力値決定部。
- 192・・・入力チャネル決定部。
- S1・・・時系列的な状態データの組を取得するステップ。
- S2・・・可制御性グラミアンを推定するステップ。
- S3・・・可制御性グラミアンを出力するステップ。
- S4・・・可制御性グラミアンが最大となるときの条件を推定するステップ。
- S5・・・可制御性グラミアンが最大となるときの入力行列を出力するステップ。

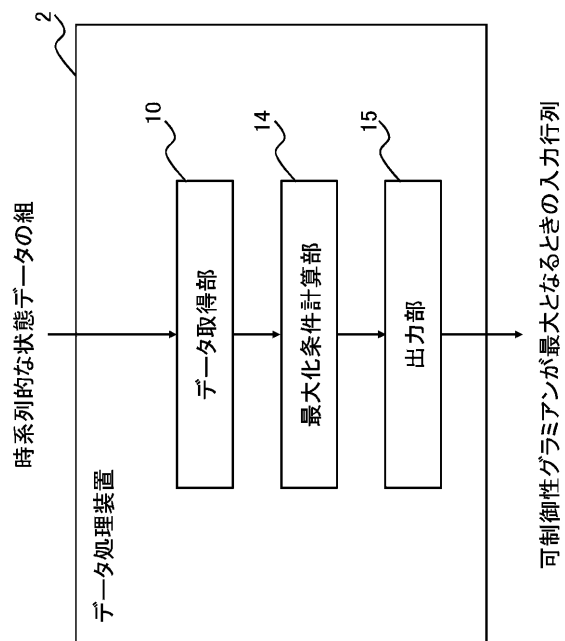
10

20

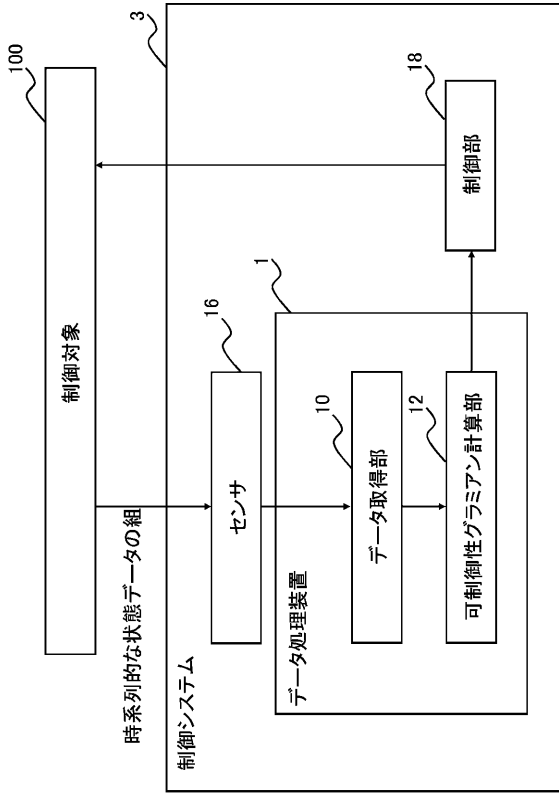
【図1】



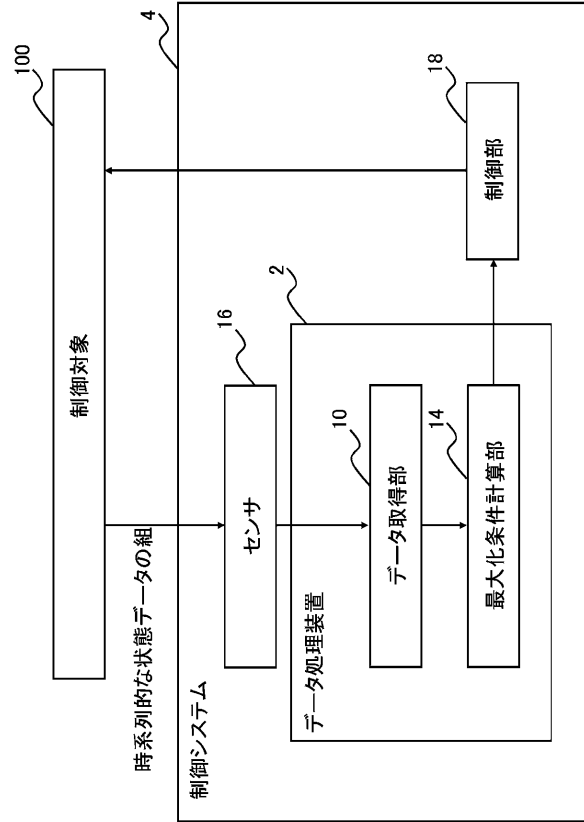
【図2】



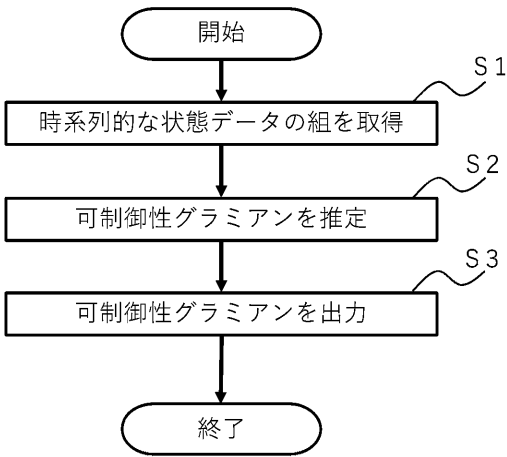
【図3】



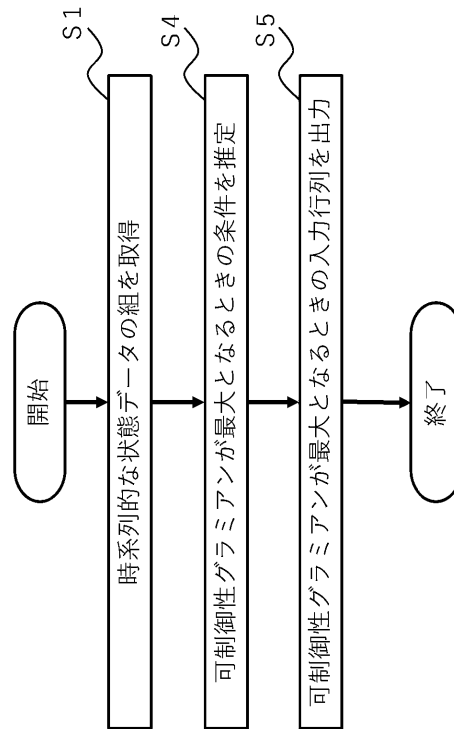
【図4】



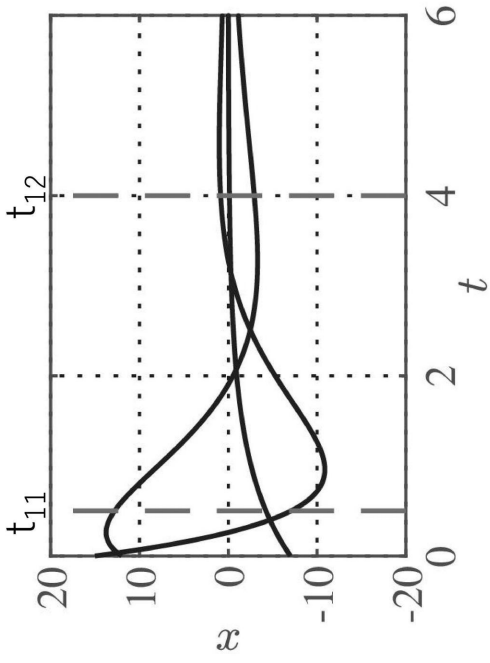
【図5】



【図6】

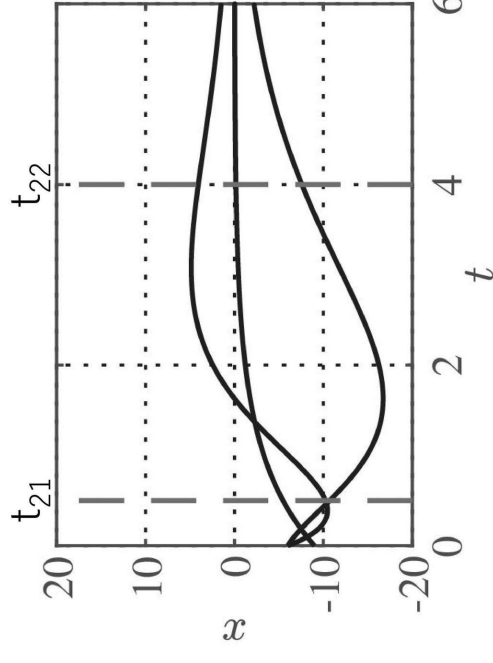


【 図 7 】



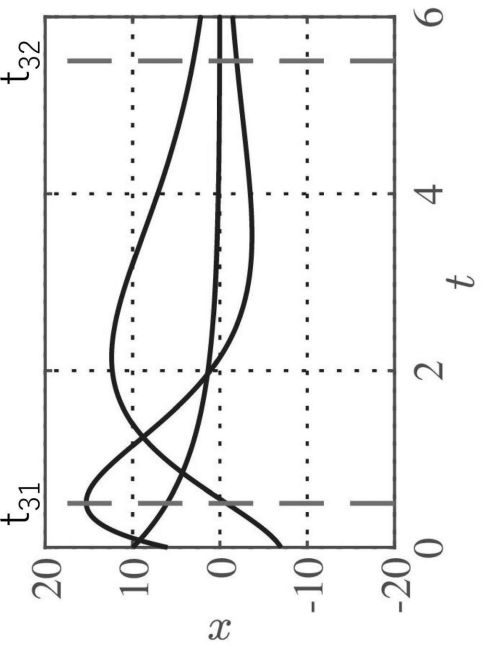
$x([t_{11}, t_{12}], x_{11})$

【 図 8 】



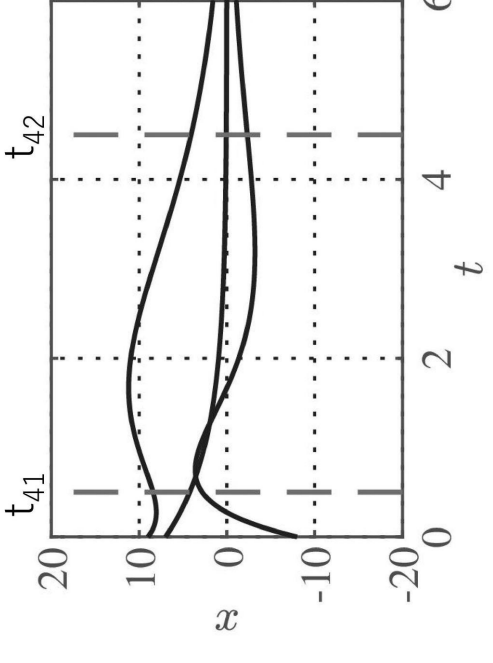
$x([t_{21}, t_{22}], x_{21})$

【 図 9 】



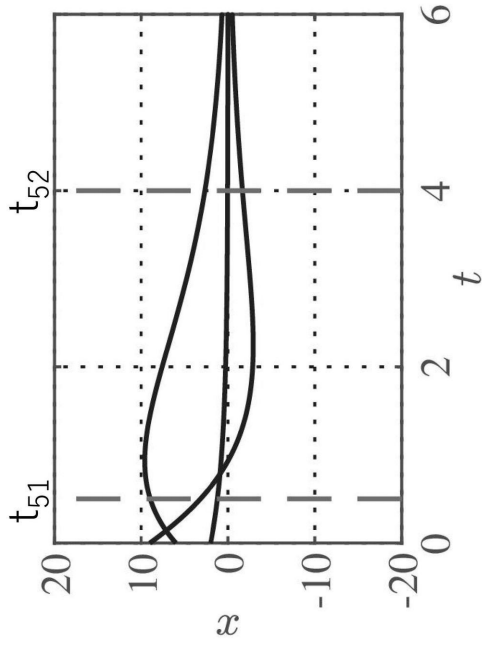
$x([t_{31}, t_{32}], x_{31})$

【 図 10 】



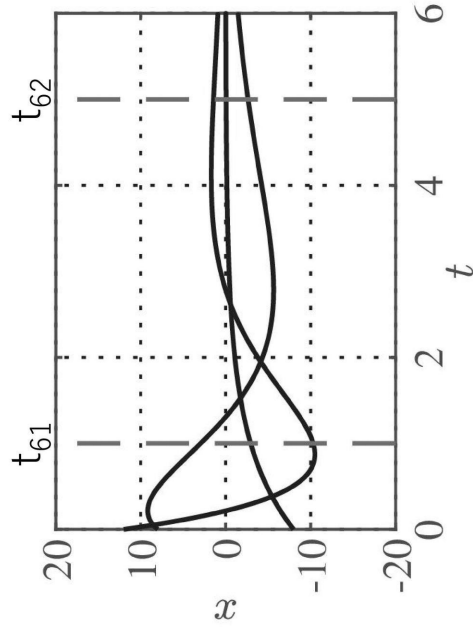
$x([t_{41}, t_{42}], x_{41})$

【 図 1 1 】



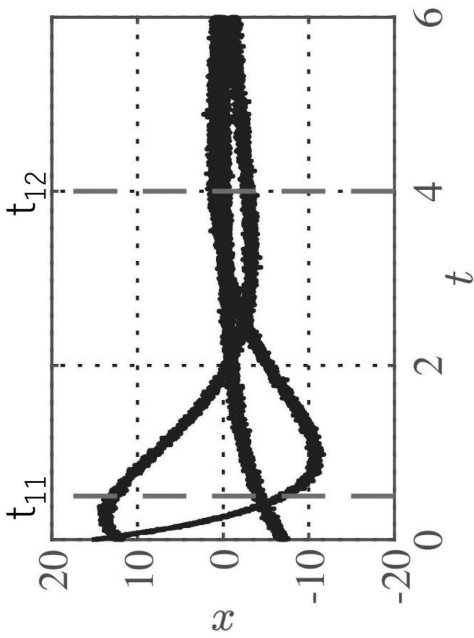
$x([t_{51}, t_{52}], x_{51})$

【 図 1 2 】



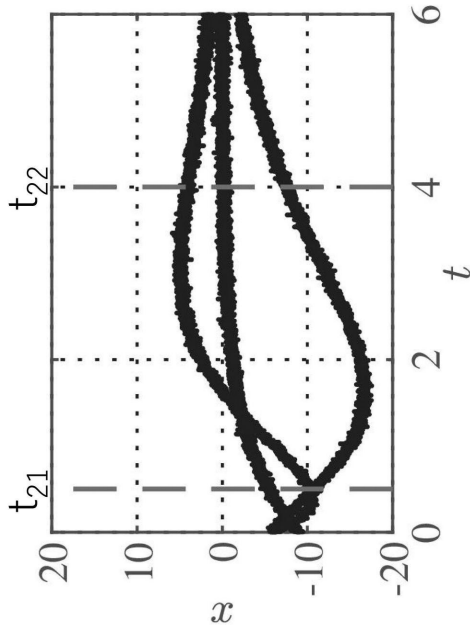
$x([t_{61}, t_{62}], x_{61})$

【 図 1 3 】



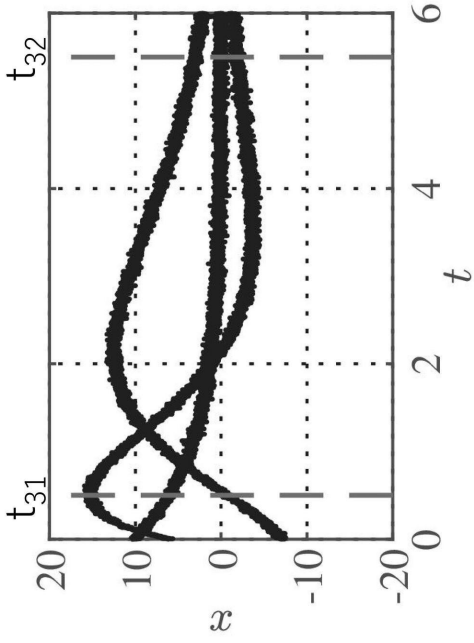
$x([t_{11}, t_{12}], x_{11})$

【 図 1 4 】



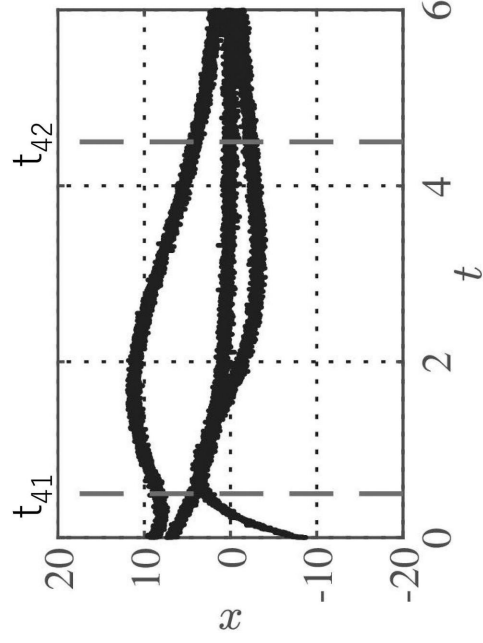
$x([t_{21}, t_{22}], x_{21})$

【 図 1 5 】



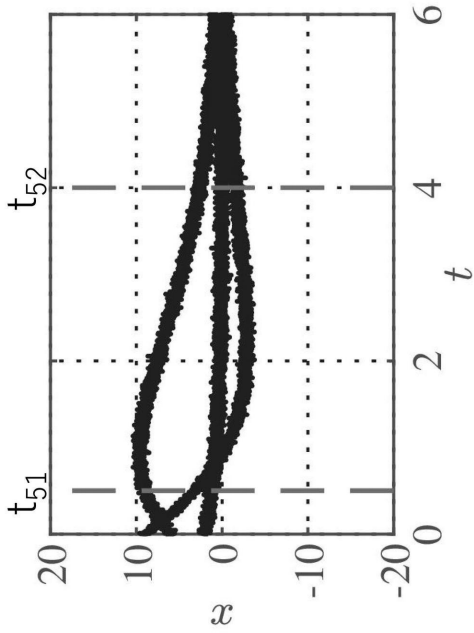
$x([t_{31}, t_{32}], x_{31})$

【 図 1 6 】



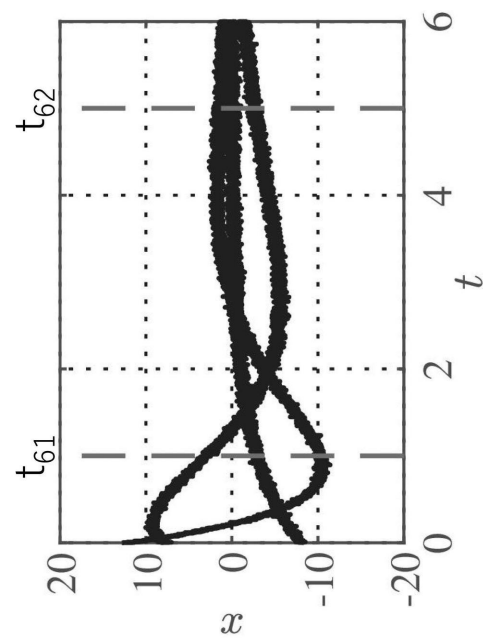
$x([t_{41}, t_{42}], x_{41})$

【 図 1 7 】



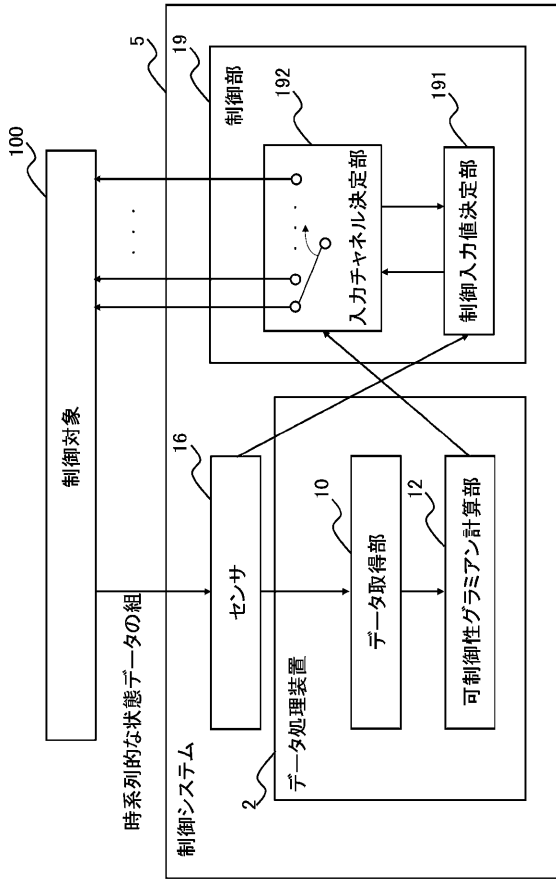
$x([t_{51}, t_{52}], x_{51})$

【 図 1 8 】



$x([t_{61}, t_{62}], x_{61})$

【図 19】



フロントページの続き

審査官 金沢 史明

(56)参考文献 特開平04 - 099939 (JP, A)

軸屋 一郎, 他, 連続時間線形周期システムのKalman正準分解に関する一考察 —システムと同じ周期での状態空間の可制御・不可制御部分への分解, 計測自動制御学会論文集, 日本, 社団法人計測自動制御学会, 2007年10月31日, Vol. 43, No. 10, pp. 892-900

(58)調査した分野(Int.Cl., DB名)

G 0 6 F 1 7 / 1 0