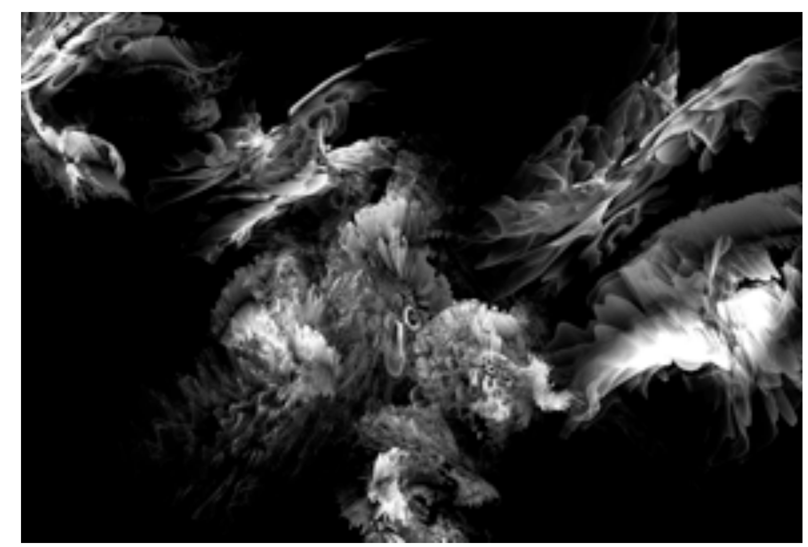
第１６回JST数学キャラバン
「拡がりゆく数学in水戸 2016」

カオス
--無秩序な世界に潜む秩序--



小林　幹

(立正大学経済学部)

カオスの意味

日常(ネット)用語：

混沌, 無秩序, 理解不能,独特の雰囲気,,,,

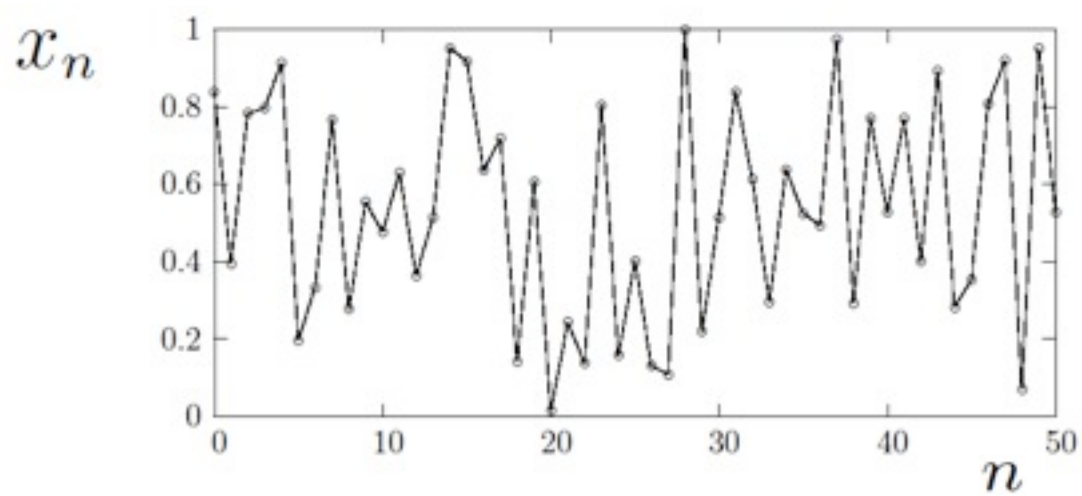
使い方：カオスな豪華ゲスト(ニコニコ超パーティー2015)

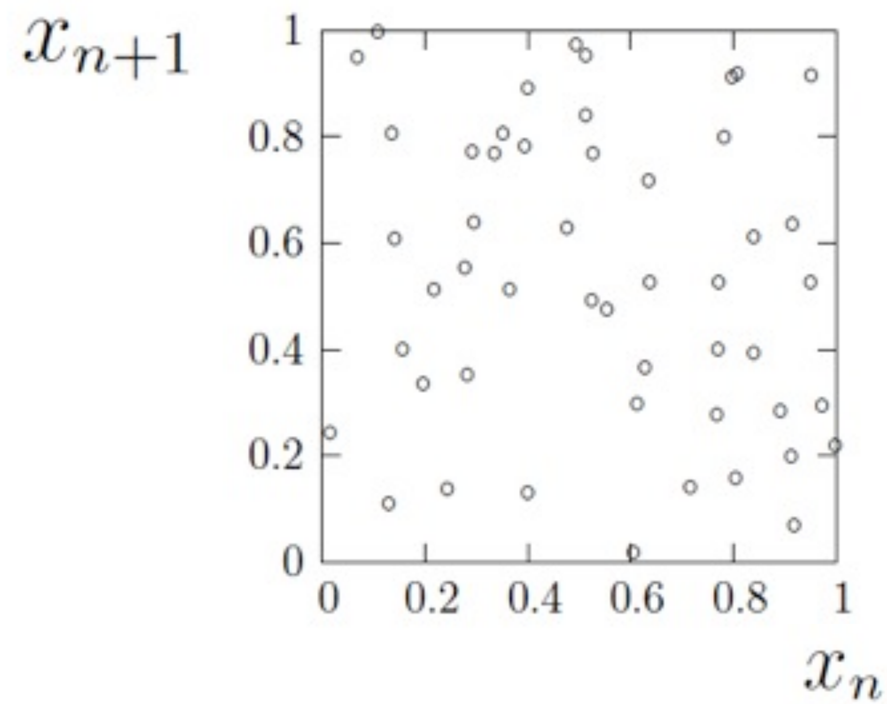
数学用語：

一見すると、**無秩序**だが、背後に**秩序**が存在する状態

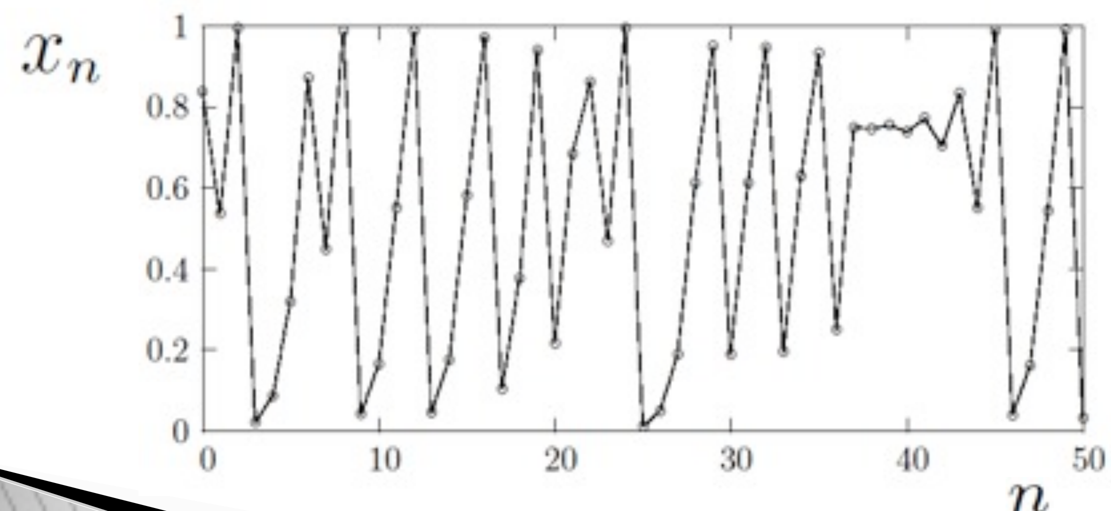
カオスに潜む秩序

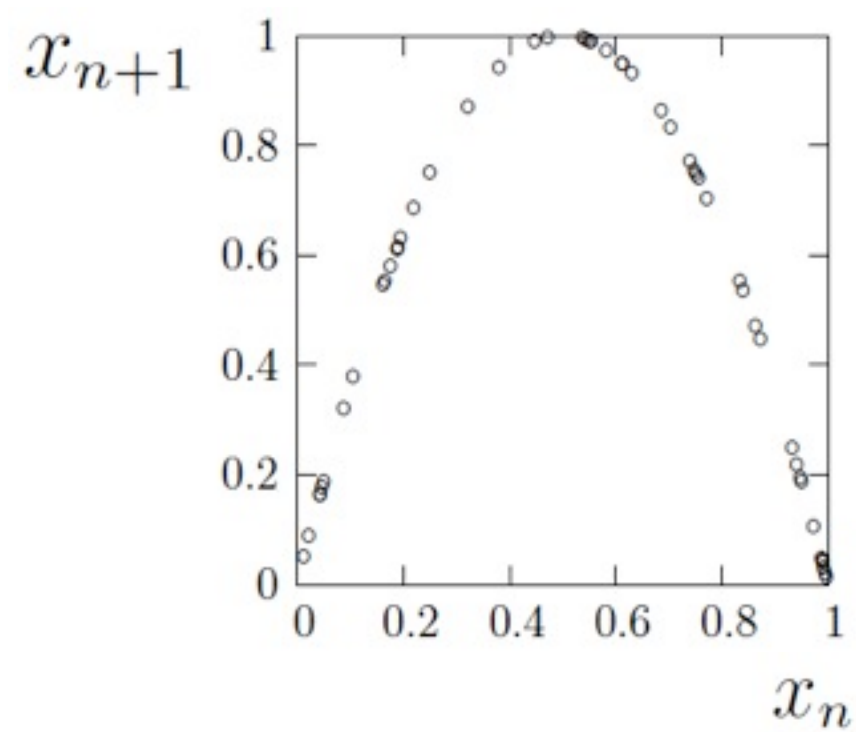
どちらも一見ランダムな時系列





ランダム





カオス

カオスの性質

カオスの性質：

(1)**複雑な非周期運動**である

(2)**初期値**に対して**鋭敏**な依存性を持つ(バタフライ効果)

(1) 複雑な非周期運動である

複雑：多様な運動が存在する

非周期：同じ運動が二度と繰り返されない

2重振り子

(2) 初期値に対して**鋭敏**な依存性を持つ　(後で詳しくやります)

初期の状態がほんの少し違うだけで後の状態がガラッと変わってしまう

バタフライ効果　初期値鋭敏性の効果を面白く表現したもの。

ブラジルで蝶が羽ばたいたことが原因で中国では嵐になる。

映画の「バタフライエフェクト」は、この効果をストーリーに取り入れたもの

バタフライ効果が存在する例

朝たった３０秒家を出るのが遅れたばっかりに１時間遅刻した。
(乗った電車が止まった。一本早い電車に乗れさえすれば。。。)

バタフライ効果が存在しない例

ジャンプして地球の軌道をずらしても月食が起きる日時は変わらない。

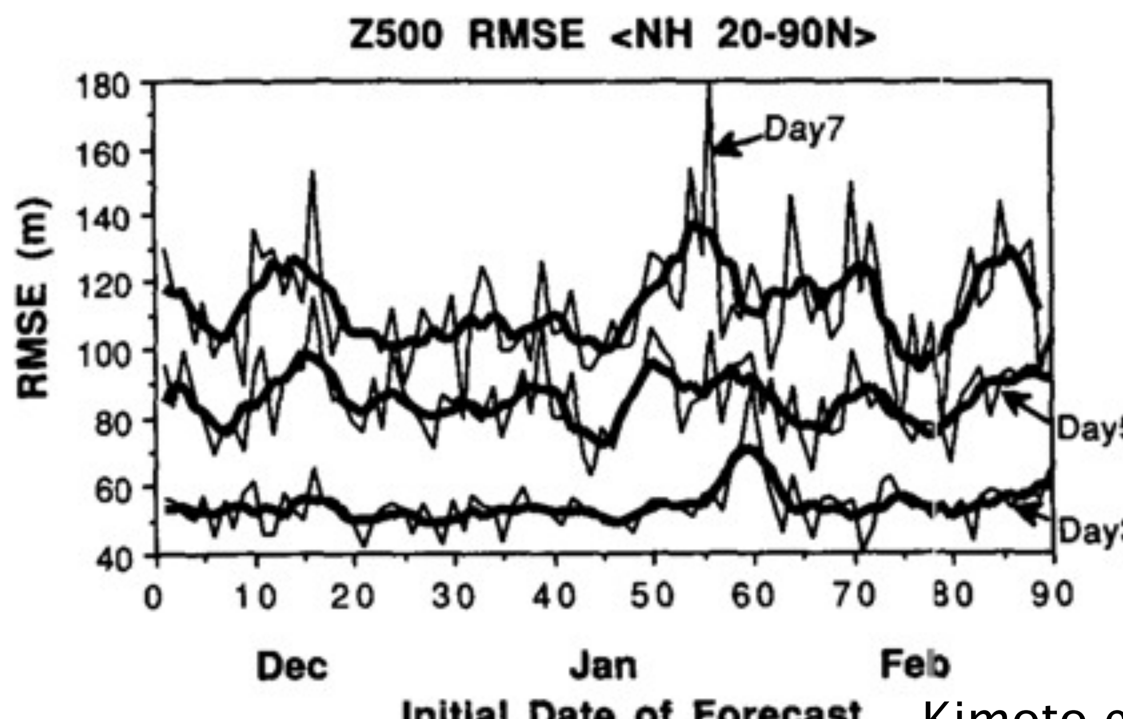
身近なカオス

お天気

運動方程式、状態方程式、熱力学の式などがカップルした方程式(約50000000本)を解いて天気予報を行う。

天気予報が外れる事があるのは、お天気がカオスであり初期値鋭敏性を持つから。

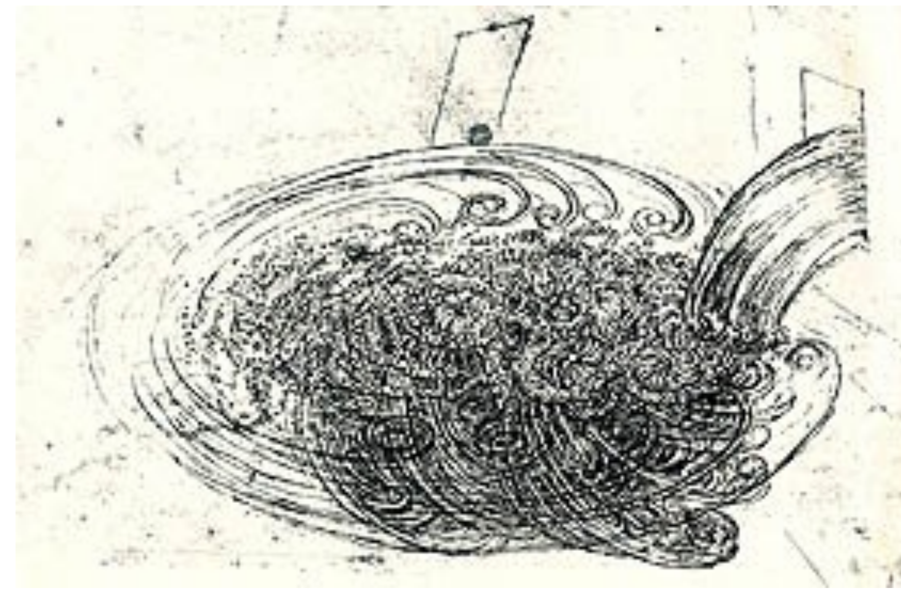
気象庁で実際に使われてた
気象モデル方程式における**数値予報誤差**



Kimoto et al. 2002

乱流

（ダクトから流れる水）

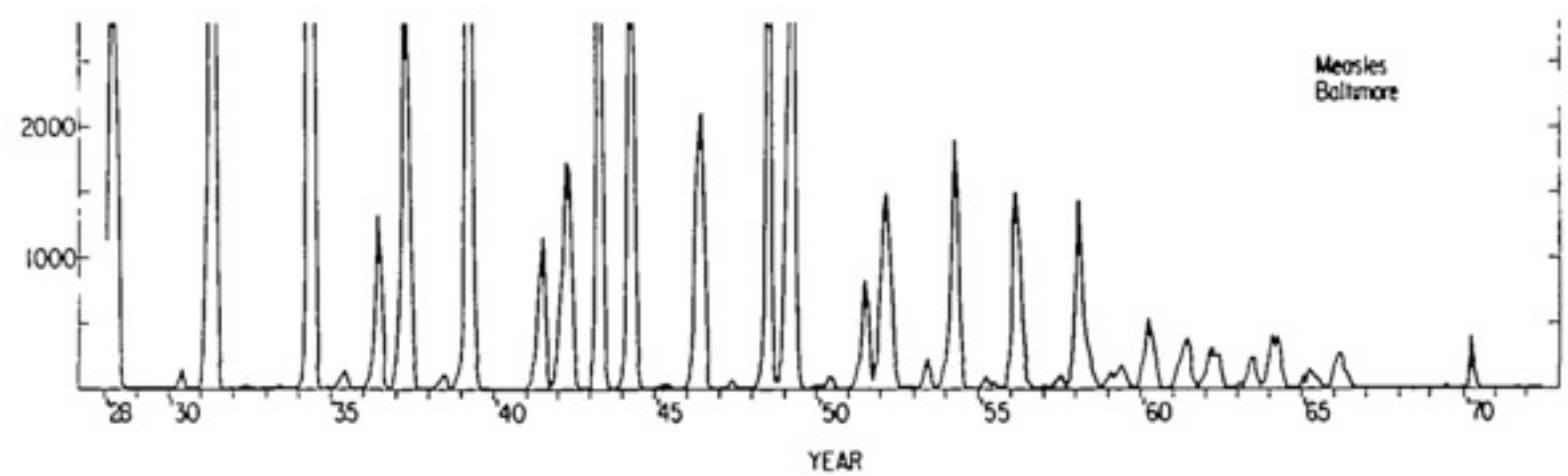


レオナルド　ダビンチのスケッチ１５００年代初め

カオスの本質を捉えたスケッチ

ニューヨークにおける

はしかの発生件数



Gallamov et al. 1998

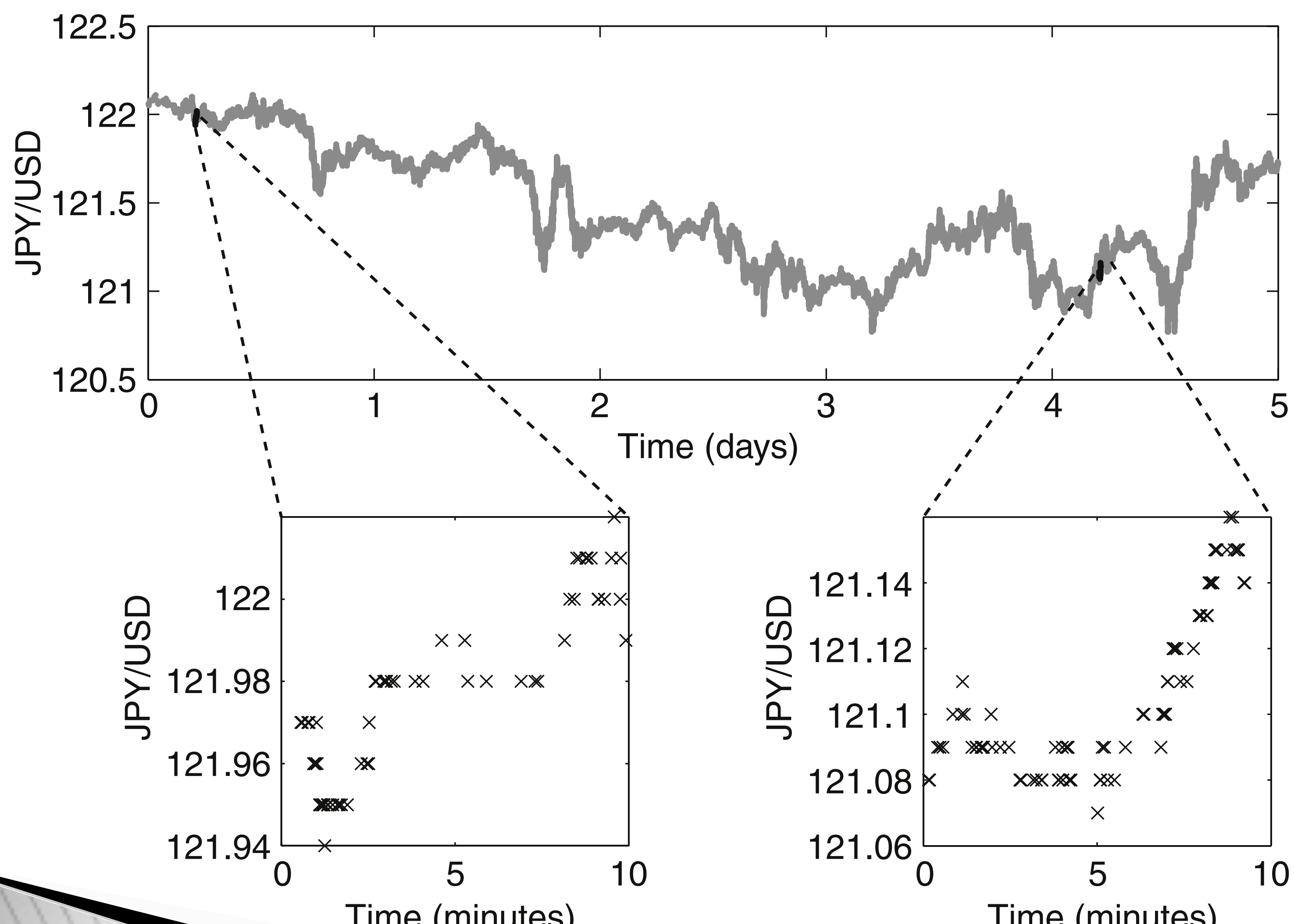
経済システム

外国為替市場

用いたデータ　　ICAPのEBSのデータを使用

2007年６月４日から１週間(55361回のトレード)

USDのJPYへの換金率における典型的なトレードパターン



Hirata et al. 2011 Physica A

ランダム性も存在するがカオス性の方が強い

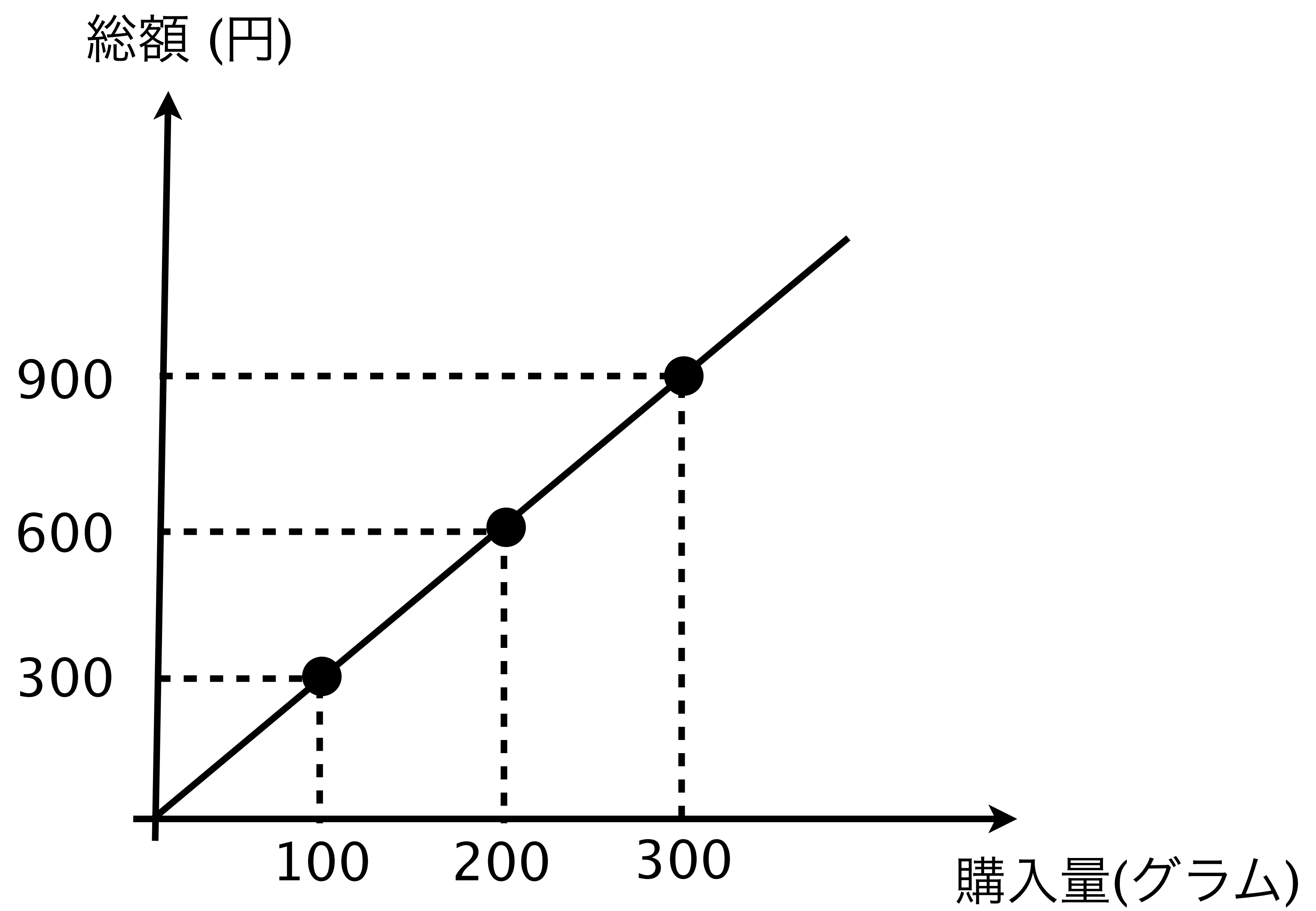
カオスが存在できる世界

非線形な世界

線形の世界とは？

１＋１が２の世界

例1　品物の購入(例えばお肉)



100グラム買ったら300円

200グラム買ったら600円(300円+300円)

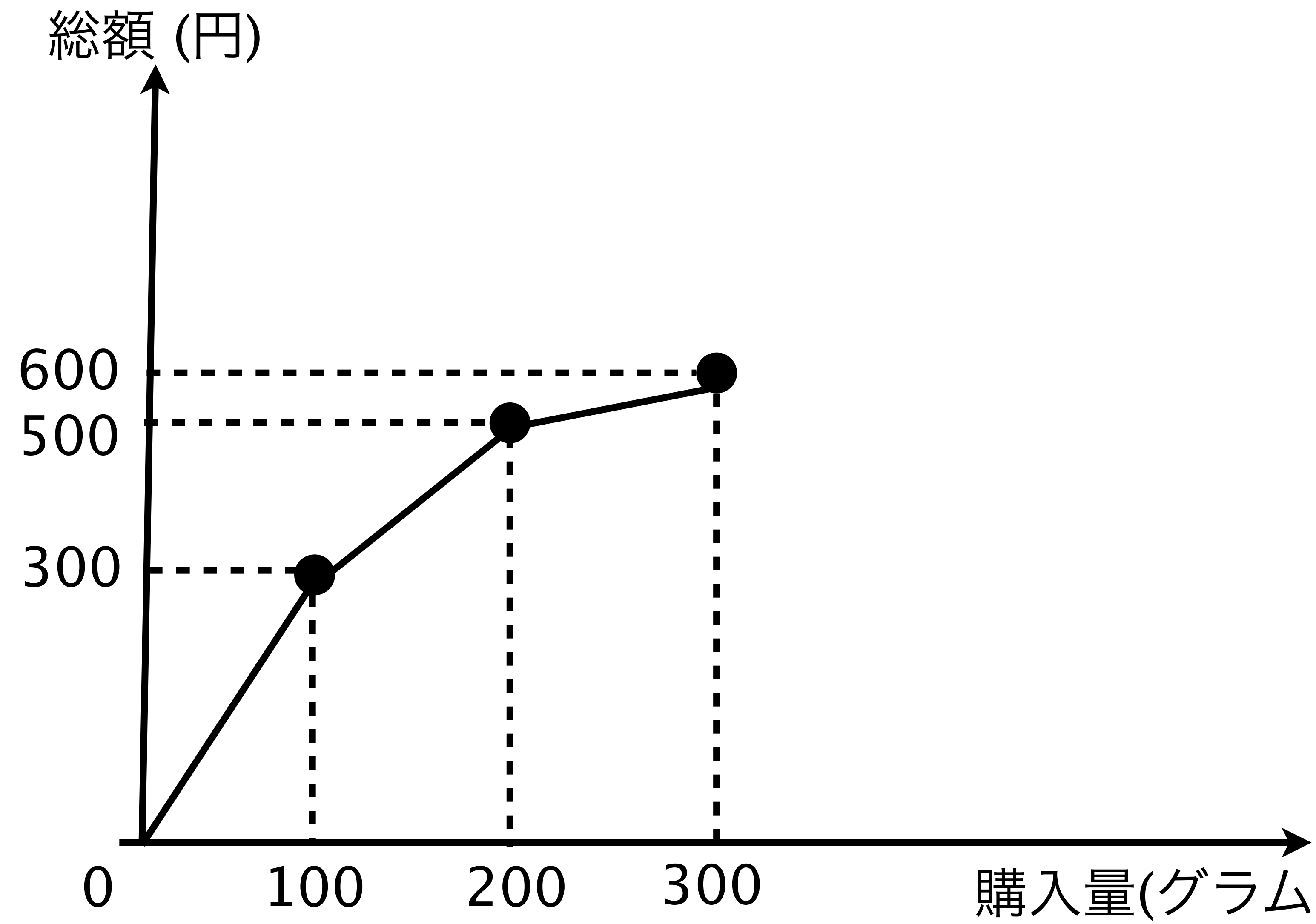
インプットとアウトプットの関係が直線の世界

---> 線形の世界 (単純に増えるか減るかの世界)

非線形の世界とは？

１＋１が２ではない世界

例：たくさん購入すると割引きのある店 (例 肉屋)



100グラム買ったら300円

200グラム買ったら500円(≠300円+300円)

インプットとアウトプットの関係が直線ではない世界 ---> 非線形の世界

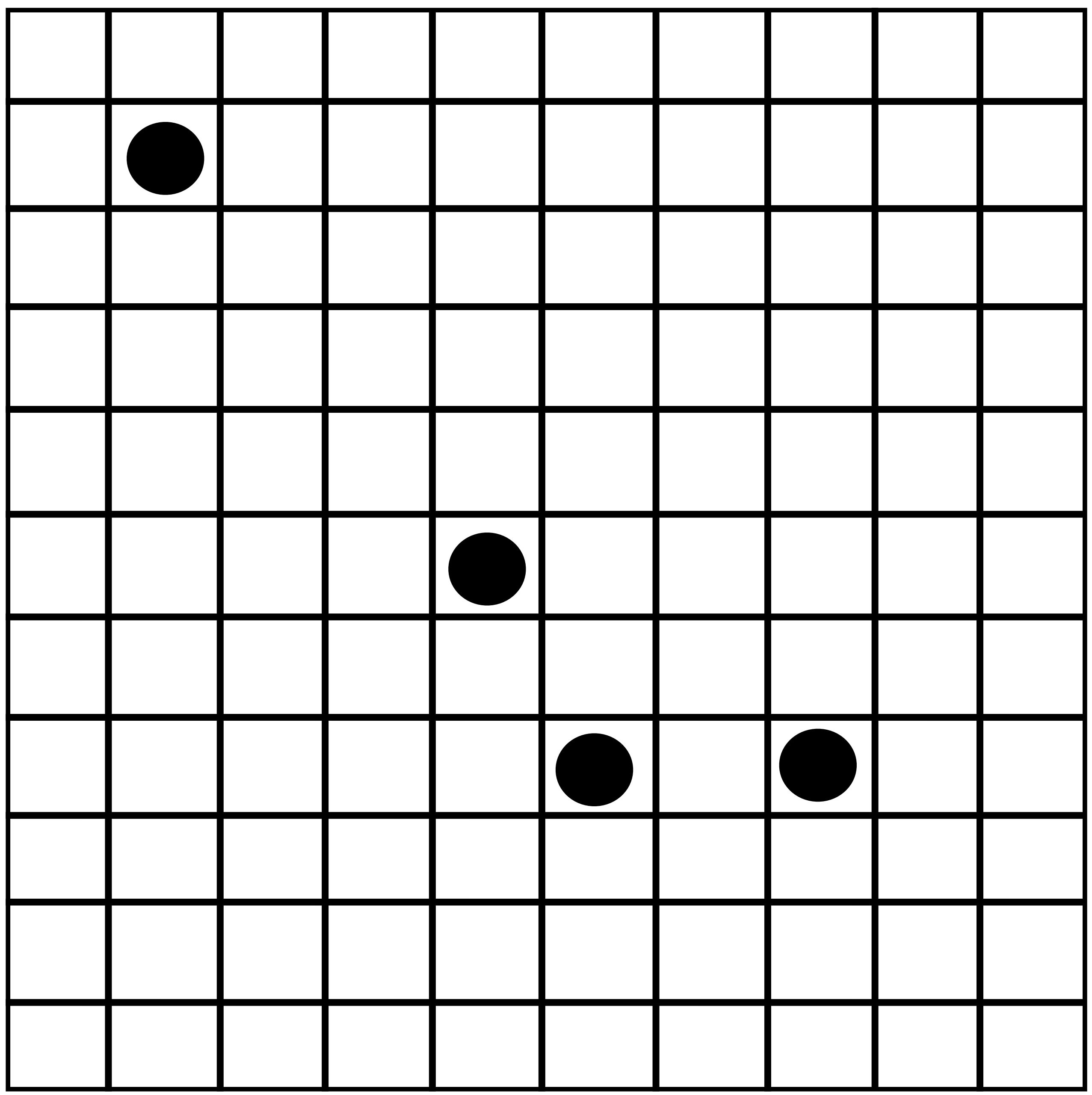
注意) 実世界のほとんどは非線形の世界

他の例：いつもより２倍勉強してもテストの点は２倍にはならない。

非線形の世界とは？

生物の個体数の変動

x_t ：時刻tにおける生物の個体数密度



個体数密度 x_t

100箇所住める場所があるときに、
100匹住んでいたら個体数密度=1

100箇所住める場所があるときに、
50匹住んでいたら個体数密度=0.5

100箇所住める場所があるときに、
4匹住んでいたら個体数密度=0.04

個体数密度 x_t はどのように変化するか？

枠は生物が住める場所

●は生物が住んでいることを表す

生物の個体数の変化を表す数理モデル

個体数密度の変化のルール

時刻t(年)でのある生物の個体数密度を x_t とする。
争いがなければ生物の個体密度は一年でa倍になる $x_{t+1} = ax_t$ (aは増殖率)
しかし、個体密度が増え続けると食料不足となり、えさの取り合い
により争いが起き、個体数はa倍ではなく、$a(1-x_t)$ 倍になるとする。

結局個体数密度 x_t の変化は

$$x_{t+1} = a(1-x_t)x_t$$

例えば個体数密度が1(つまり満員状態)になると、
至る所でえさの取り合いが激しくなって
0倍に減ってしまう。つまり、全員がけんかして
密度が０(つまり0匹)になってしまう。

個体数密度が0.1(つまりスカスカ)の時はそれほどけんか
は起こらないのでa倍に近い0.9a倍で増える。

生物の個体数密度の変化

増殖率 $a = 2$ の時を考える。そしてもし争いがなかったら。

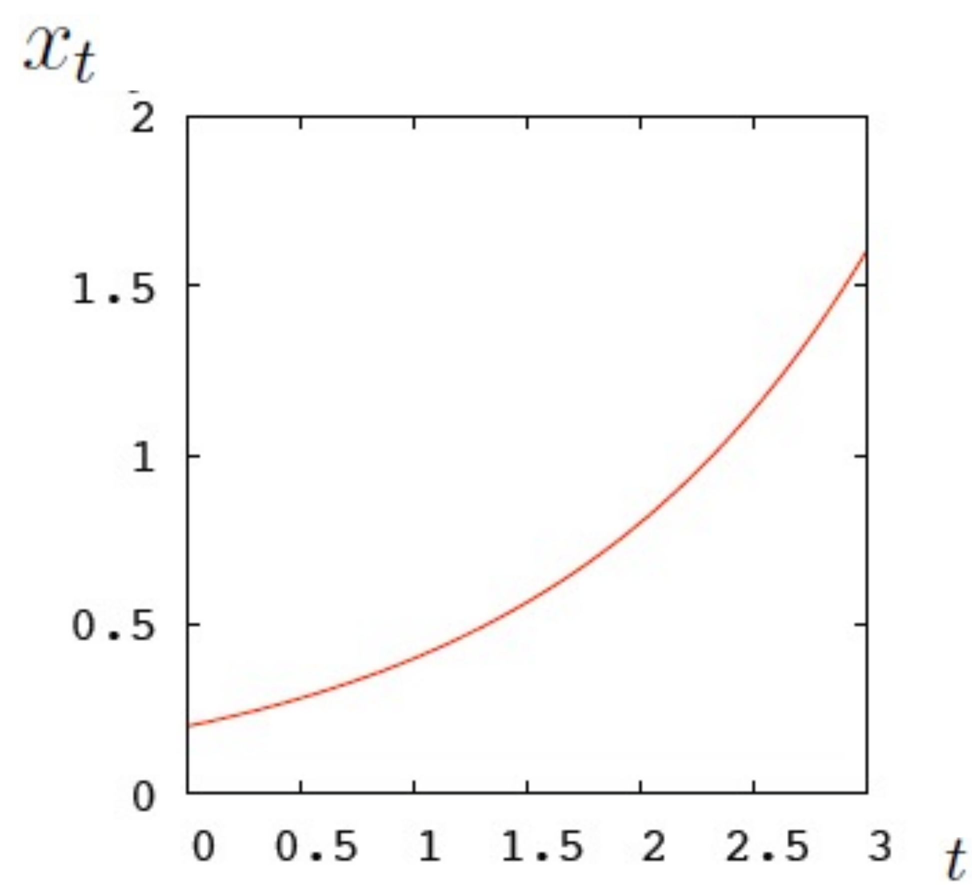
$x_{t+1} = 2x_t$ ← 線形の世界

0年で個体数密度が0.2の時を考える。つまり $x_0 = 0.2$

1年後 $x_1 = 2.0 \times 0.2 = 0.4$

2年後 $x_2 = 2.0 \times 0.4 = 0.8$

3年後 $x_3 = 2.0 \times 0.8 = 1.6$



個体数密度が単純に増え続ける。

線形の世界だと長時間にわたる個体数の変化をうまく捉えられない。

生物の個体数密度の変化

増殖率 $a = 2$ の時を考える。さらに争いも起きるとする。

$$x_{t+1} = 2(1 - x_t)x_t \longleftarrow$$ 非線形の世界

0年で個体数密度が0.3の時を考える。つまり $x_0 = 0.3$

１年後 $x_1 = 2.0 \times (1 - 0.3) \times 0.3 = 0.42$

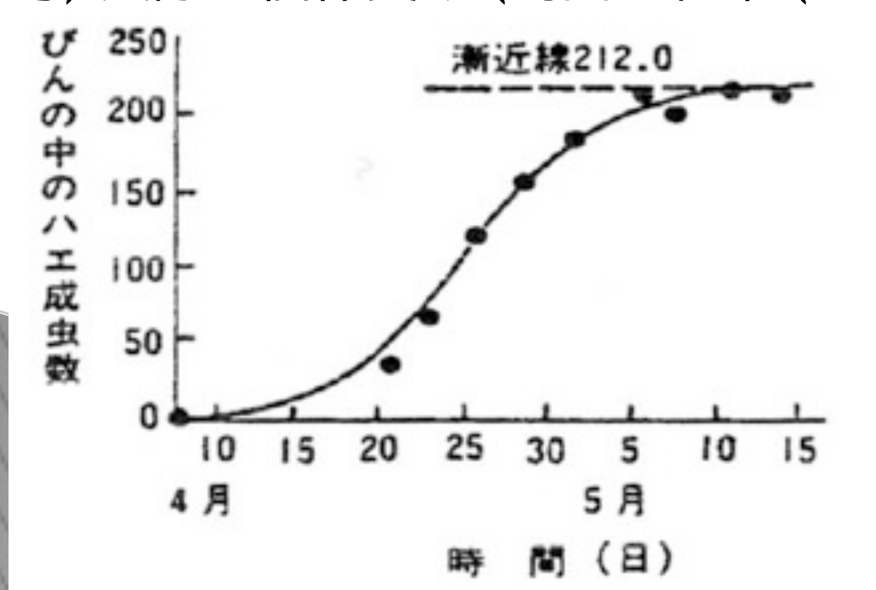
２年後 $x_2 = 2 \times (1 - 0.42) \times 0.42 = 0.4872$

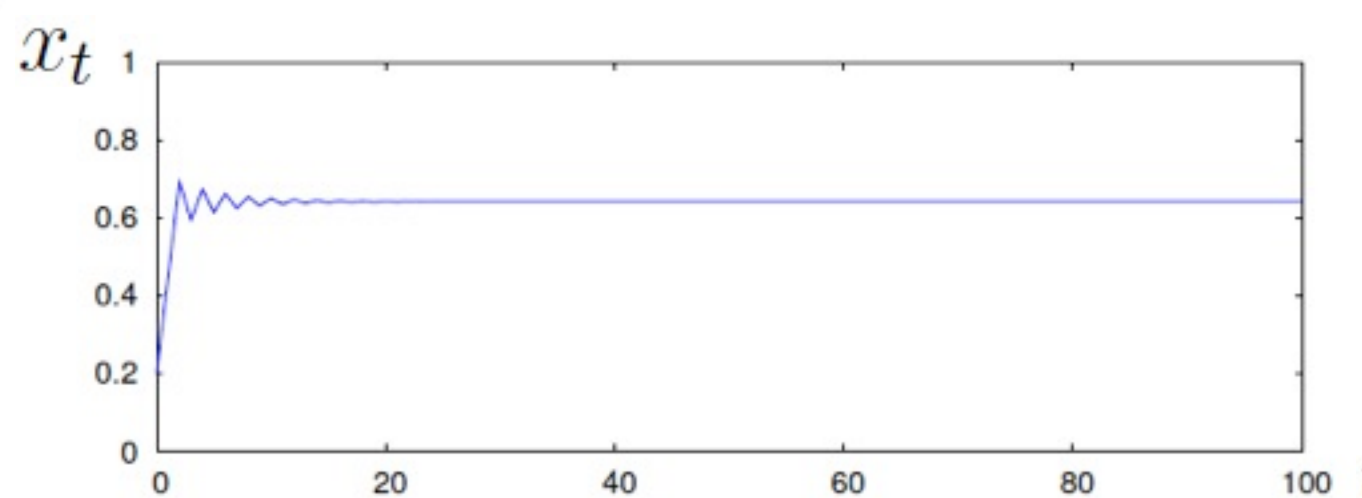
３年後 $x_3 = 2 \times (1 - 0.4872) \times 0.4872 = 0.4999$

４年後 $x_4 = 2 \times (1 - 0.4999) \times 0.4999 = 0.5001$

５年後 $x_5 = 2 \times (1 - 0.5001) \times 0.5001 = 0.5000$

参考) 実際の個体変動 (嶋田正和 他(2005))





一定の値に収束する。個体密度が一定になる。

生物の個体数密度の変化

同様にして増殖率 $a = 3.2$ の時を考える。つまり $x_{t+1} = 3.2(1 - x_t)x_t$

0年で個体数密度が0.2の時を考える。つまり $x_0 = 0.2$

１年後

$$x_1 = 3.2 \times (1 - 0.2) \times 0.2 = 0.512$$

２年後

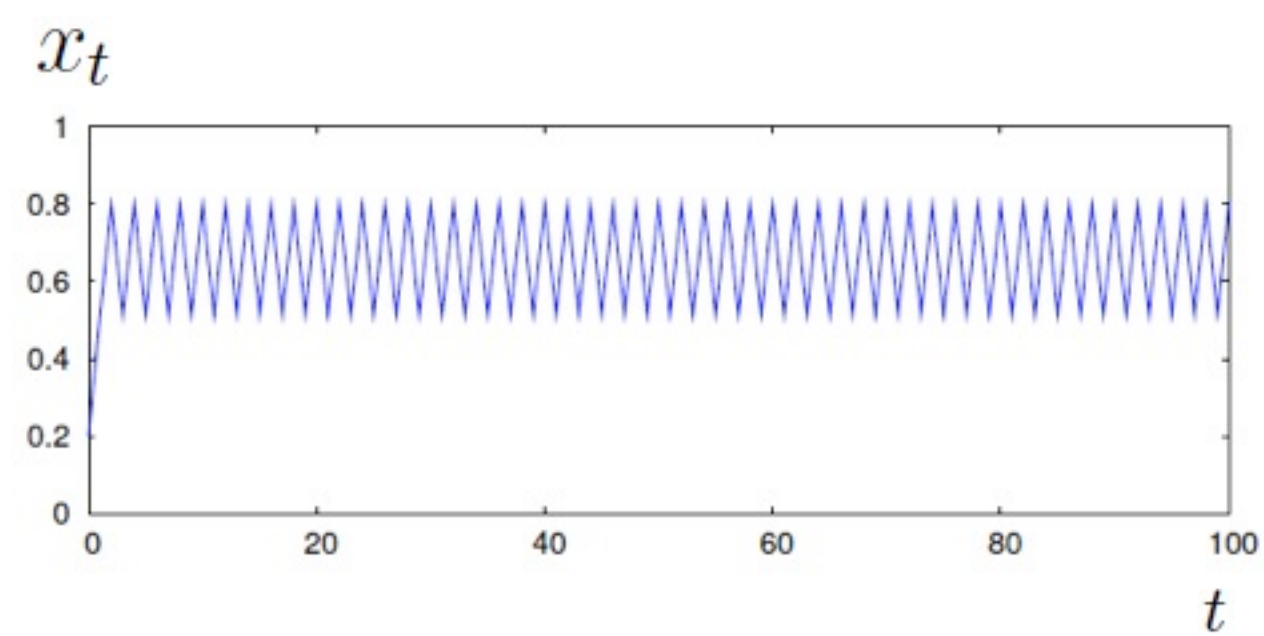
$$x_2 = 3.2 \times (1 - 0.512) \times 0.512 = 0.80$$

３年後

$$x_3 = 3.2 \times (1 - 0.80) \times 0.80 = 0.512$$

４年後

$$x_4 = 3.2 \times (1 - 0.512) \times 0.512 = 0.80$$

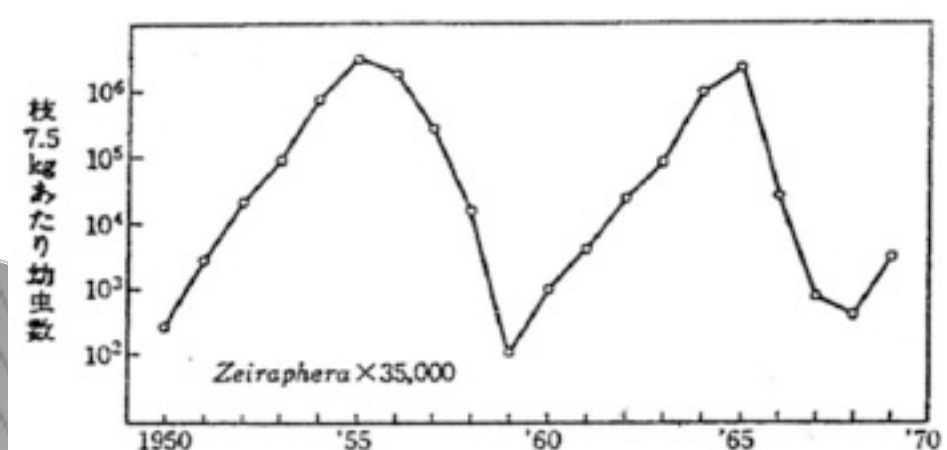


個体数密度が周期的になる。

密度が低いと争いが少ないので密度が増え、

密度が増えると争いが起きて密度が減るを繰り返す。

参考) 実際の個体変動 (Baltensweiler(1971))



カラマツアミメハマキ

生物の個体数密度の変化

同様にして増殖率 $a = 4$ の時を考える。つまり $x_{t+1} = 4(1 - x_t)x_t$

0年で個体数密度が0.2の時を考える。つまり $x_0 = 0.2$

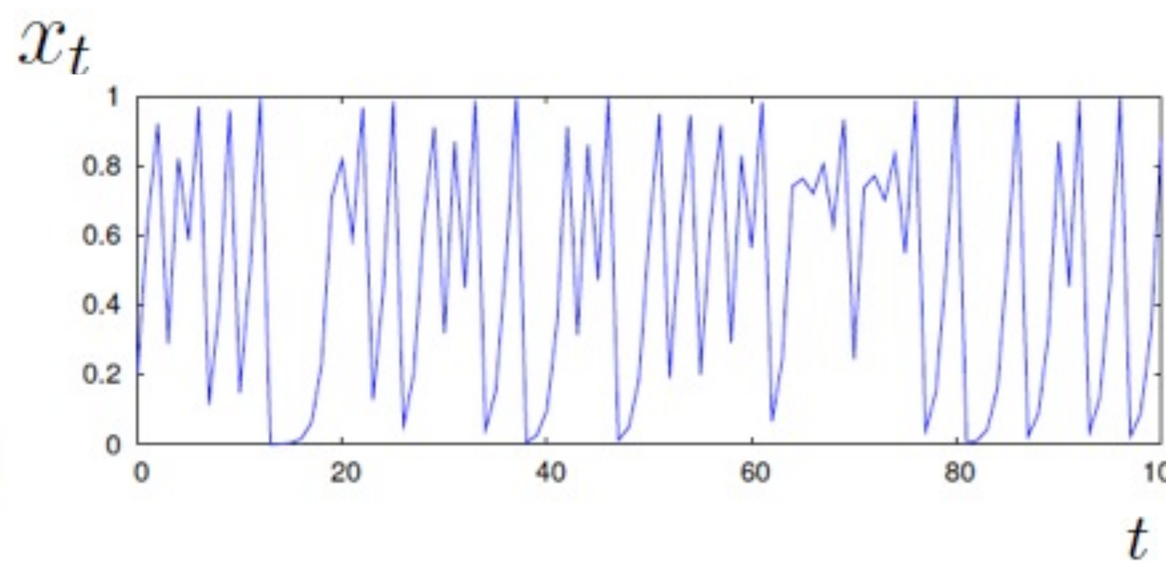
１年後　$x_1 = 4 \times (1 - 0.2) \times 0.2 = 0.6400$

２年後　$x_2 = 4 \times (1 - 0.64) \times 0.64 = 0.9216$

３年後　$x_3 = 4 \times (1 - 0.9216) \times 0.9216 = 0.2870$

４年後　$x_4 = 4 \times (1 - 0.2870) \times 0.2870 = 0.8219$

５年後　$x_5 = 4 \times (1 - 0.8219) \times 0.8219 = 0.5852$



個体数密度が複雑に変動する。

$\longrightarrow$ **カオス**

参考) 実際の個体変動 (桑畑勤 (1984))

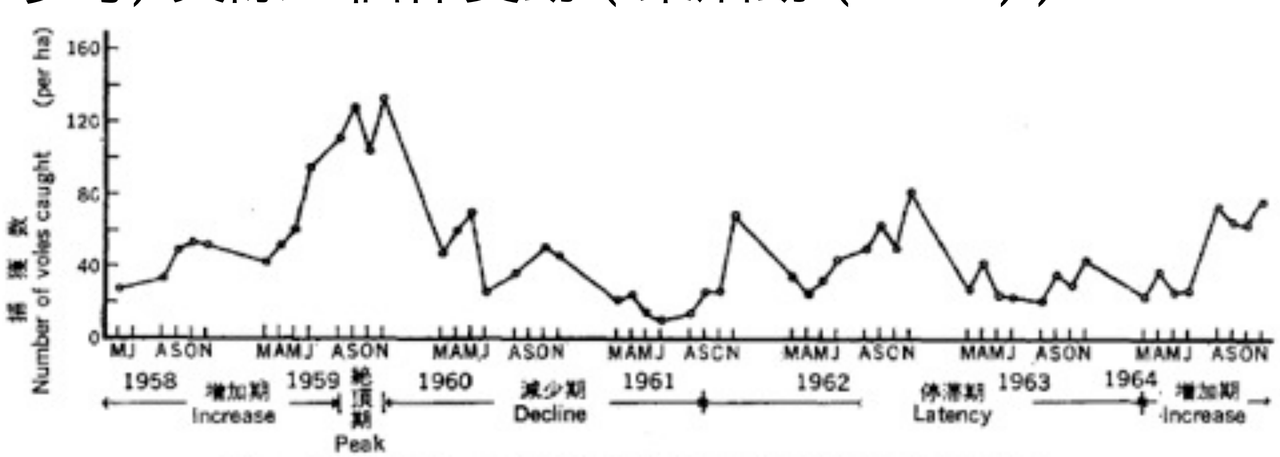


Fig. 5. 野幌トドマツ天然林におけるエゾヤチネズミの個体数変動

初期値鋭敏性について

初期値鋭敏性：現在の状態がほんの少し違うだけで未来の状態が全く異なる性質

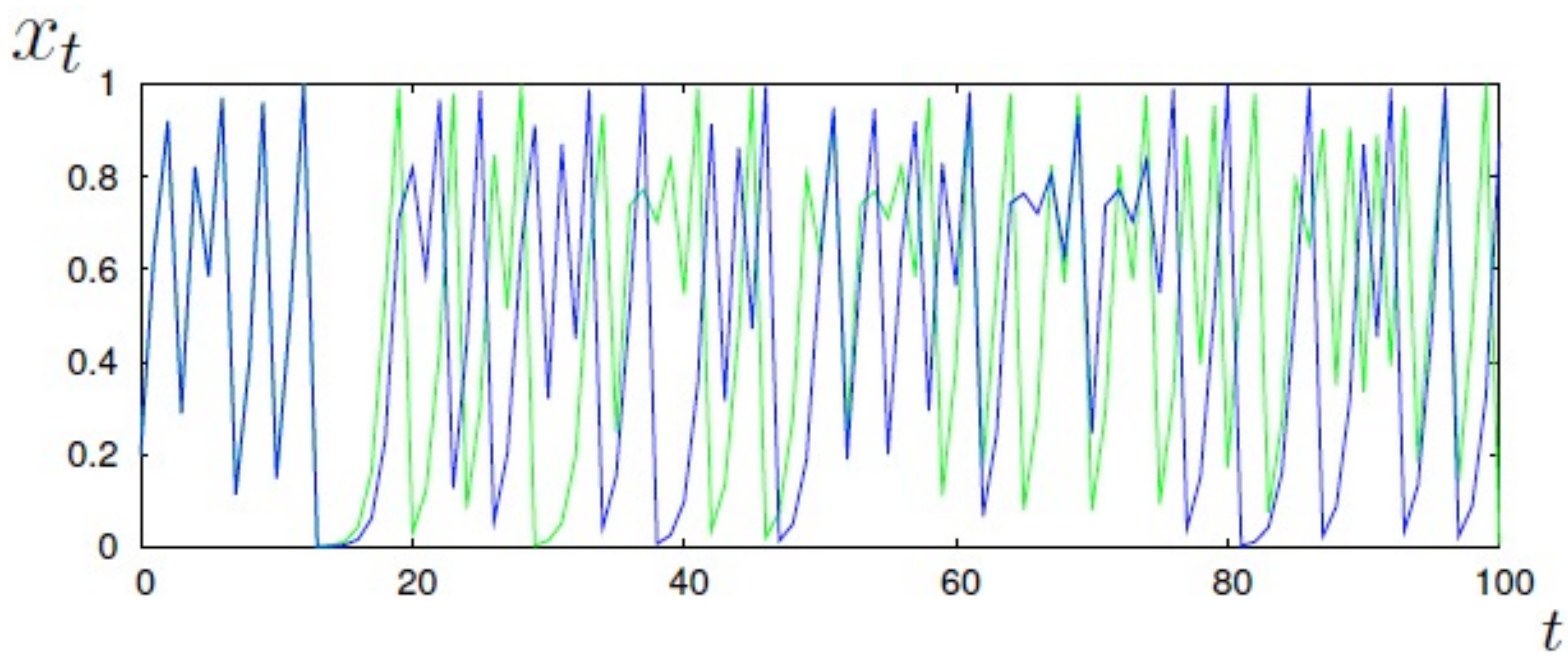
$x_{t+1} = a(1 - x_t)x_t$, ($a = 4$)を用いて実際に体験してみよう。

$x_0 = 0.1$ ， $x_0 = 0.101$ のそれぞれの軌道を計算しなさい、ただし
小数点第４位を四捨五入して小数点３桁で計算すること。

注） $x_{t+1} = 2x_t$ などの線形の世界では初期値鋭敏性は無いことに注意しよう

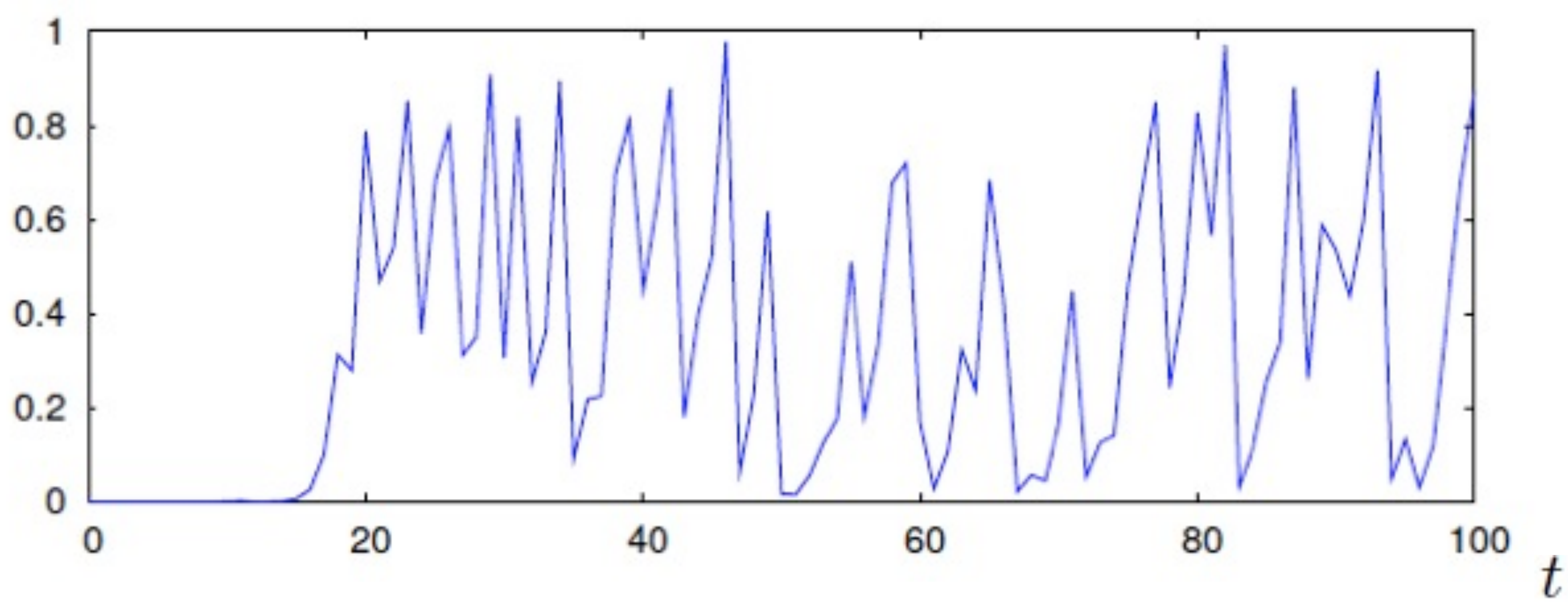
初期値 $x_0 = 0.2$ と 0.200001

青　　　　　緑



時刻0では無視出来るくらいの誤差0.000001が時刻20では無視出来ない大きさ(約0.8)に拡大している。

二つの軌道の誤差



カオス

カオスとはただの混沌ではなく

(1)**複雑な非周期運動**である

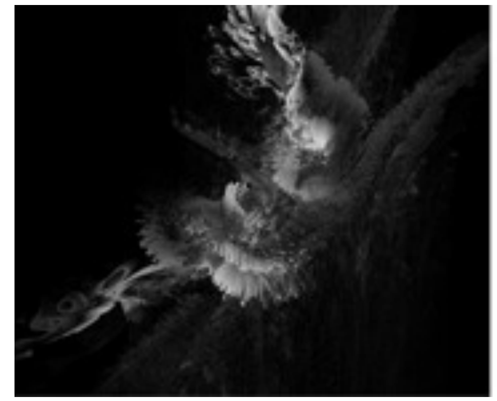
(2)**初期値**に対して**鋭敏**な依存性を持つ(バタフライ効果)

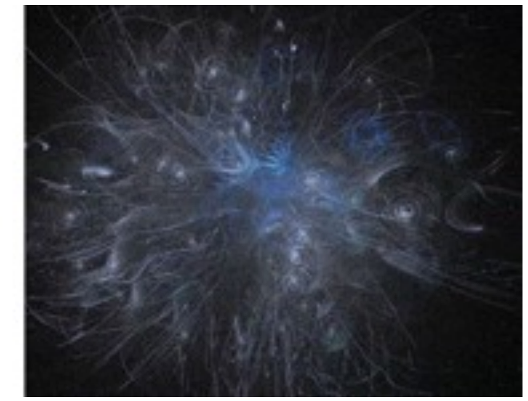
などの性質(秩序)を持っている。

背後に潜む秩序を利用したカオス芸術１

カオスを利用したグラフィックス

芸術の**動的表現**





木本圭子(芸術家)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos\theta - y_n sin\theta)/r_n^{\ 2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n sin\theta + y_n \cos\theta)/r_n^{\ 2} \end{cases}$$

$$r_n = \sqrt{x_{n+1}^{\ \ 2} + y_{n+1}^{\ \ 2}}$$

カオスの数理方程式を解いて

グラフィック化しているだけ。

・二度と同じパターンは現れない

・複雑な構造

カオスの未解決問題

カオスの数学的定義

カオスの完全な数学的定義は存在しない

カオスの(数学的)定義：

Li-Yorkeの定義　　Devaneyの定義　　Palis-Takensの定義　など。

参考文献　力学系の基礎　國府寛司著

どの定義も一長一短

カオスの(物理的、直感的)定義：

（見た目で）複雑な振る舞いをしていて、初期値鋭敏性を持てばカオス的だとする。

混沌（カオス）に目鼻をつけると混沌は死ぬ　「荘子　応帝王篇」

カオスを定義出来ない事がカオスの本質か？