第 13 回 JST 数学キャラバン「拡がりゆく数学 in 水戸」

シャボン玉とシャボン膜の数学

— 素朴な数学と数学研究の最先端 —

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 教授

小磯深幸

2014 年 11 月 29 日 (土) (場所：茨城県立水戸第二高等学校)

目次

以下のお話について：

○ キーワード：曲線や曲面の曲がり具合いをどう表すか?

○ 数学的な式は (難しい時は) 観賞用と思って下さい.

1　準備 —— 微分幾何学の基本概念：曲率 ——

幾何学 ＝ **geometry**,　　**geo** ＝ 土地,　**metry** ＝ 測る

実際に測量できない場所を人間の知恵で測量する試みから始まった．最も古い数学の分野.「図形」(ものの形) を研究する学問.

19 世紀：

C. F. Gauss (ガウス) による「曲面の曲率」の定義.

B. Riemann(リーマン) による「曲がった空間」(多様体と曲率) の定義.

20 世紀-： **Einstein**(アインシュタイン) の相対性理論に用いられ，宇宙の重力場理論が創出された.

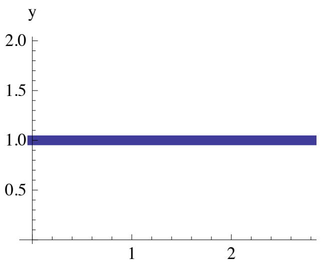
現在，ナノあるいはミクロスケールの物質から宇宙の形まで，広範な「ものの形」を記述する道具として用いられている.

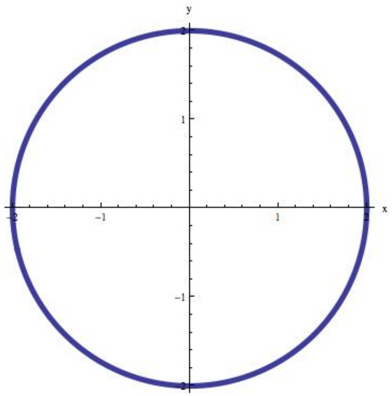
1.1　平面曲線の曲率

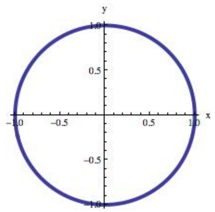
平面曲線の特徴を表すものは何でしょうか?

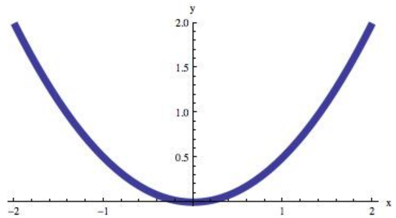
直線と曲線の違いは?　　　曲線は曲がっている!

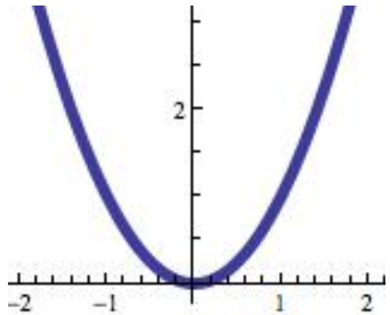
下の曲線たちの曲がり具合いを比較してみましょう.







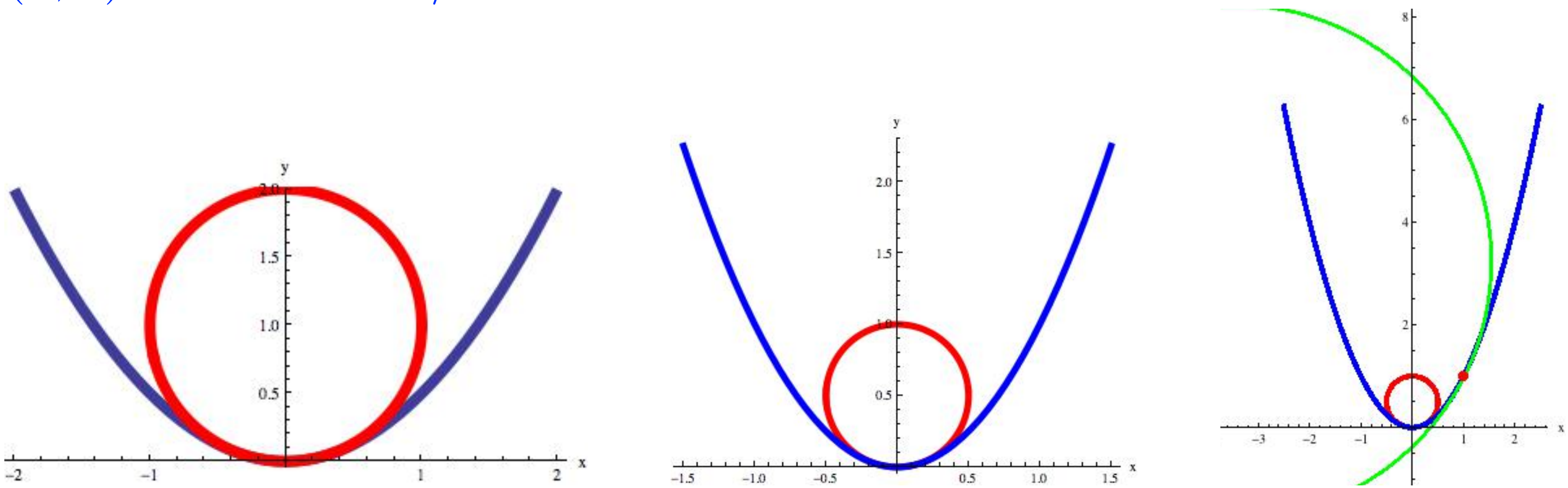




直線,　半径 **2** の円,　半径 **1** の円,　放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$,　放物線 $y = x^2$

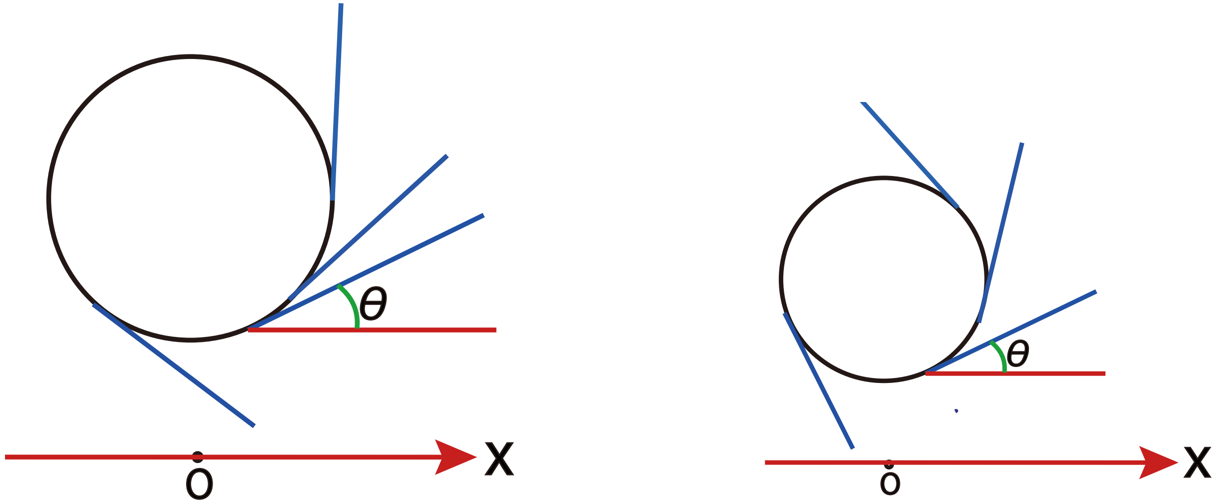
まず大雑把に：曲線 C の点 P の近くで C に最も近い円 (曲率円という) の半径 $r(P)$ の逆数 $\dfrac{1}{r(P)}$ を，C の P における曲率という．$\kappa(P)$ で表す．$\kappa(P)$ は，C の接線の角度の，長さに対する瞬間変化率と一致する．

例 **1.1.1.** 直線の曲率は 0, 半径 $r > 0$ の円の曲率は，$1/r$ である．
放物線 $y = (1/2)x^2$ の頂点での曲率は **1**．$y = x^2$ の頂点での曲率は **2**，点 $(1,1)$ での曲率は $2/\sqrt{5}^3 \approx 0.179$.

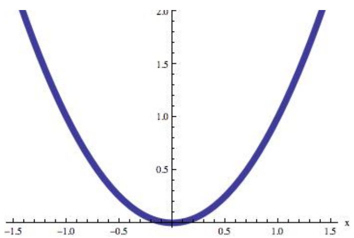


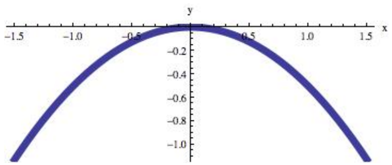
左:$y = x^2/2$ と半径 **1** の円. 中:$y = x^2$と半径 $1/2$ の円.右:**O**,$(1,1)$での曲率円.

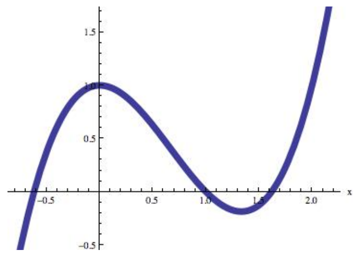
曲率の定義を行う．　まずは観察！ 下の２つの円について，接線の傾きの，円弧の長さに対する変化率は，右の円 (小さい方の円) の方が大きい．



【曲率の定義】曲線 C 上の点 P において，C の接線が x 軸と成す角の曲線の長さに対する瞬間変化率を，C の点 P における曲率という．





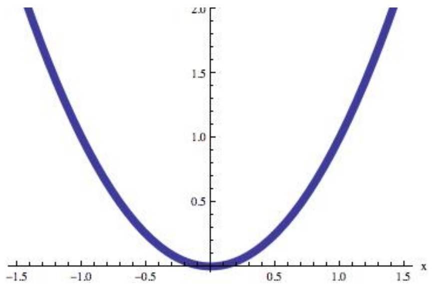


左：曲率 $\kappa > 0$.　　中：曲率 $\kappa < 0$.　　右：κ は左の方では負, 右の方では正.

【曲線の曲率を式で表そう.】 曲線 $y = f(x)$ の点 $P(x, f(x))$ における曲率 $\kappa(P)$ は,

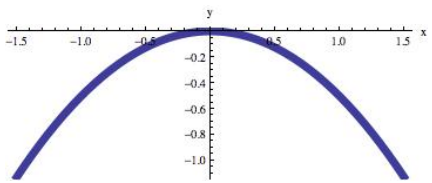
$$\kappa(P) = \frac{f''(x)}{\{1 + (f'(x))^2\}^{3/2}}$$

となる. よって, $f'' > 0$ の点では曲率は正, $f'' < 0$ の点では曲率は負. さらに, κ の絶対値によって, 曲線の曲がり具合いが (「上に凸」「下に凸」だけでなく) 定量的に表される.



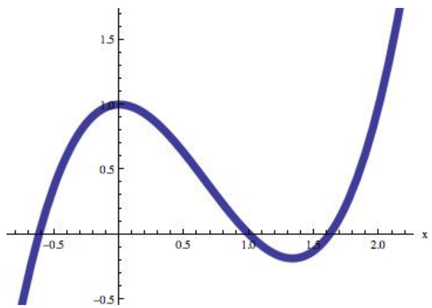
$y = x^2$

曲率 $\kappa > 0$.



$y = -(1/2)x^2$

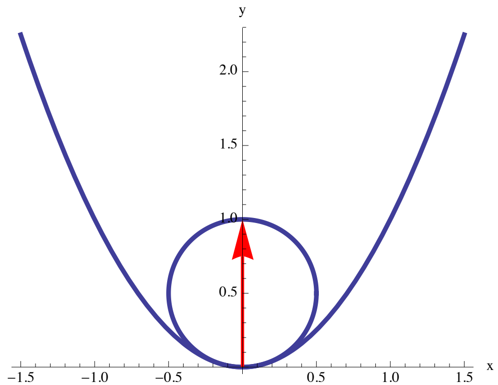
曲率 $\kappa < 0$.

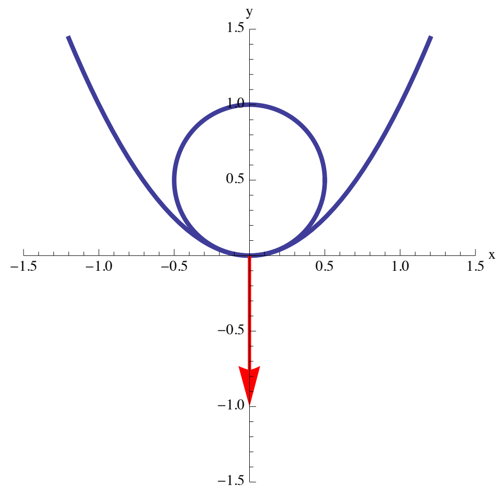


$y = x^3 - 2x^2 + 1$

κ は左の方では負, 右の方では正.

【平面曲線の曲率に正負の別の見方】 曲線 C 上の各点での単位法ベクトル N を $\mathbf{1}$ つ決めたときに, C が N と同じ向きに曲がっているとき C の曲率 $\kappa > 0$, 反対の向きに曲がっているとき $\kappa < 0$ と決める.





たとえば, 上の放物線の頂点における曲率 κ は,

$$N = (0, 1) \Longrightarrow \kappa = 2, \qquad N = (0, -1) \Longrightarrow \kappa = -2$$

1.2　平面曲線の曲率の応用

【勝手に選んだ関数を曲率を持つ曲線が作れるか?】**YES!**

関数 $\kappa(s)$ を曲率に持つ平面曲線が，次の式によって得られる.

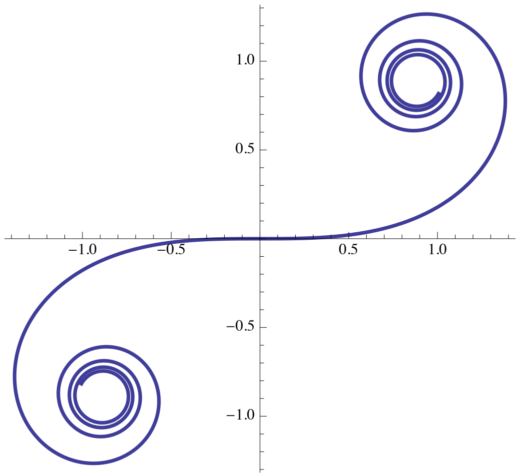
$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^t \kappa(u)\,du\right)dt$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^t \kappa(u)\,du\right)dt$$

上の式の右辺の記号 $\int$ は「積分」といういわば「微分の逆」であり，もうすぐ皆さんも数学の授業で学びます.

したがって，目的に応じた曲がり具合いを持つ曲線が作れる!

Cornu らせん (下左図) 上の各点における曲率 (の絶対値) は，原点からその点までの曲線の長さに比例する．一定の早さでハンドルをきりながら一定の速度で走る車が描く軌道は **Cornu** らせんとなる．この性質により，**Cornu らせん**は高速道路のカーブの設計に用いられ (下右図)，ハンドルを滑らかに回して曲線区間を走行することができるようにするのに役立っている．また，**Cornu らせん**はジェットコースターのカーブの設計にも応用され，乗客の乗り心地や安全性のために役立っている．



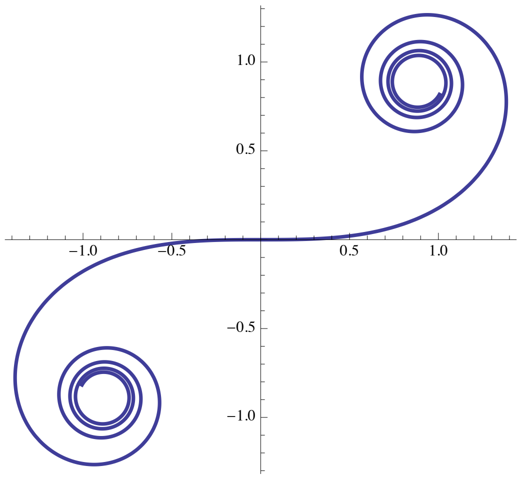
写真出典 **http://roadkawasaki.blog36.fc2.com/blog-entry-115.html**

【Cornu らせんの媒介変数表示】

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^t au\,du\right)dt$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^t au\,du\right)dt$$

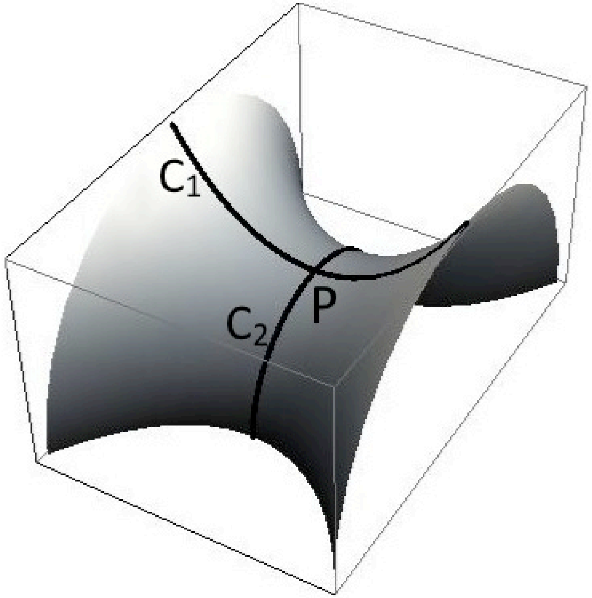
原点からの距離が s の点における曲率 $= as$ (a は定数).



写真出典 **http://roadkawasaki.blog36.fc2.com/blog-entry-115.html**

1.3 曲面の平均曲率

平均曲率： 曲面 S 上の点 P(下図) において，P における S の法線を含む互いに直交する二つの平面で S を切った時の切り口となる曲線 (下図の C_1 と C_2) の，P での曲率の平均を，S の P での平均曲率という.



C^∞ 級関数 $f : D(\subset \mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}$ のグラフ

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

の平均曲率 H は,

$$\frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(f_u^2 + f_v^2 + 1)^{3/2}}$$

H が定数のとき平均曲率一定曲面，$H \equiv 0$ のとき極小曲面と呼ぶ.

2　シャボン膜と極小曲面

針金を使って曲線の枠を作り，石鹸液の中にひたしてからそっと引き上げてみよう．すると，針金枠に石鹸の膜が張る．このような，石鹸膜がモデルとなる数学概念は，極小曲面と呼ばれている．

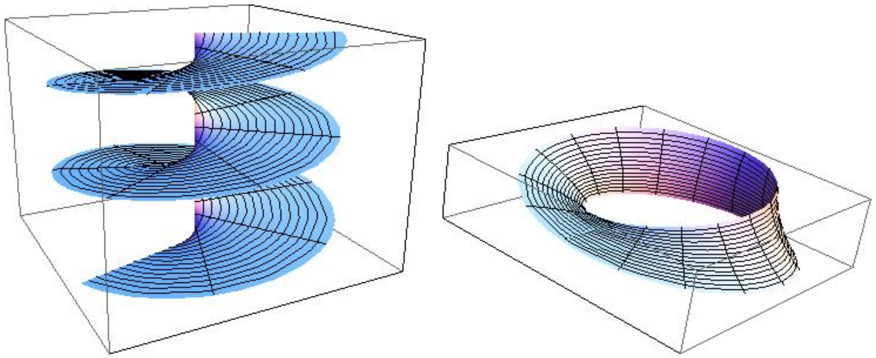


図 **1.** 常らせん面 (左) とメビウスの帯型極小曲面 (右．表裏の区別の無い曲面)

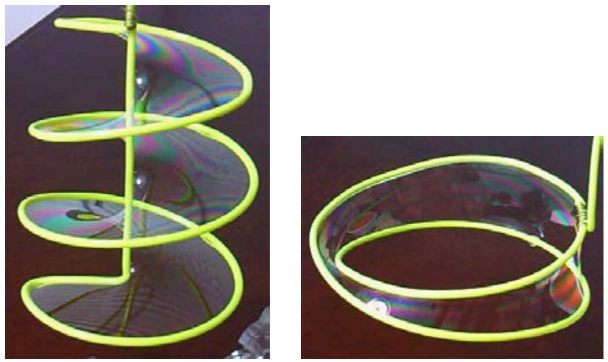


図 **2.** 石鹸膜

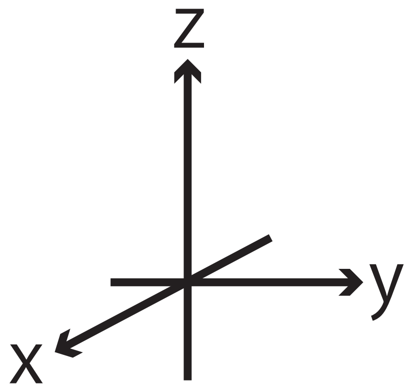


図 **3.** x, y, z 座標軸

常らせん面の表示式 (x 座標，y 座標，z 座標が変数 u, v の関数)

$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = kv, \qquad k \text{ は } 0 \text{ でない定数}$$

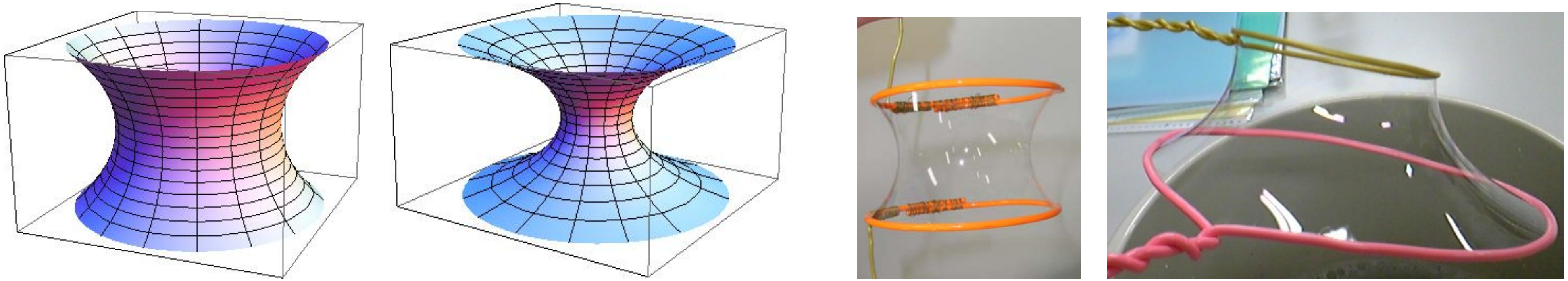


図 **3.** 懸垂面 (左二つ) と石鹸膜 (右二つ)

懸垂面の表示式　$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{2}\left(e^{z/a} + e^{-z/a}\right)$

石鹸膜 $\longleftrightarrow$ 表面張力極小 (きょくしょう) (理科 - 物理)

$\longleftrightarrow$ 同じ枠を張る曲面のうちで面積極小

$\longleftrightarrow$ 極小曲面 (数学)

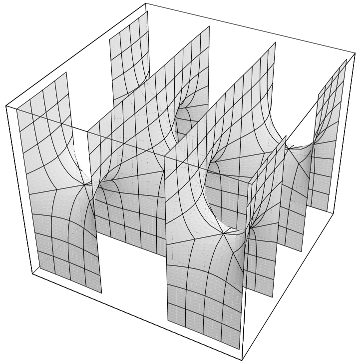
$\longleftrightarrow$ 平均曲率 0 (数学) (曲がり具合いで表せる!)

$\longleftrightarrow$ 膜の内側と外側での圧力差 $= 0$ (理科 - 物理)

(極小 $\Longleftrightarrow$ 自分自身に近い曲面と比べて最小)

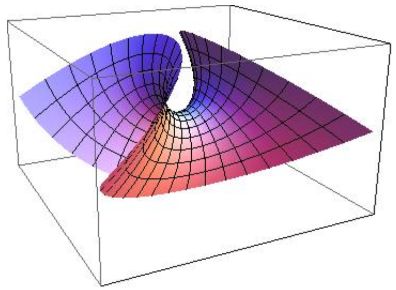
シャークの極小曲面

$$z = \log_e\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$



エネパーの極小曲面

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ \ y = -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v,\ \ z = u^2 - v^2$$



【**Weierstrass-Enneper の公式**】極小曲面は複素平面内の領域上の微分可能な複素数値関数 f と g を用いて次で表される．$(w = u + \sqrt{-1}v)$

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}\left\{\int_{w_0}^{w}(1-g(w)^2)f(w)\,dw\right\} \\ \mathbf{Re}\left\{\int_{w_0}^{w}\sqrt{-1}(1+g(w)^2)f(w)\,dw\right\} \\ \mathbf{Re}\left\{\int_{w_0}^{w}2f(w)g(w)\,dw\right\} \end{pmatrix} \tag{1}$$

復習：極小曲面は，シャボン膜の数学的抽象化

より一般に：平均曲率一定曲面は，シャボン玉の数学的抽象化

極小曲面や平均曲率一定曲面の研究の応用例：

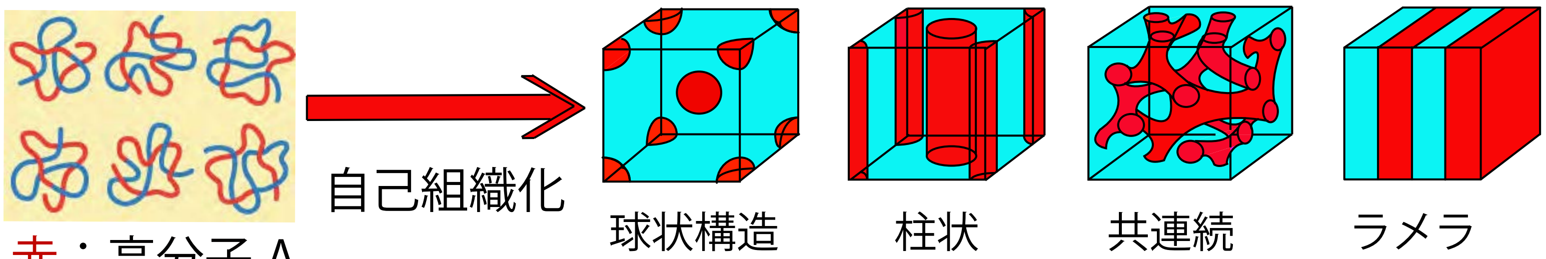
見えない物の形を解明する!

○ ブラックホール (高密度かつ大質量で，強い重力のために光さえ脱出することができない天体．そのため，直接的な観測を行うことは困難)

○ 高分子ブロック共重合体の形 (非常に小さい：$10^{-8} \sim 10^{-7}$ メートル．また，柔らかいため，正確な形を観察することは困難)

これらの形状を調べるために数学が役立つ!

3　最近の研究から：三重周期極小曲面

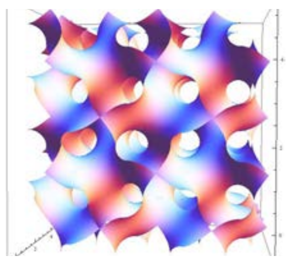


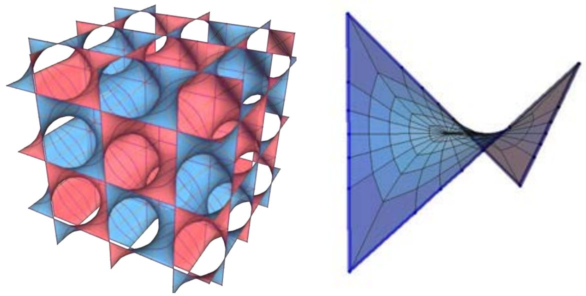
赤：高分子 A

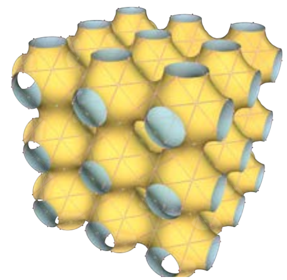
青：高分子 B

AB ブロック共重合体の自己組織化

【AB ブロック共重合体の共連続構造を与える三重周期極小曲面】





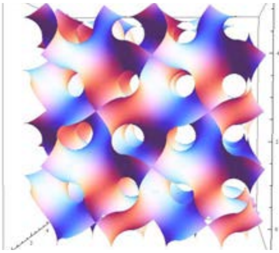


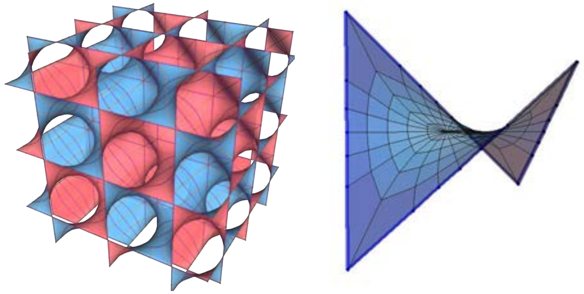
ジャイロイド (**G** 曲面. 左), シュワルツ **D** 曲面 (中), シュワルツ **P** 曲面 (右)

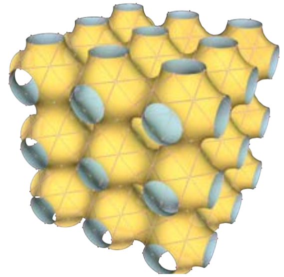
(P と D:19 世紀に発見. **G: 1970** 頃発見**)**

(絵：**www.indiana.edu,** 岡山大・藤森氏の **HP)**

【AB ブロック共重合体の共連続構造を与える三重周期極小曲面】







ジャイロイド (G 曲面. 左), シュワルツ D 曲面 (中), シュワルツ P 曲面 (右)

共連続構造は三重周期極小曲面の構造をもつと考えられ, 実験観察上, **G** 曲面, **D** 曲面, **P** 曲面が現れると考えられている.

【G 曲面, D 曲面, P 曲面の表示式】

$M := \left\{ (z, w) \in \mathbf{C}^2 \;\middle|\; w^2 = z^8 + 14z^4 + 1 \right\}$: 種数 3 の超楕円型リーマン面.

M から 3 次元ユークリッド空間への写像 X を次で定義する.

$$X(z) = \mathbf{Re}\left[e^{\sqrt{-1}\theta} \int_{z_0}^{z} \left(1 - z^2,\, i(1 + z^2),\, 2z\right) \frac{dz}{w} \right].$$

$\theta = 0$ の時が **P** 曲面, $\theta = \pi/2$ の時が **D** 曲面, $\theta \approx 51.9852^\circ$ の時が **G** 曲面.

共連続構造は，**1970** 年頃までは，実験観察上，**P** 曲面だと思われていた．**1970** 年，**A. Schoen** がジャイロイドを数学的に発見した．これがヒントになり，**P** 曲面だと思われていたものが実はジャイロイド **(G** 曲面**)** だったということがわかった**!** 現在では **G, P, D** 曲面が現れると考えられている．

最近書いた論文：**M.Koiso-P.Piccione-T.Shoda, On bifurcation and local rigidity of triply periodic minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ (**「**3** 次元ユークリッド空間内の三重周期極小曲面の剛性と分岐」**)(2014)**

○ これまで知られていなかった三重周期極小曲面の構造を発見しました**!** 共連続構造研究への応用も期待しています**!**

○ 三重周期極小曲面全体の成す空間が，ほとんどの場所では 9 次元空間であることを証明しました．(曲面全体は無限次元です．) また，9 次元空間にならない場所での構造について部分的に解明することができました．

4　まとめ

1. 曲線と曲面の曲がり具合いを表す概念：曲率

2. 曲線の曲率の応用例：高速道路やジェットコースターのカーブ

3. シャボン膜は「平均曲率 $= 0$」の曲面．つまり，極小曲面．

4. 極小曲面は，複素数が変数で複素数の値をとる関数を使って表せる．

5. 極小曲面は，ブラックホールの表面の形，共連続構造など，いろいろな物理現象に応用可能．特に，実験観察が容易でないものの研究には有用．

6. 最新の研究から：国内外の数学者との共同研究により，三重周期極小曲面の新しい例をみつけ，三重周期極小曲面全体の成す空間の構造の解明に部分的に成功しました．