セル・オートマトンで描く複雑パターン

第13回 JST数学キャラバン in 水戸

川原田 茜 （静岡県立大学 経営情報学部）

- 次のような記号列$\{a_n\}$が与えられたとする。

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

- 次のような記号列$\{a_n\}$が与えられたとする。

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

- 以下のルールに従い$\{a_n\}$から新たな記号列を作ってみる。

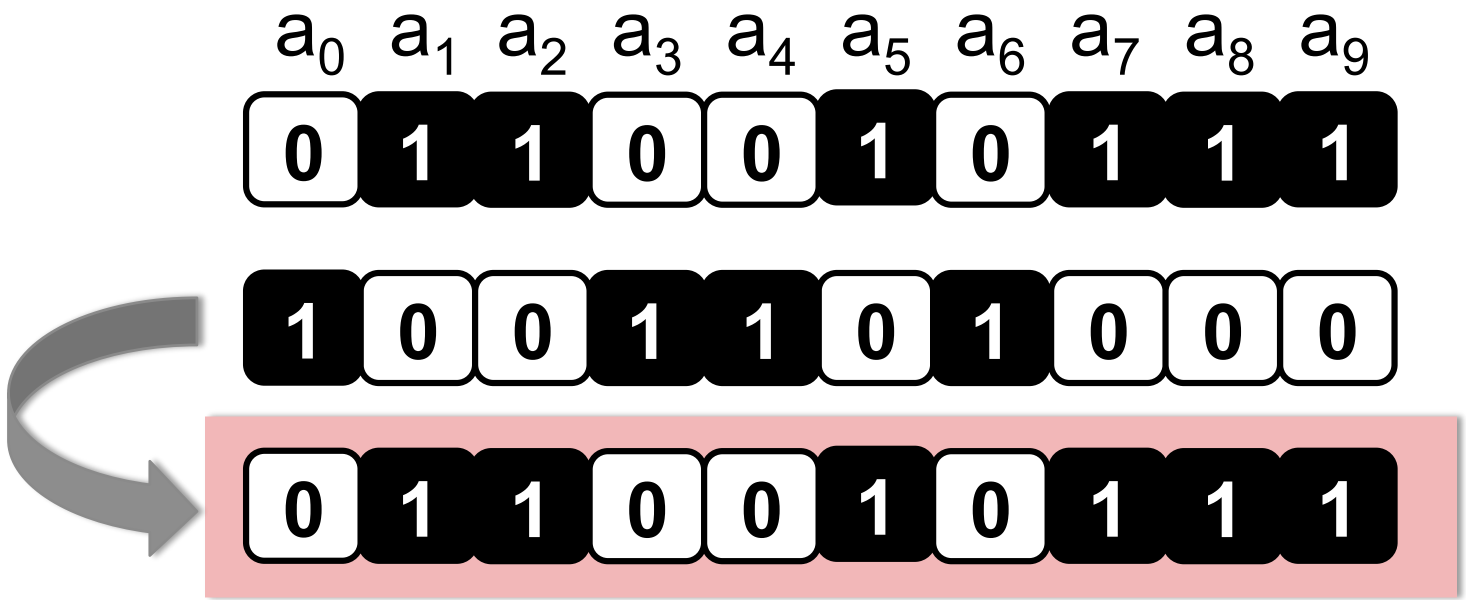
$$\begin{cases} a_i \text{ が } \boxed{0} \text{ ならば } \to \boxed{1} \\ a_i \text{ が } \boxed{1} \text{ ならば } \to \boxed{0} \end{cases}$$

- 記号列$\{a_n\}$から構成した 新たな記号列

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0

- 再び $\left\{\begin{array}{l} \text{いま } \boxed{0} \text{ ならば } \boxed{1} \\ \text{いま } \boxed{1} \text{ ならば } \boxed{0} \end{array}\right.$ により新たな記号列を作る。

- 記号列$\{a_n\}$から構成した 新たな記号列



- さらに新たな記号列を作る。

0と1からなる記号列の時間発展

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
初期配置	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
2 step	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
3 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
4 step	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
5 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
⋮		⋮			⋮			⋮		

0と1からなる記号列の時間発展

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
初期配置	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
2 step	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
3 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
4 step	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
5 step	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
⋮	⋮				⋮			⋮		

この記号列の時間発展パターンはとてもシンプル。
周期的なので、未来の挙動も全部分かる。

- 次に、ルールを少し変えてみる。

● 3つの記号組で決定されるルール

自分自身と右隣＆左隣の記号組から次の記号を決める。

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	0	1	1	0	1	0

● 次の記号列の時間発展を考えてみる。（両端は 0 で固定する。）

初期配置	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
2 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0

● 3つの記号組で決定されるルール

<u>自分自身</u>と<u>右隣</u>&<u>左隣</u>の記号組から次の記号を決める。

000	001	010	011	100	101	110	111
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0	1	1	0	1	0

● <u>次の記号列の時間発展を考えてみる。</u>（両端は 0 で固定する。）

初期配置	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1 step	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
2 step	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

● 次に、さっきと異なる初期配置からの時間発展を描いてみる。

初期配置	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
2 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
3 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0
4 step	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0

● ルール

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	0	1	1	0	1	0

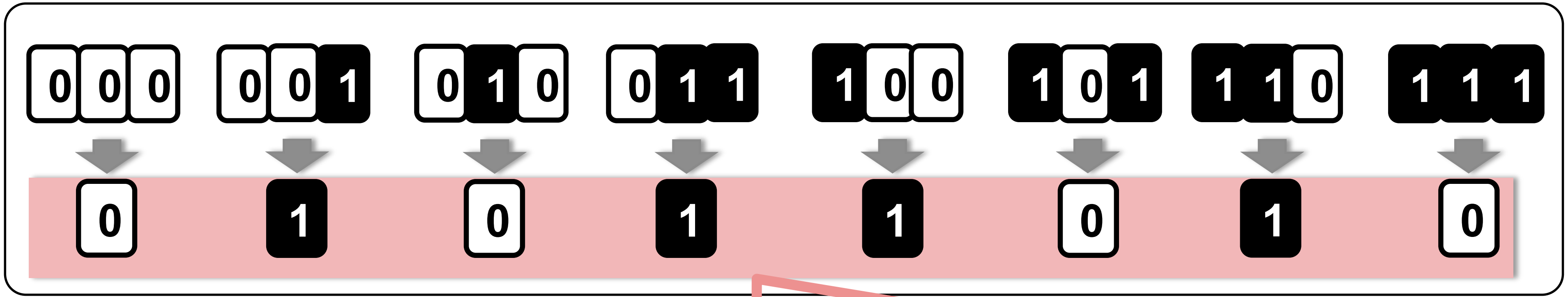
SIERPINSKI GASKET

- それぞれの記号が、自分の近く（両隣）の記号の様子をうかがいながら次の記号を決定する。

セル・オートマトン
CELLULAR AUTOMATON

・・・ 局所的な相互作用により、複雑で多様なパターンを生成することができる数理モデル。

- 3つの記号組で決定されるルール



ここを換えると別のセル・オートマトンになる。

- 各セルの記号が2種類（0か１）、3つの記号組（自分と両隣）でルールが決まるとき、エレメンタリー・セル・オートマトンとよぶ。
- 記号はそれぞれ **0か1** になるので、エレメンタリー・セル・オートマトンは全部で **$2^8 = 256$** 個ある。
- **全部のエレメンタリー・セル・オートマトンに名前がついている。（Rule0 ～ Rule255）**

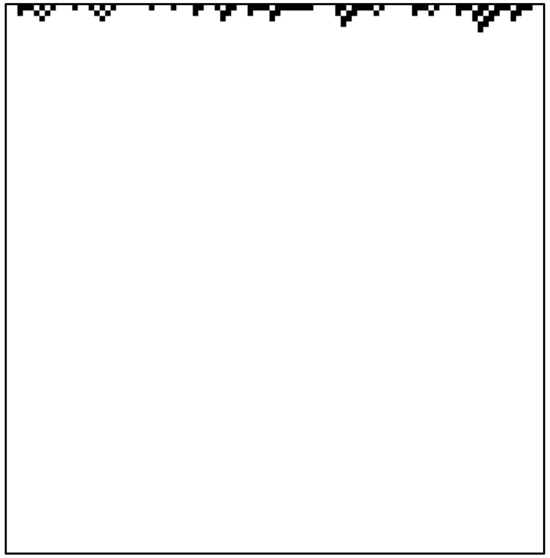
Wolframによるセル・オートマトンの分類

セル・オートマトンの挙動によって4つのクラスに分類できる。

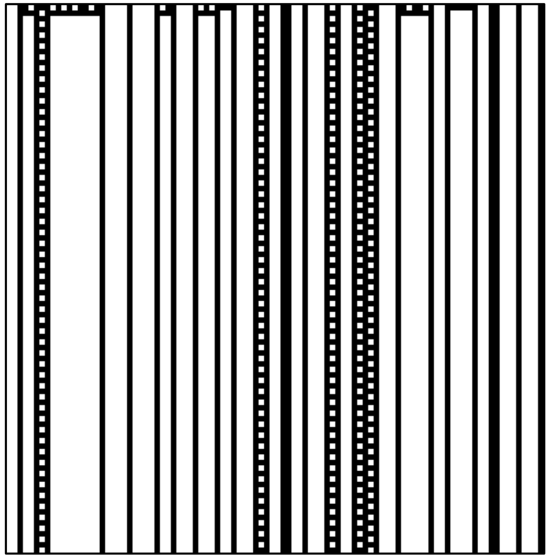
ほとんど全ての初期配置に対して、

- **クラス1**： ある程度時間が経過すると
  全セルの状態が **0** または **1** の記号列になる。
- **クラス2**： ある程度時間が経過すると
  周期的な挙動に落ち着く。
- **クラス3**： カオス的な振る舞い（非周期的）を示す。
- **クラス4**： 周期的なパターンとランダムなパターンが
  組み合わさり、複雑な挙動となる。

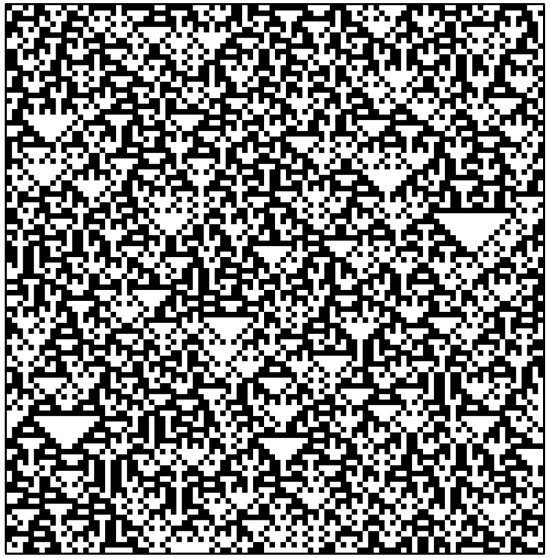
クラス1 (Rule40)



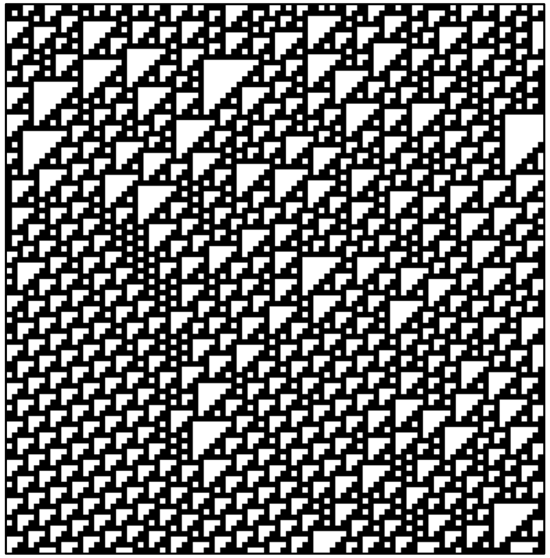
クラス2 (Rule108)



クラス3 (Rule90)



クラス4 (Rule110)



Wolframによるセル・オートマトンの分類

セル・オートマトンの挙動によって4つのクラスに分類できる。

ほとんど全ての初期配置に対して、

- **クラス1**： ある程度時間が経過すると
  全セルの状態が **0** または **1** の記号列になる。
- **クラス2**： ある程度時間が経過すると
  周期的な挙動に落ち着く。
- **クラス3**： カオス的な振る舞い（非周期的）を示す。
- **クラス4**： 周期的なパターンとランダムなパターンが
  組み合わさり、複雑な挙動となる。

この分類は画期的ではあるが、数学的にはまだ曖昧さが残る。

たくさんの研究者がたくさんの定式化を試みていますが、
まだみんなが納得できるような結論は得られていません。

まとめ

- **セル･オートマトン**は局所的な相互作用により、多様で複雑なパターンを生成することができる数理モデル。

- セル･オートマトンの中でも特に、各セルの記号が**0 or 1**、局所3近傍に依存してルールが定義されるとき、**エレメンタリー･セル･オートマトン**とよぶ。

- セル･オートマトンの分類と、分類に関わる複雑さの研究はまだ始まったばかり。