2013.11.16
第8回JST数学キャラバン
「拡がりゆく数学」in 尾道

リズムと模様の数学

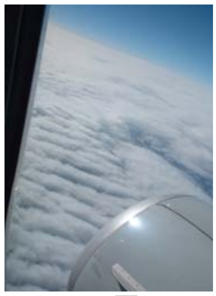
千葉大学大学院理学研究科
北畑　裕之
e-mail: kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp

お茶の水女子大学理学部
郡　宏

自然界のリズム・パターン

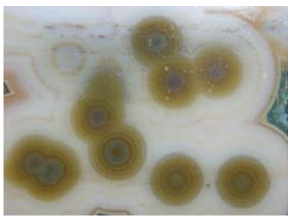
熱帯魚

花



雲

砂丘



岩石の断面

" 鴨川等間隔の法則 "

京都の鴨川

時間変化するパターン

ホタルの発光に見られる波

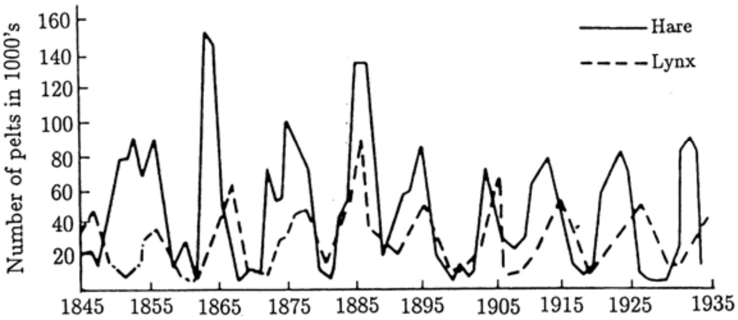
NHK のテレビより

googleなどで検索するとみられます

生態系での個体数のリズム

野うさぎ
Wikipediaより

やまねこ
Wikipediaより



“Mathematical Biology” by J. D. Murray

数列を使って・・・

ある時間毎の生き物の数：　a_n

（１月毎のネズミの数など）

１月でネズミの数が2倍になるとすると・・・

１月目2匹だった　：　$a_1 = 2$

２月目は4匹　：　$a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$

３月目は8匹　：　$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 4 = 8$

４月目は16匹　：　$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 8 = 16$

n 月目は？

１月目は2匹だった　:　$a_1 = 2$

２月目は4匹　:　$a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$

３月目は8匹　:　$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 4 = 8$

４月目は16匹　:　$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 8 = 16$

$$a_{n+1} = 2\,a_n$$

このネズミの増え方は

$$a_1 = 2$$

$a_{n+1} = 2\,a_n$　ただし、n は自然数

という式で書ける。このような式のことを漸化式（ぜんかしき）という。（1月後のネズミの数が現在のネズミの数で決まる）

仮定１:

生き物は自分自身の数に比例して増える

$$a_{n+1} = k\,a_n$$

（さきほどは、$k = 2$ の場合）

$a_1 = 2$
$a_2 = 2 \times 2\ (= 4)$
$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2\ (= 8)$
$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 2 \times 2 \times 100 = 2^3 \times 2\ (= 16)$
$a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 100 = 2^4 \times 2\ (= 32)$
$a_6 = 2 \times a_5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 100 = 2^5 \times 2\ (= 64)$

$a_n = 2^{n-1}\,a_1$　（等比数列）

$$a_{n+1} = k\,a_n$$

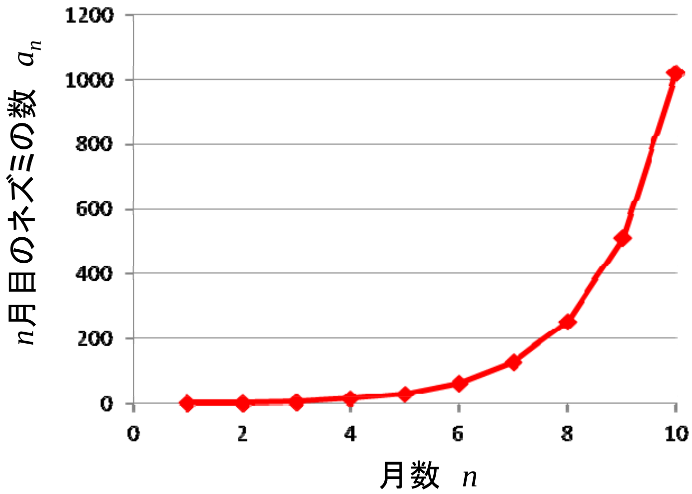
$a_1 = 2$
$a_2 = 2 \times 2\ (= 4)$
$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2\ (= 8)$
$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2 (= 16)$
$a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 2\ (= 32)$
$a_6 = 2 \times a_5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \times 2\ (= 64)$

$a_2 = k \times a_1$
$a_3 = k \times a_2 = k \times k \times a_1 = k^2 \times a_1$
$a_4 = k \times a_3 = k \times k \times k \times a_1 = k^3 \times a_1$
$a_5 = k \times a_4 = k \times k \times k \times k \times a_1 = k^4 \times a_1$
$a_6 = k \times a_5 = k \times k \times k \times k \times k \times a_1 = k^5 \times a_1$

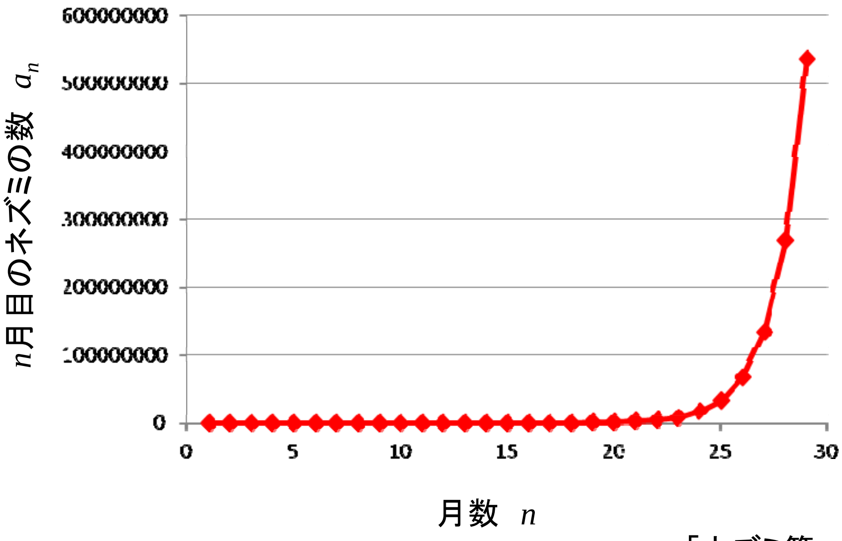
$$a_n = k^{n-1}\,a_1$$

個体数はどんどん増える。

$k = 2$ $\qquad a_{n+1} = k\,a_n \qquad a_1 = 2$



もっと日数がたつと・・・



「ネズミ算」

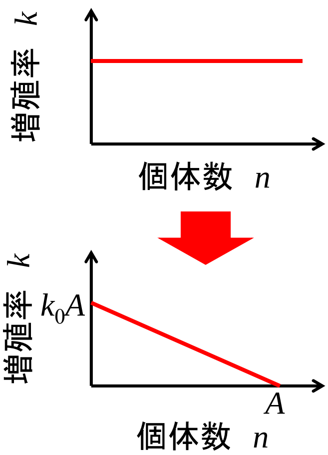
実際には、どんどん増えることはない。

仮定2:

数が増えすぎると増え方が減る

$$a_{n+1} = k\,a_n$$

$$k = k_0\,(A - a_n)$$

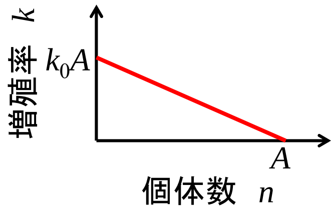


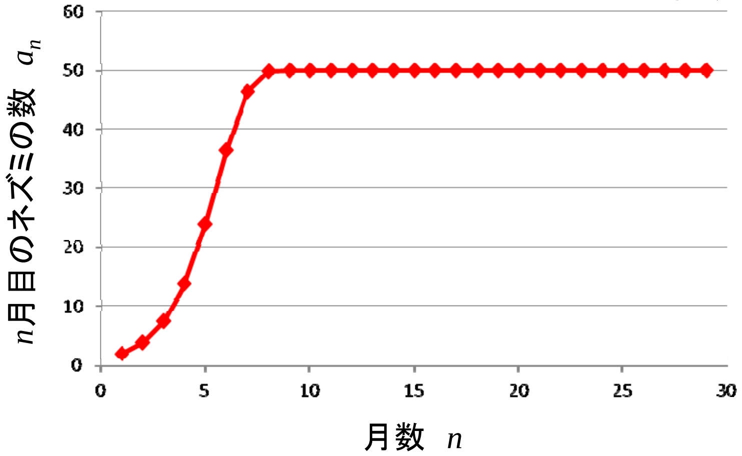
$$a_{n+1} = k_0\,(A - a_n)\,a_n$$

「ロジスティック写像」

$$a_{n+1} = k\,(A - a_n)\,a_n$$

$$k_0 A = 2,\quad A = 100 \qquad a_1 = 2$$

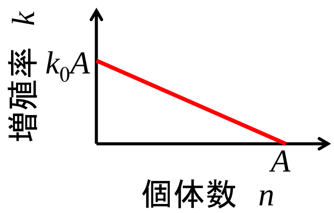


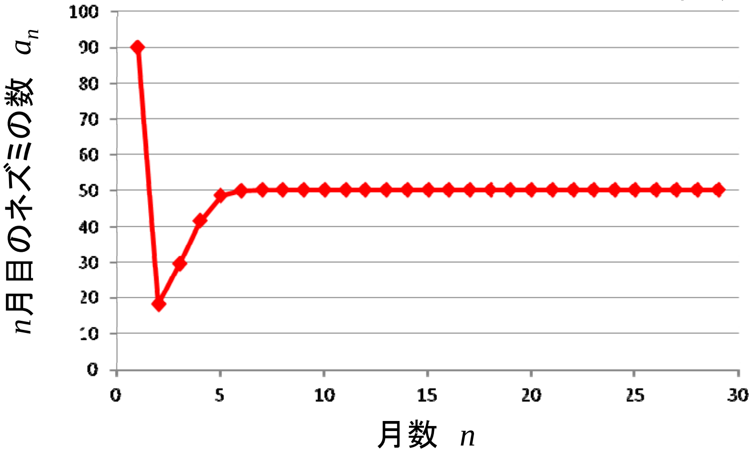


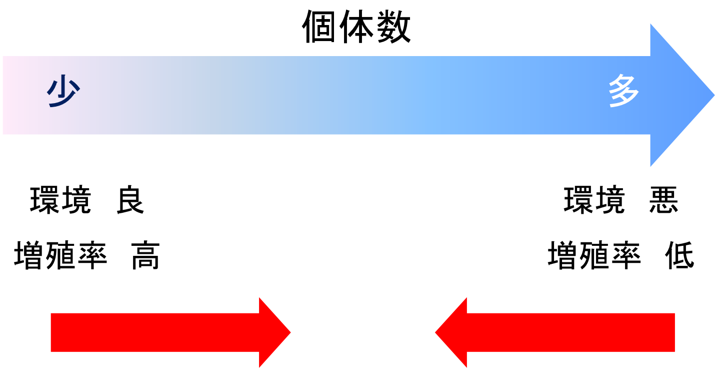
はじめから数が多くても・・・

$$a_{n+1} = k_0\,(A - a_n)\,a_n$$

$$k_0 A = 2,\quad A = 100 \qquad a_1 = 200$$







つりあう位置で止まる

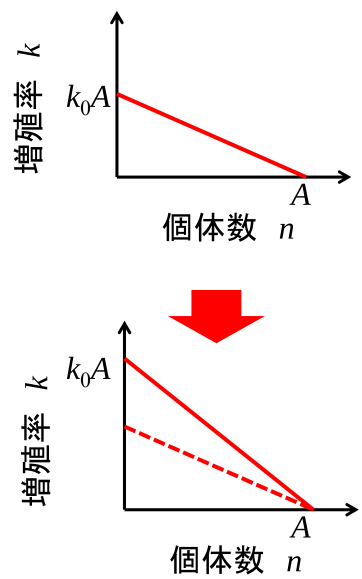
ネズミから離れて

ロジスティック写像

$$a_{n+1} = k_0 \, (A - a_n) \, a_n$$

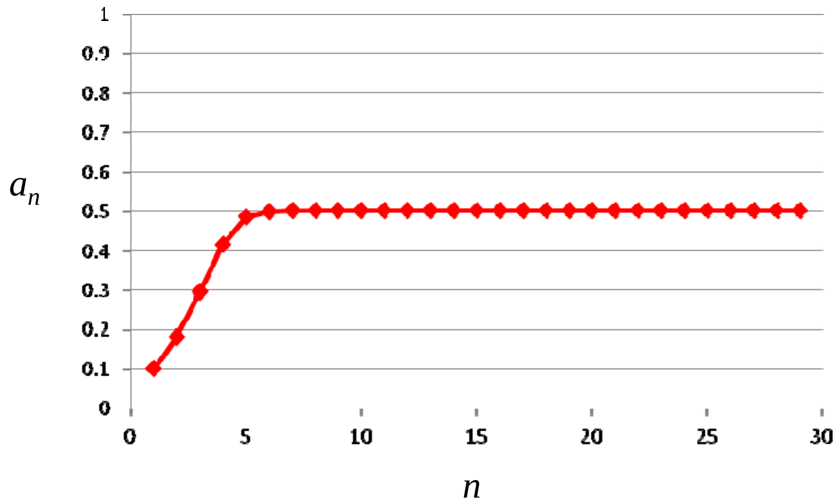
の性質を調べてみよう。

$A = 1$ として、k_0 の値を
変えていくと・・・



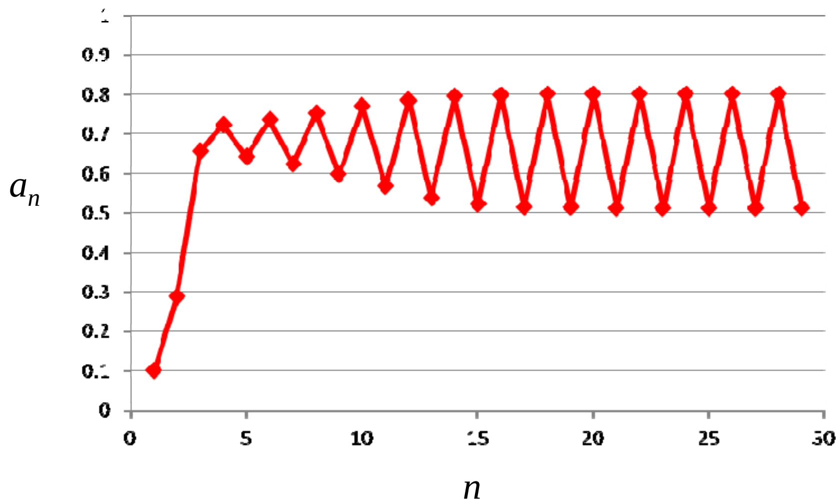
$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 2$ $\qquad$ $a_1 = 0.1$

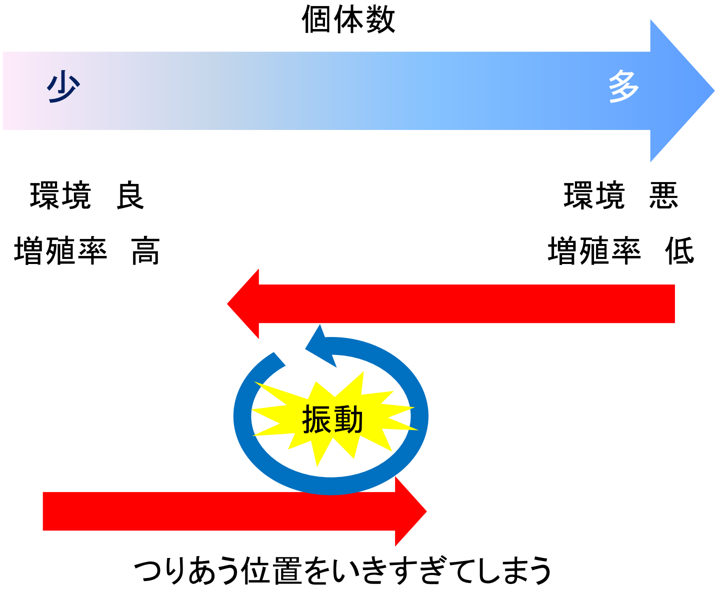


$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 3.2$ $\qquad$ $a_1 = 0.1$

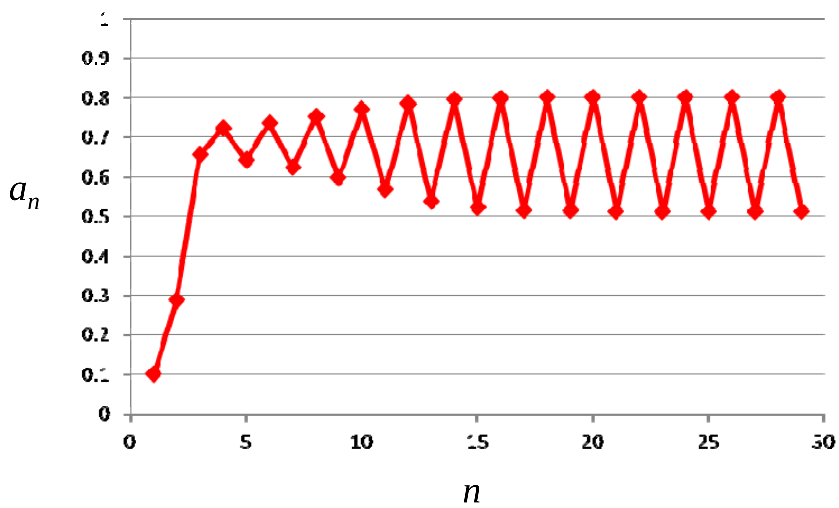


$k_0 = 3.2$　では



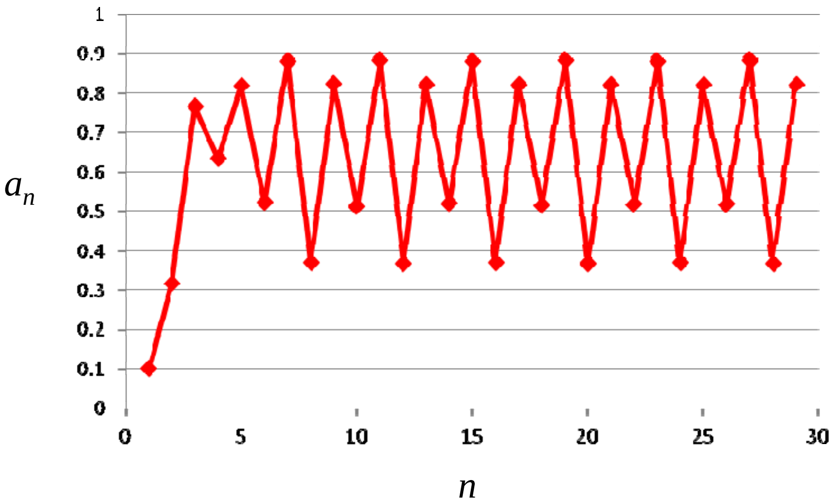
$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 3.2$　　　$a_1 = 0.1$



$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

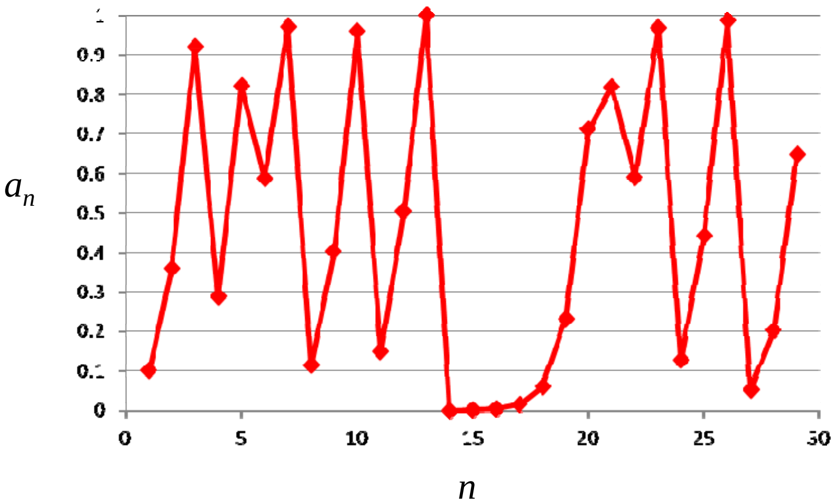
$k_0 = 3.53 \qquad a_1 = 0.1$

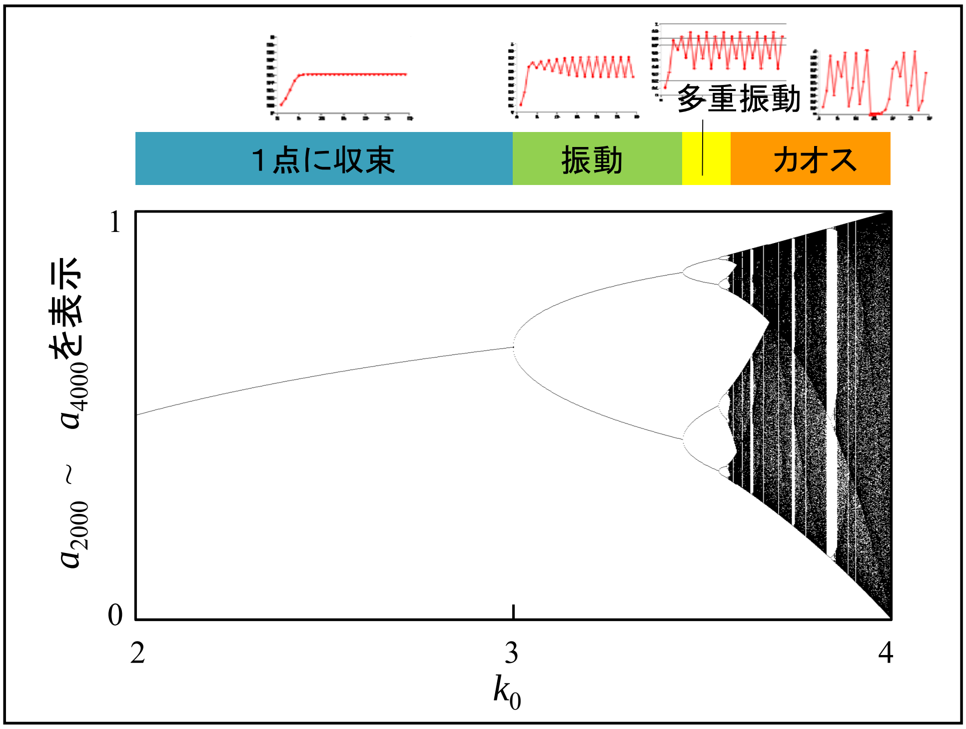


$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 4 \qquad a_1 = 0.1$

"カオス"





化学反応でも見られる振動：BZ反応

時間的に色が変わるような化学反応って見たことありますか?

次の5種類の溶液を混合

1.0 mol/ℓ 臭素酸ナトリウム	3.0 mℓ
3.0 mol/ℓ 硫酸水溶液	2.0 mℓ
1.0 mol/ℓ マロン酸水溶液	2.0 mℓ
1.0 mol/ℓ 臭化ナトリウム水溶液	0.3 mℓ
0.025 mol/ℓ フェロイン水溶液	0.3 mℓ
蒸留水	2.4 mℓ
合　計	10 mℓ

Belousov-Zhabotinsky (BZ)反応の実験

i) 撹拌した系で

1 cm

振動現象（リズムの発現）

酸化状態

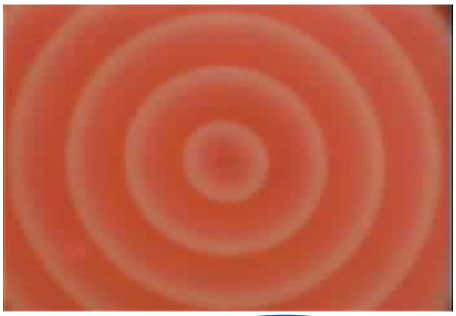
還元状態

マグネチックスターラー
（磁石式の撹拌機）で
混ぜ続けています

ii) 静置した系で

BZ反応溶液を目の細かなろ紙（メンブレンフィルター）
にしみこませる

a) 同心円パターン
（Target Pattern）



b) らせんパターン
（Spiral Pattern）

溶液は完全には
混ざり合わず
近くに"しみこんで"
いきます

（4倍速）

3 mm

微分方程式(反応拡散方程式)を使うとパターンも再現できる。

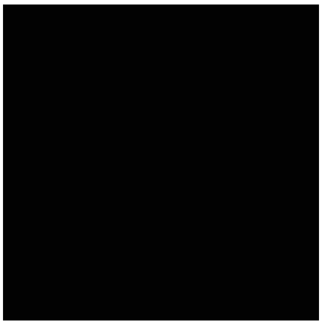
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(U(1-U) - fV\frac{U-q}{U+q} \right) + D_U \nabla^2 U$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = U - V + D_V \nabla^2 V$$

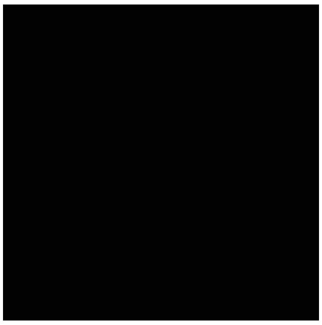
U, V ： 化学物質の濃度（時間と位置の関数）

V 大 → 青（白）、　V 小 → 赤

同心円パターン



らせんパターン



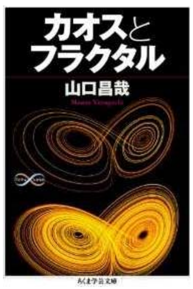
心臓の拍動パターンとBZ反応

正常時

異常時

心臓の上のパターンは
http://thevirtualheart.org/
をご覧ください

より詳しく知りたい人へ



「カオスとフラクタル」
山口昌哉著 （ちくま学芸文庫）

以下の単語でWEBで検索

カオス、 ロジスティック写像、

Belousov-Zhanotinsky反応、 BZ反応

同期現象

身近なところに不思議はいっぱい

不思議なことに数学（数式）を使って
アプローチしてみましょう！