広がる数学Ⅳ 数学の芽生え

第９回ＪＳＴ数学キャラバン

「無限和 1+2+3+‥‥ の値と
その先に見えるもの」

～上智大学情報理工学科　准教授　中筋麻貴～

この値は？

$$1+2+3+4+\cdots=$$

無限和

疑問：無限和によって得られる値とは何か？

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$

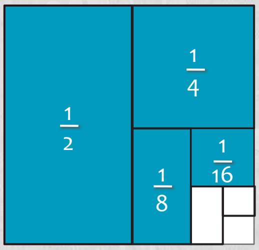
$=1$　「収束」

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+4+5+\cdots$

$=\infty$　「発散」

無限和を考えるときのポイント
・和は収束するか？発散するか？
・（収束するなら）どの値に収束するか？

長さが1の正方形



和（面積）は1に近づいていく.

この値は？

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$$

数の不思議

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

円周率がでてくる！？

数の不思議

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

$$1+1+1+1+\cdots=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}}$$

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots=0$$

$$1+2^3+3^3+4^3+\cdots=\frac{1}{120}$$

マイナスの値！？

ゼータ関数

定義（リーマンゼータ関数）

複素変数 s に対し，次で定義される関数をリーマンゼータ関数と呼ぶ．

無限和 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

←これがゼータ関数

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

数の不思議（ゼータ関数の値）

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

数の不思議（ゼータ関数の値）

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

$$\boxed{\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty}$$

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$$= \infty$$

数の不思議（ゼータ関数の値）

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

関数等式 s が2以上の偶数のとき

$$\zeta(1-s) = 2 \times (s-1)! \times \frac{\zeta(s)}{(2\pi i)^s}$$

$s = 2$ を代入すると

$$\zeta(1-2) = 2 \times (2-1)! \times \frac{\zeta(2)}{(2\pi i)^2}$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \text{ より}$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$\boxed{\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}}$$

数の不思議（ゼータ関数の値）

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

$$\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(-2) = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots = 0$$

$$\zeta(-3) = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots = \frac{1}{120}$$

関数等式 $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ を関係づける等式

その先には．．．？

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

ゼータ関数と素数の関係

オイラー:1707年-1783年
数学者,物理学者,天文学者.

定理. <オイラー積>

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

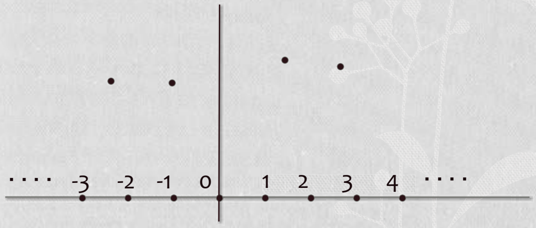
自然数全体に関する和　　素数全体に関する積

ゼータ関数 ⟺ 素数

素数：1以外の自然数のうちで，約数が1とそれ自身しかないもの
例．2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ････

数

自然数 → 整数 → 有理数 → 実数 → 複素数



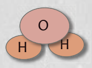
整数の「もと」ってなんだろう？

整数の分解（素因数分解）

問：整数の「もと」はなんだろう？　答：素数

素数：1以外の自然数のうちで，約数が1とそれ自身しかないもの
例．2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ････

物質 H_2O 分子



整数 18=2×3×3

4=2×2,　6=2×3,
18=2×3×3, 20=2×2×5

素数は整数の世界における基礎！

素数の世界の研究

疑問

1. 素数の個数は全部で何個あるのか？
2. 素数はどんな割合の分布なのか？
3. 素数は役にたつのか？

素数を使った応用

暗号(1970年代～)　　乱数の生成

素数研究1. 素数の見つけ方 ～エラトステネスの篩～

1～100の素数

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, (25 個)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

素数研究1. 素数の個数考える→素数を書き出す

1～100の素数

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, (25 個)

100～200の素数

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,
151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, (21 個)

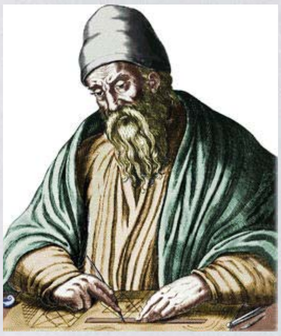
200～300の素数

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241,
251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293 (16個)

300～400の素数

307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349,
353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397(16個)

素数研究1．素数の個数は有限個？



ユークリッド:B.C.300年頃の
古代ギシャの 数学者,天文学者

「原論」

素数は無限個存在する

[証明方法]
背理法を用いて証明する．
素数の個数が有限個であると仮定して
矛盾を導く．

オイラー：
オイラー積 と ζ(1)=∞ を用いて証明

素数研究2. 素数の分布について観察しよう

1〜100の素数

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,（25 個）

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

素数研究2. 素数の分布について観察しよう

100〜200の素数

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,
151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, (21 個)

101		103				107		109	
		113							
						127			
131						137		139	
								149	
151						157			
		163				167			
		173						179	
181									
191		193				197		199	

素数研究2. 素数の分布について観察しよう

1300〜1400の素数

1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367,
1373, 1381, 1399, (11個)

1301		1303				1307			
								1319	
1321						1327			
1361						1367			
		1373							
1381									
								1399	

素数研究2. 素数の分布について観察しよう

1400〜1500の素数

1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451,
1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, (17 個)

						1409			
		1423				1427		1429	
		1433						1439	
						1447			
1451		1453						1459	
1471									
1481		1483				1487		1489	
		1493						1499	

素数研究2．素数の分布

ガウス:1777年-1855年
ドイツの数学者，天文学者．

x以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表す．
(注)円周率の π とは無関係

例：$\pi(5)=3,\ \ \pi(100)=25,$

$\pi(1000)=168$

100以下の素数

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,
37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73,
79, 83, 89, 97 (25個)

予想

漸近的に等しい

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$$

素数研究2. 素数の分布

x	$\pi(x)$	$x/\log x$
10	4	4.3
10^2	25	22
10^3	168	135
10^4	1229	1086
10^5	9592	8686
10^6	78498	72382
10^7	664579	620421
10^8	5761455	5428681
10^9	50847534	48254942
10^{10}	455052511	434294482
10^{11}	4118054813	4287977972

予想：1792年
ガウス（15歳）

証明：1896年
アダマール，
ド・ラ・バレ・プーサン

素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$$

リーマン予想

リーマン:1826年-1866年
ドイツの数学者.

問題 $\zeta(s)=0$ となる s を求めよ.

オイラー
sが負の偶数のとき $\zeta(s)=0$

リーマン予想
$\zeta(s)=0$ となる虚数sは，すべて実部が $\frac{1}{2}$ の直線上にある.

クレイ数学研究所が2000年からはじめた
7つの検証問題の1つ（100万ドルの懸賞金）

その先に見えるもの

？

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

写真はすべてWikipediaから抜粋