# 拡がりゆく数　～ 複素数という蕾 (つぼみ)

濱野 佐知子

福島大学人間発達文化学類

2013 年 1 月 5 日 (土)

# 内容

# §1. 数の体系

色々な数：

- 自然数（$\mathbb{N}$）： $1, 2, 3, \cdots$ ； $+, \times$, 大小関係
- 整　数（$\mathbb{Z}$）： $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ ； $+, -, \times$, 大小関係
- 有理数（$\mathbb{Q}$）： $\frac{m}{n}$ $(m, n$ は整数, $n \neq 0)$ ； $+, -, \times, \div$, 大小関係
- 実　数（$\mathbb{R}$）： $x^2 \geq 0$ をみたす数; $+, -, \times, \div$, 大小関係
- 複素数（$\mathbb{C}$）： $+, -, \times, \div$

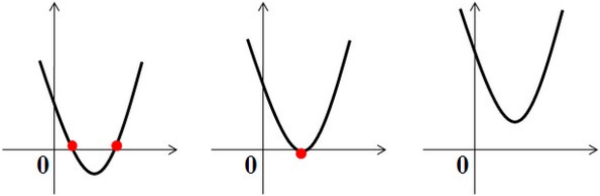
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

どんどん数の体系を大きくしていった.
どうしてそのような数を考えることになったのか？

実数の範囲で代数方程式を考える.

(1) 1 次方程式： $ax + b = 0, \quad a \neq 0 \implies x = -\frac{b}{a}$

(2) 2 次方程式： $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$




1. $b^2 - 4ac > 0 \implies$ 異なる 2 つの実数解をもつ.
2. $b^2 - 4ac = 0 \implies$ 1 つの実数解をもつ (重解).
3. $b^2 - 4ac < 0 \implies$ 実数解はない ($x \in \mathbb{R}$ の範囲では解はない).
   実数の 2 乗は 0 以上である (数の大小がある).

(3) 3 次方程式： $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$

・ニコロ・フォンタナ・タルタリア (1499 or 1500–1557)

・ジェロラモ・カルダーノ (1501–1576)

3 次方程式の実数解を求めるために "$\sqrt{\text{負の実数}}$" の導入が必要.

# §2. 複素数

$\bigcirc^2 = -1$ となる "数 $\bigcirc$" を導入し, それを $i$ と書き, 虚数単位とよぶ.

$$\text{虚数単位：}\ i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$$
$$\text{複素数 } z = x + iy \in \mathbb{C} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

数の体系を拡大（四則演算はできる. 大小関係はない.）

複素数を発展させた人

・レオンハルト・オイラー (1707–1783)：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{オイラーの公式}$$

・カール・フリードリヒ・ガウス (1777–1855)：ガウス平面・複素平面

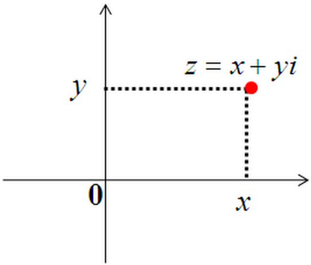
2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ について,

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

- 複素数の四則演算は $i$ を 1 つの文字とみなして普通の代数計算を行い, $i^2 = -1$ を代入する.

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}
\end{aligned}$$

# §3. ガウス平面・複素平面

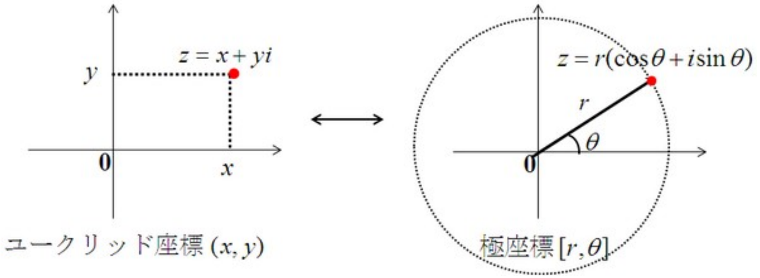



ユークリッド座標 $(x, y)$

| | | |
|---|---|---|
| 実２次元平面の１点 $(x, y)$ | $\Longleftrightarrow$ | １つの複素数 $z = x + yi$ |
| $x$ 軸 $(x, 0)$ | $\Longleftrightarrow$ | 実軸 $x = x + 0i$ |
| $y$ 軸 $(0, y)$ | $\Longleftrightarrow$ | 虚軸 $y = 0 + yi$ |
| 点 $(0, 0)$ | $\Longleftrightarrow$ | $0 = 0 + 0i$ |

点が複素数を表している平面をガウス平面または複素平面という.

# ガウス平面・複素平面




$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$ : $z$ の極形式

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$ : $z$ の絶対値（長さ）

$$\arg z = \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$ : $z$ の偏角

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,
$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ を用いると

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right\} \\ &= r_1 r_2 \left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}. \end{aligned}$$

複素数 $(z_1 \cdot z_2)$ の長さ：　$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$
複素数 $(z_1 \cdot z_2)$ の偏角：　$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1 (z_2 \neq 0)$ を利用すると

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

“人工的” に設けた “虚数単位 $i$ ” が測量等で実用的に利用されてきた加法定理と結びついて，上の事実が示せた.

# §4. 代数学の基本定理

問題：複素数の範囲で代数方程式を考えると, 解は存在するか？

**代数学の基本定理 (Gauss)**

任意の複素数を係数とする代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

は, 複素数の範囲で必ず解が存在する.
複素数係数の $n$ 次方程式は, 重複度を込めて $n$ 個の複素数解をもつ.