ここにも数学！
コンピュータグラフィックス

第16回 JST数学キャラバン 「拡がりゆく数学 in 水戸 2016」

廣瀬三平　（芝浦工業大学）

コンピュータグラフィックスとは

- コンピュータを用いて作成される画像（Wikipedia）
  - 2次元：図や絵を書く
  - 3次元：3次元空間内の仮想的な立体物を作り出す

- 中国語で書くと“計算机図形学”

応用：エンターテインメント

- 映画、アニメーション
    - ジュラシックワールド © 2015 ILM/Universal Pictures and Amblin Entertainment
    - ポケットモンスター © Nintendo・Creatures・GAME FREAK・TV Tokyo・ShoPro・JR Kikaku　© Pokemon　©　2016 ピカチュウプロジェクト
    - シドニアの騎士 © TSUTOMU NIHEI・KODANSHA / KOS Production Committee

応用：リアルタイムCG

- ゲーム
  - Final Fantasy Real-time Tech Demo © 2013 SQUARE ENIX CO., LTD.

- Web
  - WebGL Skin Rendering Demo © AlteredQualia

応用：工業製品のデザイン

- Computer Aided Design
  - デザイン、応力解析 © 2015 Dassault Systèmes SolidWorks Corp.

応用：シミュレーション

- 雪のシミュレーション

Stomakhin, Schroeder, Chai, Teran, Selle / ACM SIGGRAPH 2013

- 流体のシミュレーション

RealFlow © Next Limit Technologies

関連分野：画像処理

Kwatra, Schodl, Essa, Turk, Bobick / ACM SIGGRAPH 2003

Perez, Gangnet, Blake / ACM TOG 2003

関連分野：その他いろいろ

- 3Dプリンタ
  - 3次元の物体の印刷技術
  - 建築・医療・教育・航空宇宙などで使われ始めている
- コンピュータビジョン
  - コンピュータに”目”を持たせる技術
  - 画像からの情報を元に、物体を認識
  - 顔の認識、物体の認識、写真の物体の3次元化
- 製品の製作
  - 服、紙飛行機、凧、ぬいぐるみ

Berthouzoz, Garg, Kaufman, Grinspun, Agrawala /
ACM SIGGRAPH 2013

Umetani, Koyama, Schdmit, Igarashi /
ACM SIGGRAPH 2014

CGの国際会議 SIGGRAPH

- 毎年夏に開催されるCGの国際的な会議、展示会
- Disney、Pixar、DreamWorksなどが参加
- 様々なイベントが開催
    - テクニカルペーパー
    - アニメーションフェスティバル

CGと数学

- CGは数学により出来ているといっても過言でない
- CGを動機とした数学もある
- 以下ではこれを“鑑賞”していく

3次元の動きの記述と四元数 (1/3)

- 複素数　$a + bi$　　$i^2 = -1$
  - 2つの実数を並べたもの
  - 普通の数と同様に足し算や掛け算が出来る
  - 2次元（平面）の動きを記述
    - 複素数 $a + ib$ を足すことは平行移動
    - 実数 r をかけることは拡大、縮小
    - 複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ をかけることは回転

3次元の動きの記述と四元数 (2/3)

- 四元数　$a + bi + cj + dk$　$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
  - 4つの実数を並べたものであり、複素数と同様に足し算や掛け算などが出来る
  - イギリスの数学者ハミルトンにより複素数の拡張として考案（1843）
  - 四元数 $bi + cj + dk$ を3次元ベクトル (b, c, d) と考えると、四元数の足し算などの演算がベクトルの動きに対応
    - 四元数を足すことは平行移動
    - 実数をかけることは拡大、縮小
    - 四元数をかけることは（ある軸に沿った）回転

3次元の動きの記述と四元数 (3/3)

- 3次元の動き
  - 簡明に記述するのは大変（行列を用いる方法もある）
  - 四元数を用いて記述することにより、3次元の物体の動きが非常に簡単になる
    - ベクトルを用いた回転　$\cos\theta\, p + (1-\cos\theta)\langle n, p\rangle n + \sin\theta\, n \times p$
    - 四元数を用いた回転　$\bar{\lambda} p \lambda$
  - さらに物体の変形、例えば骨とその周りの皮膚の動きに利用された（2007）

Kavan, Collins, Žára, O'Sullivan / ACM SIGGRAPH 2008

表情の編集とベクトル (1/2)

- ベクトル
  - 幾つかの数字が集まったもの
  - 2次元ベクトルは2つの数、3次元ベクトルは3つの数
  - 物体の位置を表している
  - 足し算や内積、長さを求めることなどが行うことができた
    - 足し算　$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
    - 内積　$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$
    - 長さ　$|(x_1, x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

表情の編集とベクトル（2/2）

- 表情の編集
  - 表情は人間が特に注目する部分であり、映画の製作において重要
  - 感情が混ざった微妙な表情は鼻や目、口の位置を調整することによって作成だが非常に大変
  - そこで顔の表情を大きなベクトルで表す
    - 表情を表すベクトル　$(\mathrm{nose}, \mathrm{left\ eye}, \mathrm{right\ eye}, \ldots, \mathrm{mouth})$
  - 笑顔、怒り、悲しみなど代表的な顔のベクトルを用意し、足すことにより微妙な表情を出す

Anjyo, Todo, Lewis / JGT 2012

流体と微分方程式（1/2）

- 微分方程式
  - 微分は微小量の変化を記述するもの
  - この微分を含むような方程式を微分方程式と呼ぶ
  - 自然現象を含む様々な現象を記述
    - 波 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
    - 熱 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
    - ソリトン（非線形な波） $\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$
    - 量子力学 $\sqrt{-1}\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x)u$
    - 渦糸 $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}$

流体と微分方程式（2/2）

- 流体の方程式 $$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$
  - Navier-Stokes方程式と呼ばれる流体の動きを表す方程式
  - CGでは1990年代半ばから考察
  - 応用すると水の流れや雲、火、煙の動きを表すことが可能

Foster, Fedkiw /
ACM SIGGRAPH 2001

Fedkiw, Stam, Jensen /
ACMS IGGRAPH 2001

Nguyen, Fedkiw, Jensen /
ACM SIGGRAPH2002

リアルな画像の作成と積分方程式（1/2）

- 積分方程式
  - 積分は（条件を満たすものの）総和を表すもの
  - この積分を含む方程式を積分方程式と呼ぶ
    - 信号処理 $g(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt$
    - 粘弾性物質 $g(x) = \int_a^x K(x,t) f(t) dt$
    - レンダリング方程式

$$L_{\mathrm{o}}(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{o}},\, \lambda,\, t) \,=\, L_e(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{o}},\, \lambda,\, t) + \int_\Omega f_r(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{i}},\, \omega_{\mathrm{o}},\, \lambda,\, t)\, L_{\mathrm{i}}(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{i}},\, \lambda,\, t)\, (\omega_{\mathrm{i}} \cdot \mathbf{n})\, \mathrm{d}\, \omega_{\mathrm{i}}$$

リアルな画像の作成と積分方程式（2/2）

- リアルな画像の作成
  - 目に見える景色は入る光の総和（積分）によって求まる
  - これを式で表したものが先のレンダリング方程式

$$L_{\mathrm{o}}(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{o}},\, \lambda,\, t) \,=\, L_e(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{o}},\, \lambda,\, t) + \int_{\Omega} f_r(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{i}},\, \omega_{\mathrm{o}},\, \lambda,\, t)\, L_{\mathrm{i}}(\mathbf{x},\, \omega_{\mathrm{i}},\, \lambda,\, t)\, (\omega_{\mathrm{i}} \cdot \mathbf{n})\, \mathrm{d}\, \omega_{\mathrm{i}}$$

  - これを用いると画像のリアルさが飛躍的に向上 (1986)

まとめとコメント

- CGはエンターテインメントだけでなく、シミュレーションや可視化と関わっており、重要性はますます増大していくと考えられる
- CGでは古典的から最新まで様々な数学が用いられている
- 素朴なアイデアでも非常に強力な手法になることもある
  - 今回の説明した数学も基本的な部分は100年以上前のものばかり

参考

- 藤堂英樹、明治大学理工学部におけるコンピュータグラフィックスの授業資料