2013.1.5
数学キャラバン
「拡がりゆく数学」in 福島

リズムとパターンの数理

千葉大学大学院理学研究科・JSTさきがけ
北畑　裕之
e-mail: kitahata@physics.s.chiba-u.ac.jp
お茶の水女子大学理学部・JSTさきがけ
郡　宏

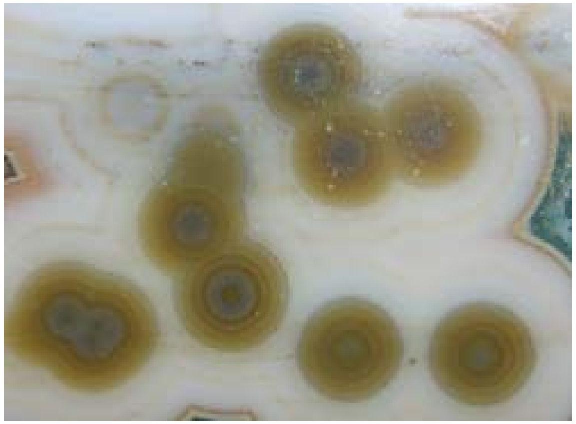
自然界のリズム・パターン

熱帯魚

花

雲

砂丘



岩石の断面

" 鴨川等間隔の法則 "

京都の鴨川

時間変化するパターン

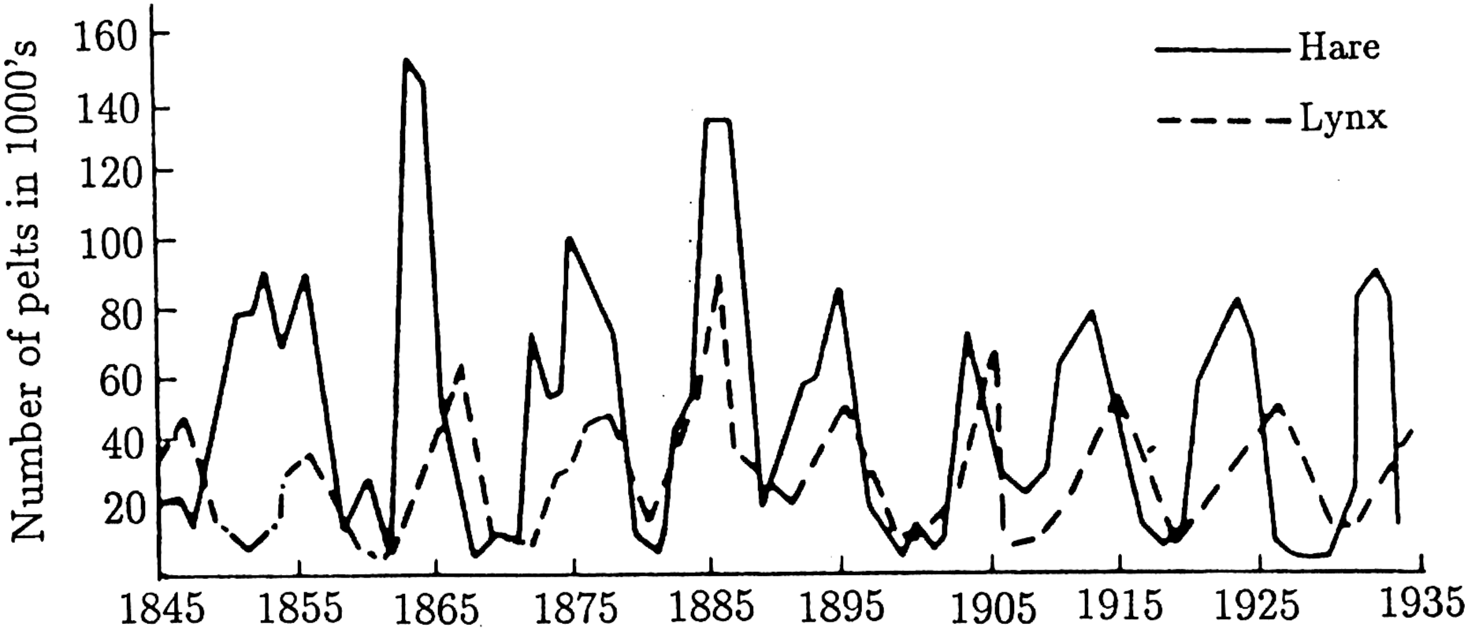
ホタルの発光に見られる波

NHK のテレビより

生態系での個体数のリズム

野うさぎ
Wikipediaより

やまねこ
Wikipediaより



"Mathematical Biology" by J. D. Murray

数列を使って・・・

ある時間毎の生き物の数：　a_n

（１月毎のネズミの数など）

http://dpuji.blog31.fc2.com/blog-entry-136.html

１月でネズミの数が2倍になるとすると・・・

１月目2匹だった　：　$a_1 = 2$

２月目は4匹　：　$a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$

３月目は8匹　：　$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 4 = 8$

４月目は16匹　：　$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 8 = 16$

n 月目は？

１月目は2匹だった　：　$a_1 = 2$

２月目は4匹　：　$a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 2 = 4$

３月目は8匹　：　$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 4 = 8$

４月目は16匹　：　$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 8 = 16$

$$a_{n+1} = 2a_n$$

このネズミの増え方は

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = 2a_n$$ ただし、n は自然数

という式で書ける。このような式のことを漸化式（ぜんかしき）という。（1月後のネズミの数が現在のネズミの数で決まる）

仮定1：

生き物は自分自身の数に比例して増える

$$a_{n+1} = k\, a_n$$

（さきほどは、$k = 2$ の場合）

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 \times 2 \ (= 4)$

$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2 \ (= 8)$

$a_4 = 2 \times a_3 = 2 \times 2 \times 2 \times 100 = 2^3 \times 2 \ (= 16)$

$a_5 = 2 \times a_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 100 = 2^4 \times 2 \ (= 32)$

$a_6 = 2 \times a_5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 100 = 2^5 \times 2 \ (= 64)$

$$a_n = 2^{n-1} a_1$$ （等比数列）

$$a_{n+1} = k\, a_n$$

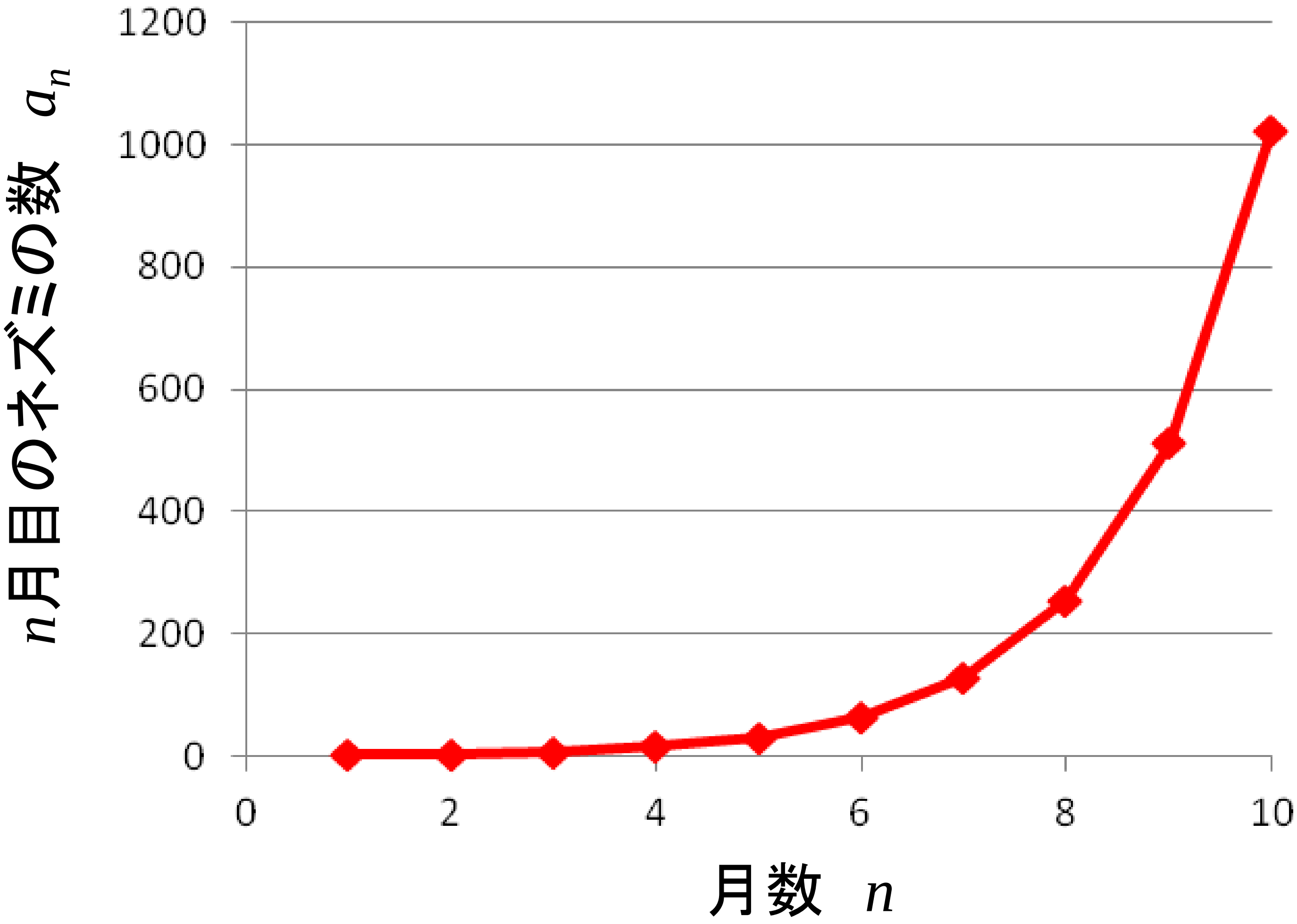
$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2 \times 2 \ \ (= 4) \\
a_3 &= 2 \times a_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2 \ (= 8) \\
a_4 &= 2 \times a_3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2 (= 16) \\
a_5 &= 2 \times a_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 2 \ (= 32) \\
a_6 &= 2 \times a_5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \times 2 \ (= 64)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= k \times a_1 \\
a_3 &= k \times a_2 = k \times k \times a_1 = k^2 \times a_1 \\
a_4 &= k \times a_3 = k \times k \times k \times a_1 = k^3 \times a_1 \\
a_5 &= k \times a_4 = k \times k \times k \times k \times a_1 = k^4 \times a_1 \\
a_6 &= k \times a_5 = k \times k \times k \times k \times k \times a_1 = k^5 \times a_1
\end{aligned}
$$

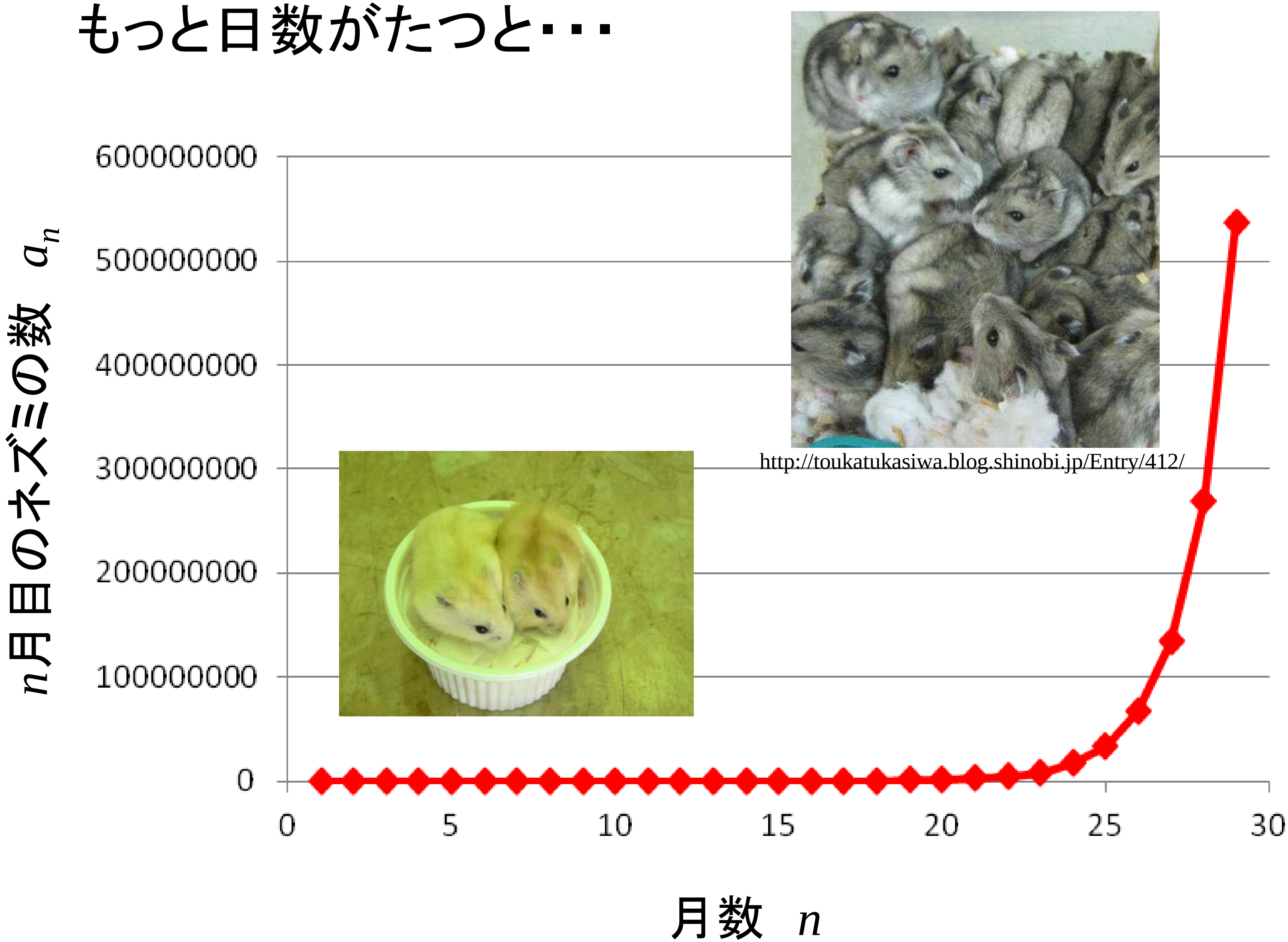
$$a_n = k^{n-1}\, a_1$$

個体数はどんどん増える。

$k = 2$ $a_{n+1} = k\, a_n$ $a_1 = 2$



もっと日数がたつと･･･



http://toukatukasiwa.blog.shinobi.jp/Entry/412/

「ネズミ算」

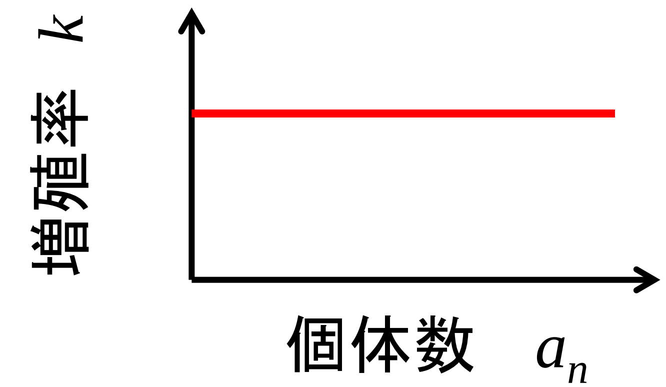
実際には、どんどん増えることはない。

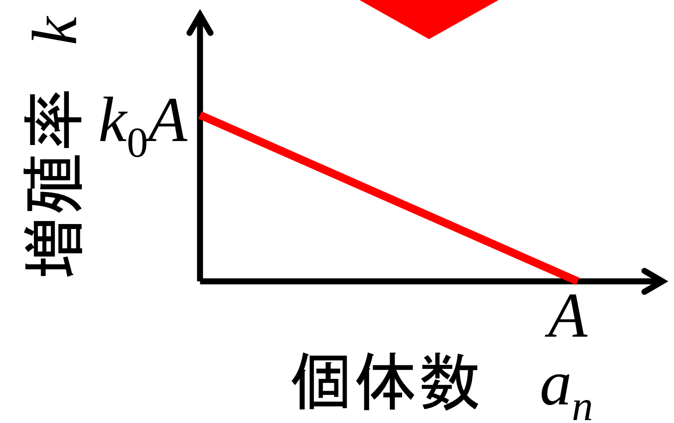
仮定2:

数が増えすぎると増え方が減る

$$a_{n+1} = k\, a_n$$

$$k = k_0\,(A - a_n)$$



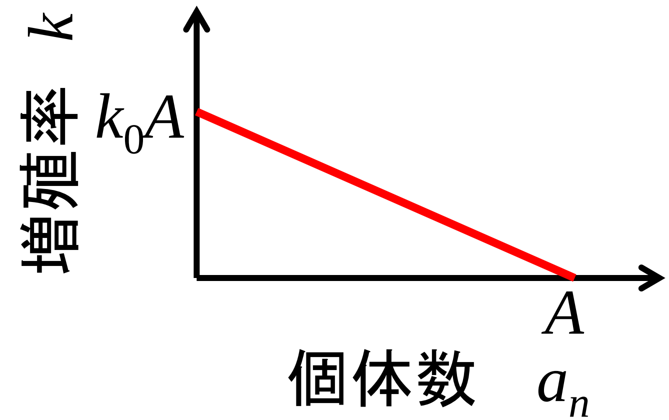


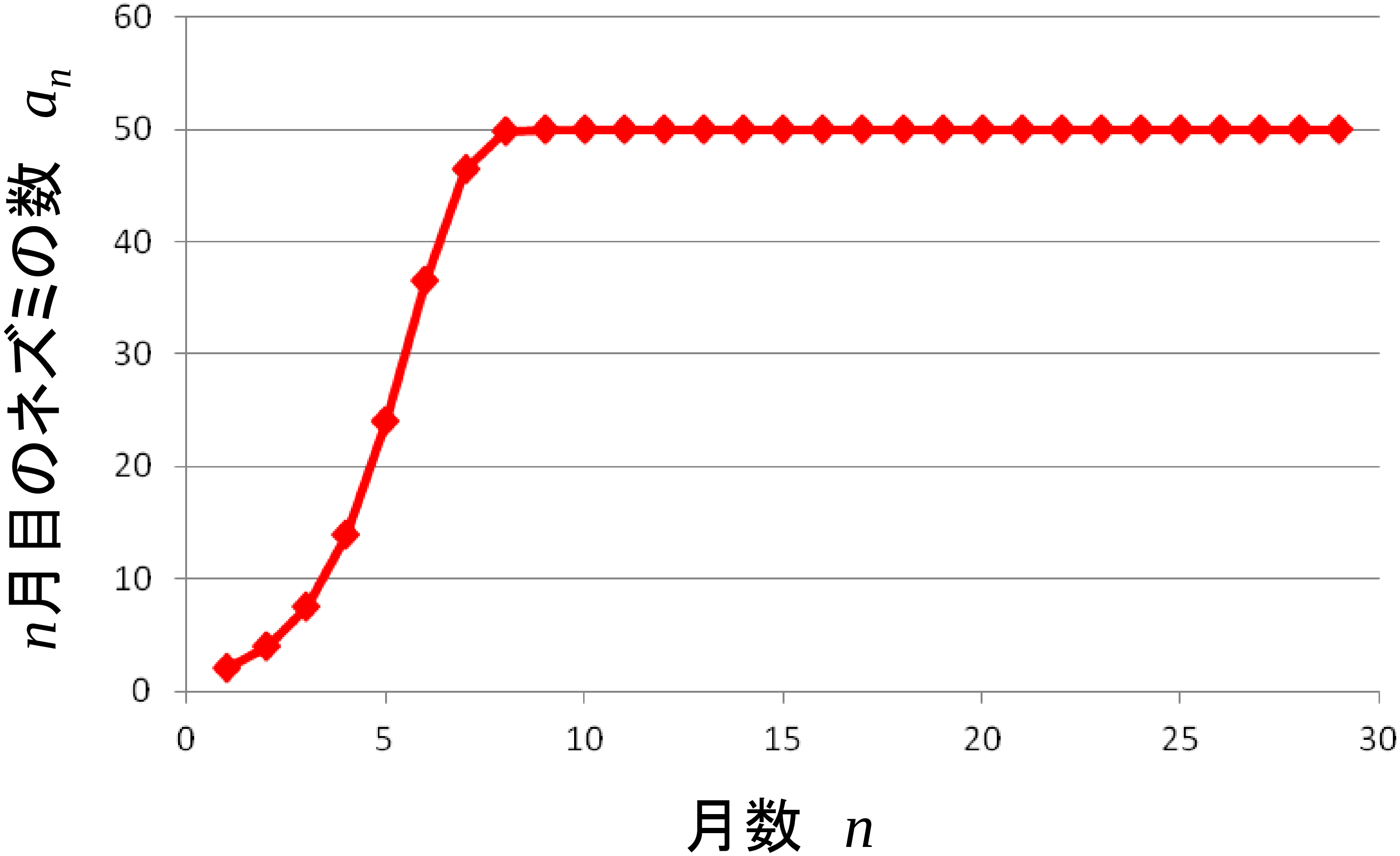
$$a_{n+1} = k_0\,(A - a_n)\, a_n$$

「ロジスティック写像」

$$a_{n+1} = k\,(A - a_n)\,a_n$$

$$k_0 A = 2,\quad A = 100 \qquad a_1 = 2$$

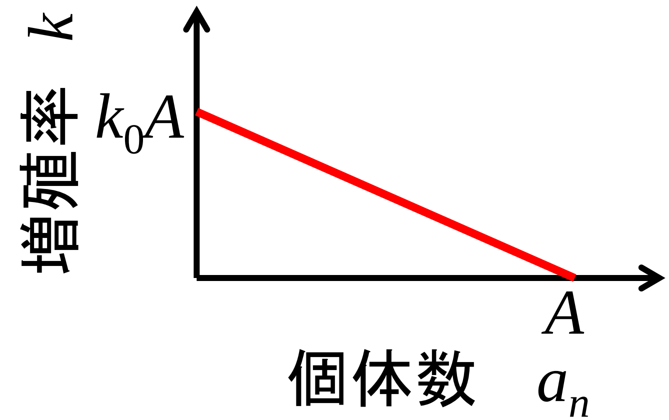


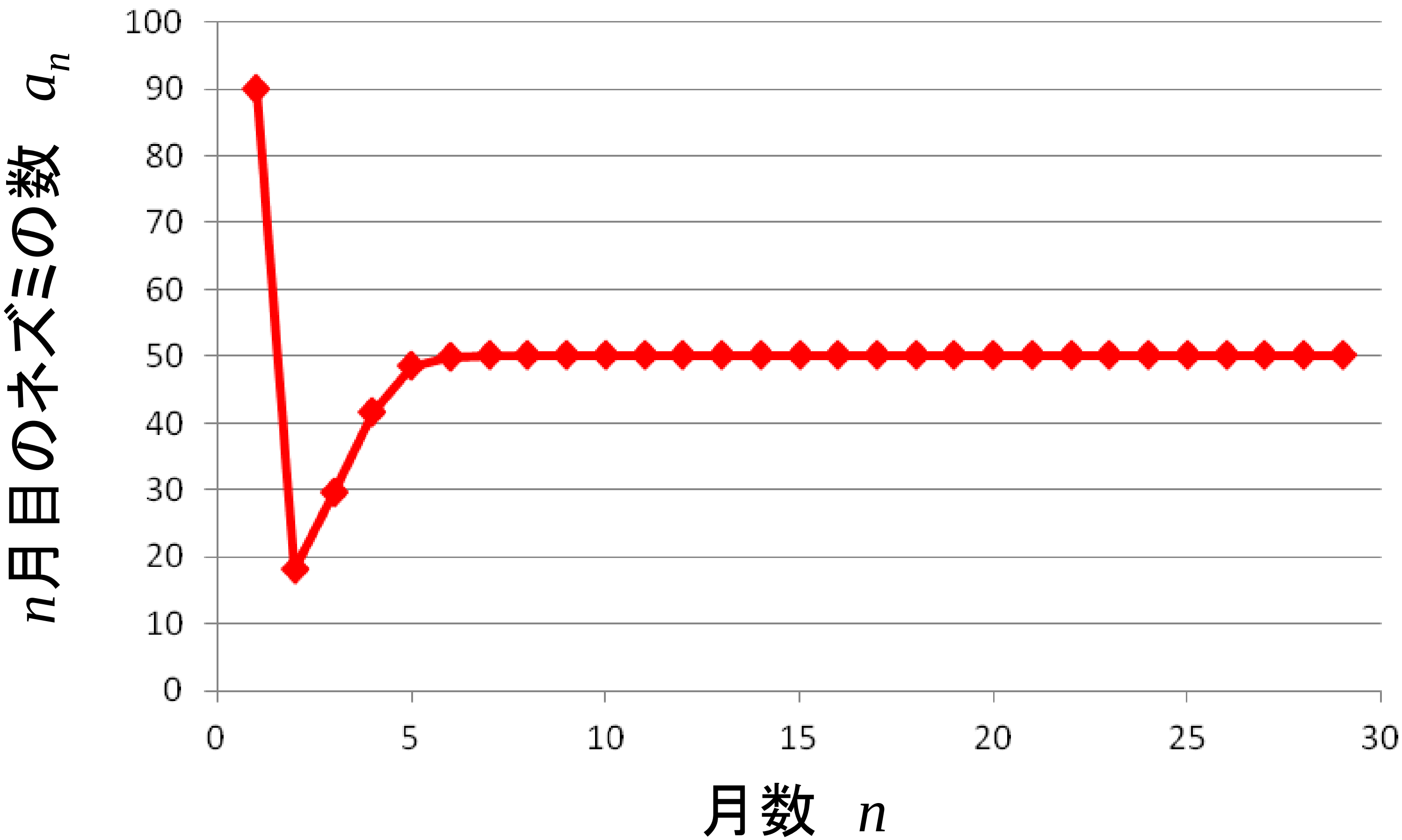


はじめから数が多くても・・・

$$a_{n+1} = k_0 (A - a_n)\, a_n$$

$$k_0 A = 2,\quad A = 100 \qquad a_1 = 200$$





個体数

少　多

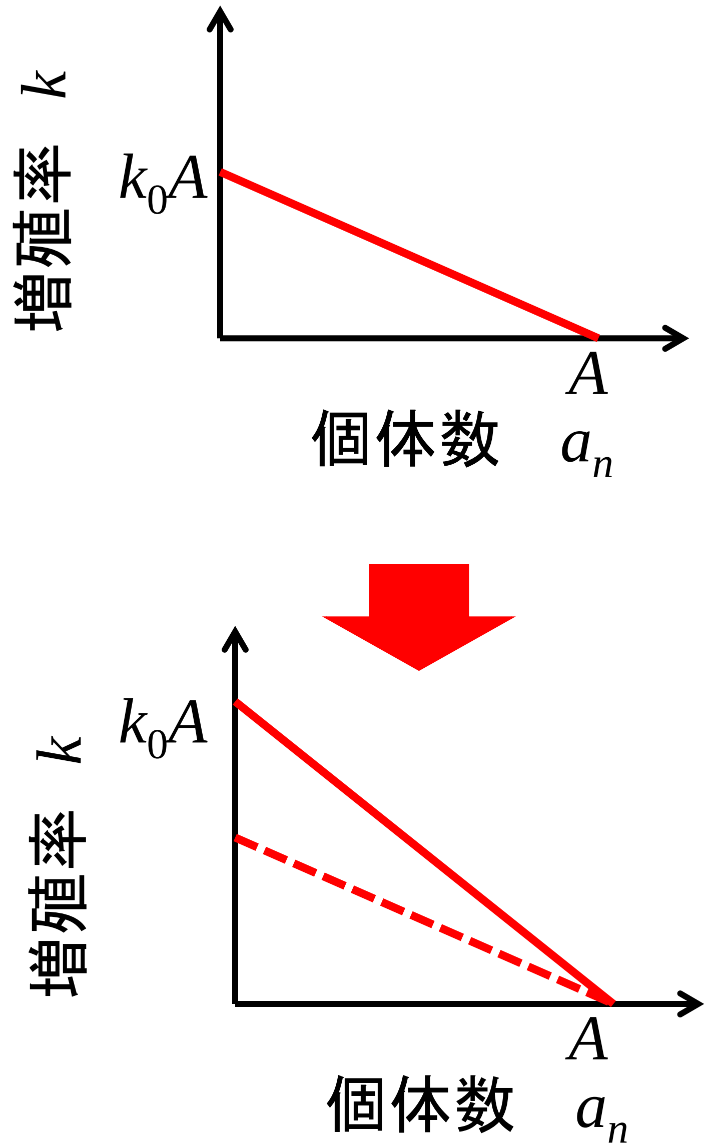
環境　良

増殖率　高

環境　悪

増殖率　低

つりあう位置で止まる



ネズミから離れて

ロジスティック写像

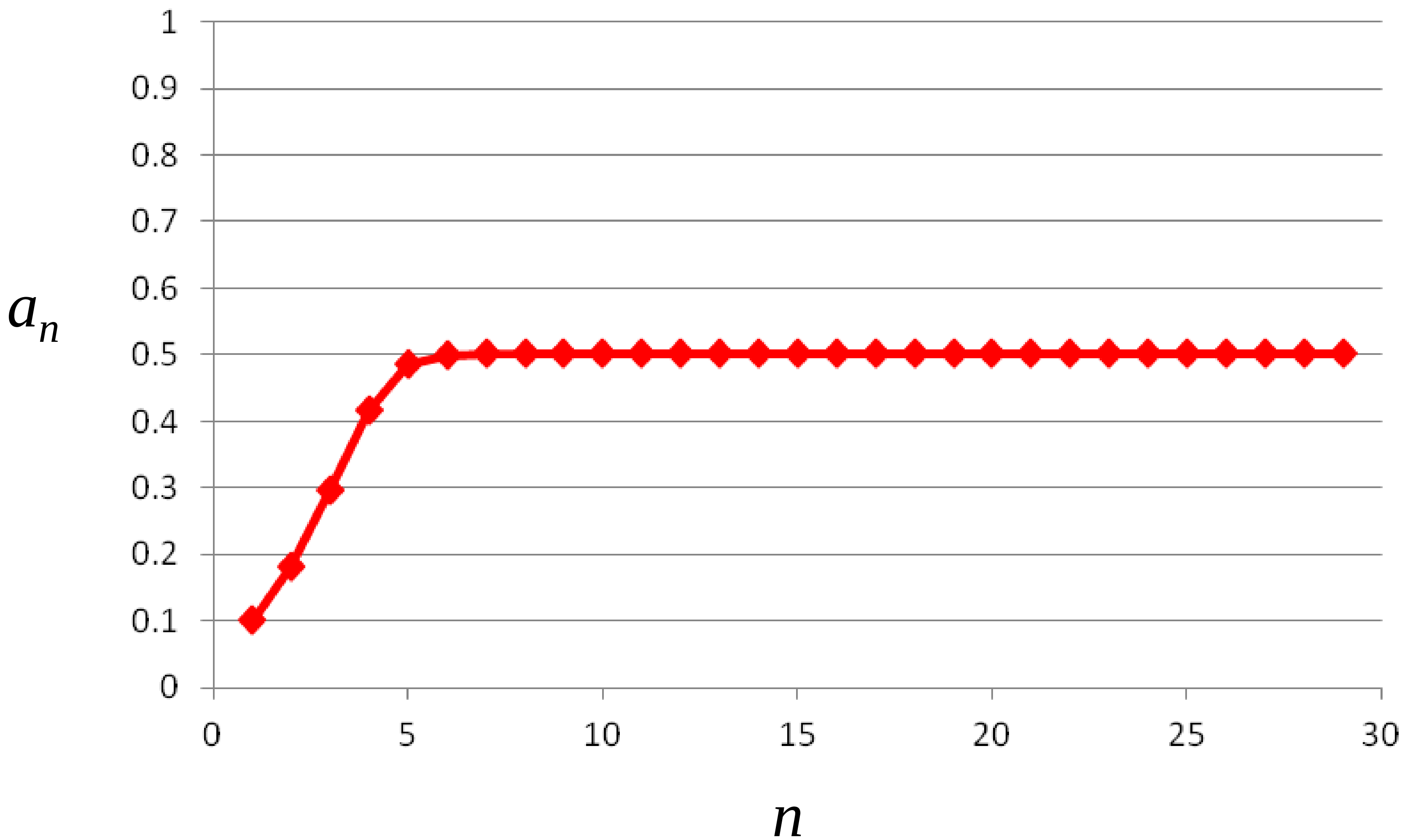
$$a_{n+1} = k_0\,(A - a_n)\,a_n$$

の性質を調べてみよう。

$A = 1$ として、k_0 の値を
変えていくと・・・

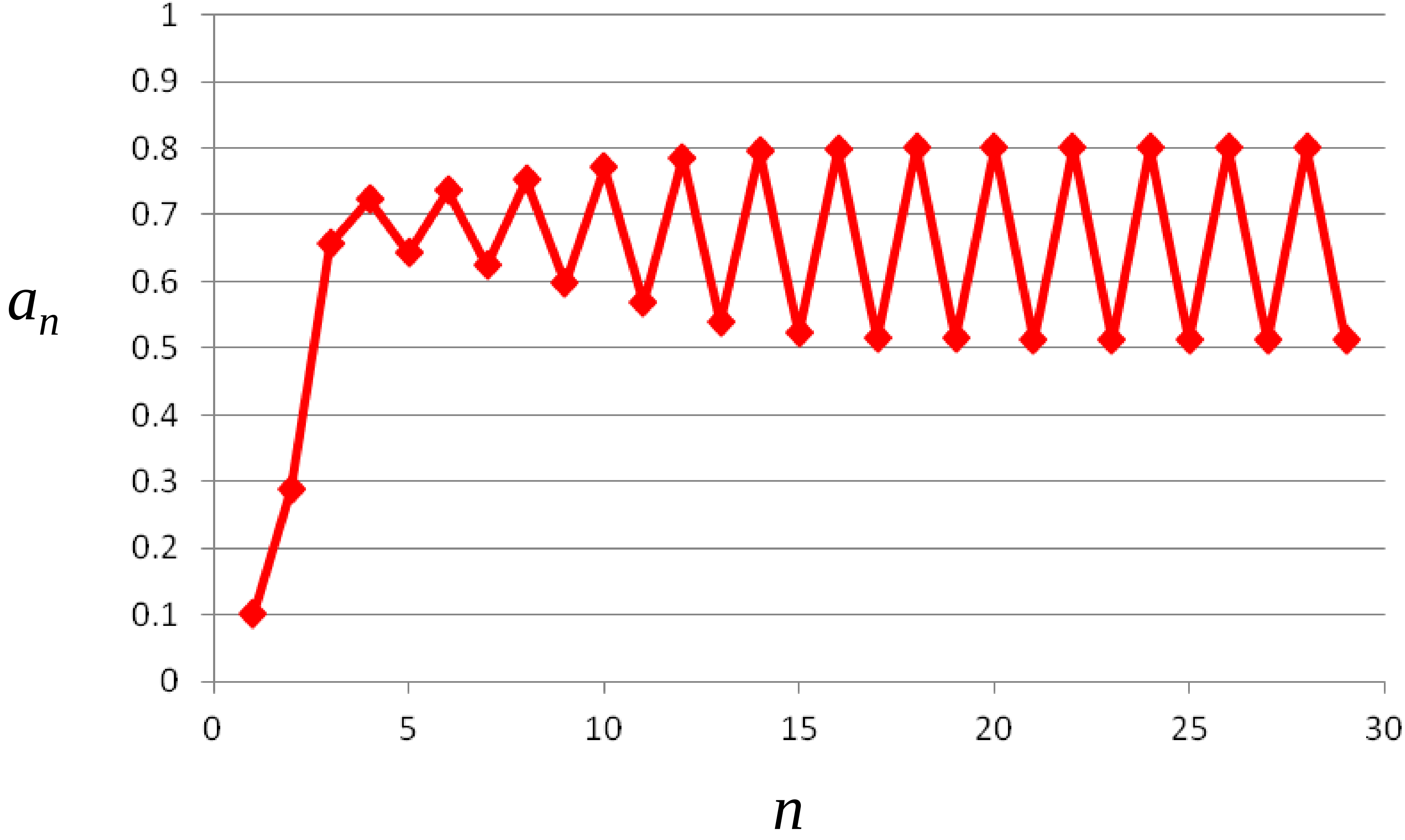
$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 2$ $\qquad$ $a_1 = 0.1$

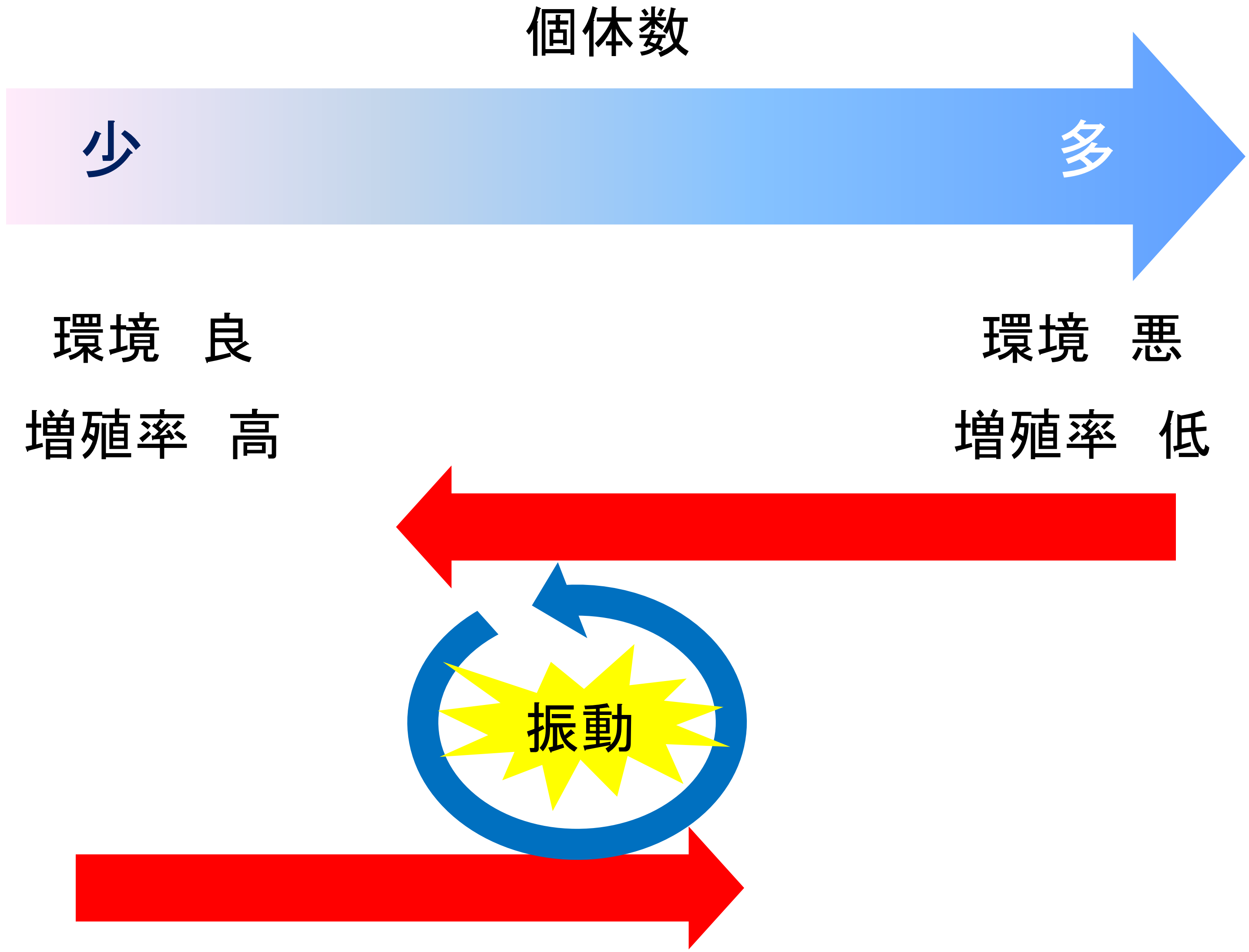


$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 3.2 \qquad a_1 = 0.1$



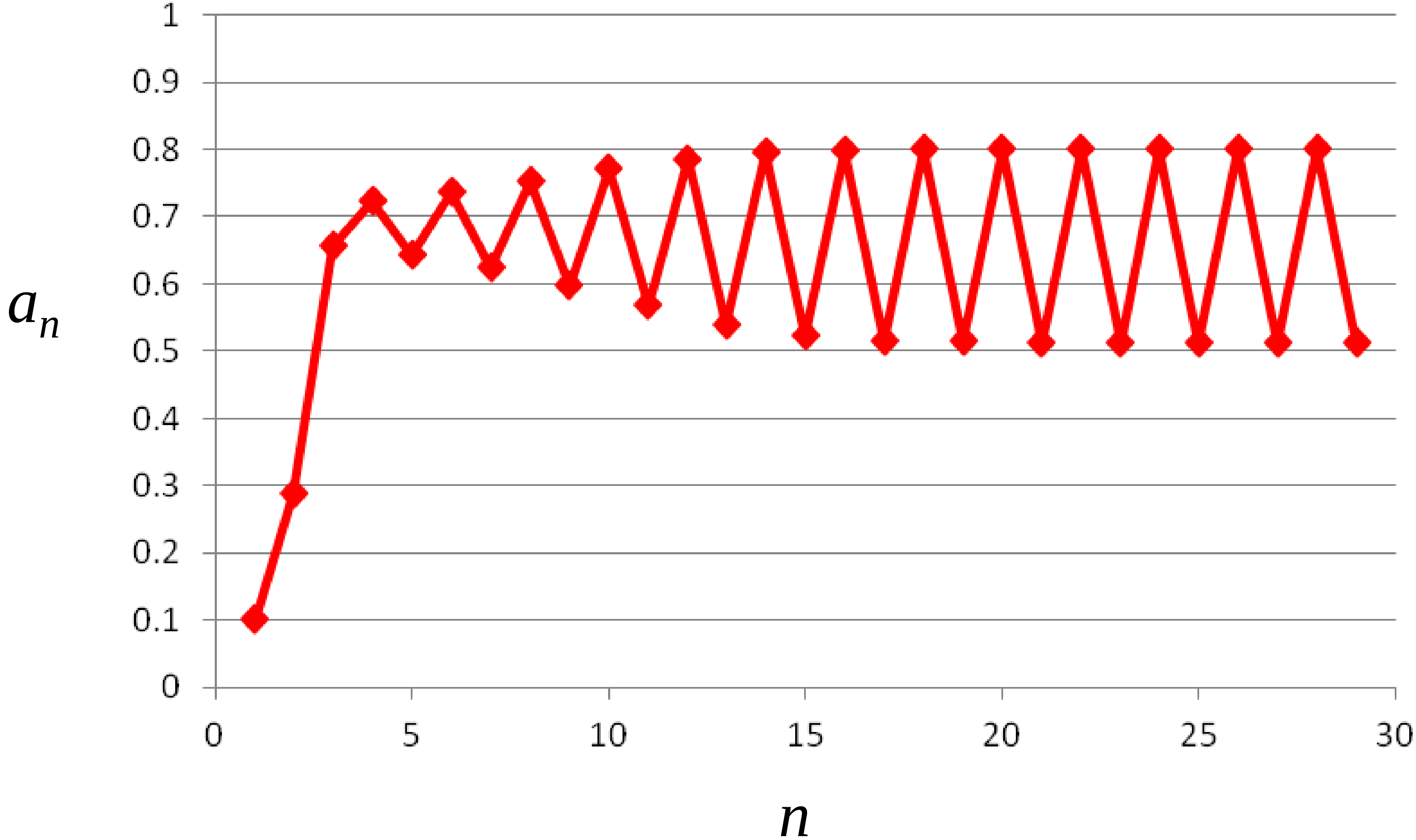
$k_0 = 3.2$ では



つりあう位置をいきすぎてしまう

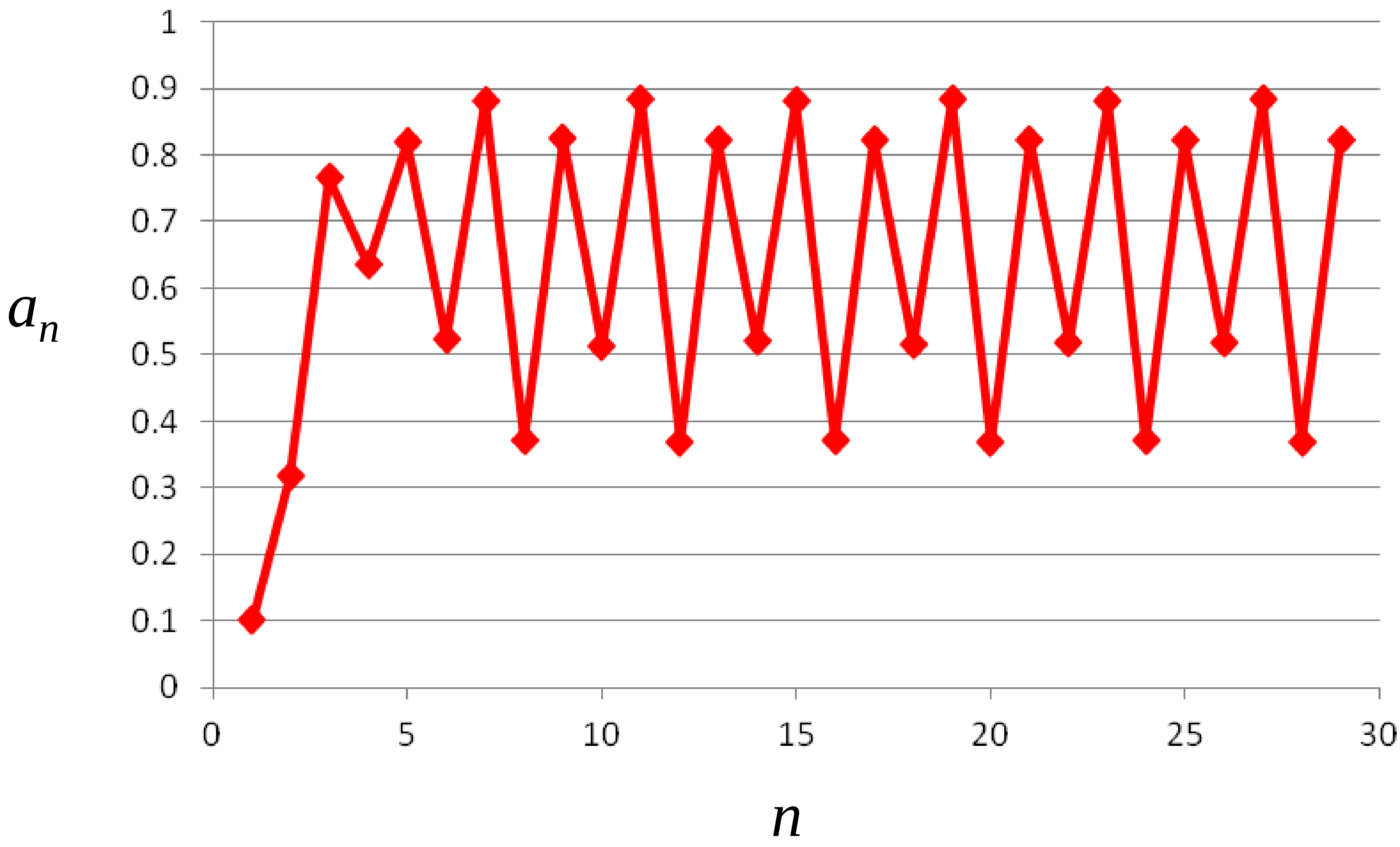
$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 3.2$ $\qquad$ $a_1 = 0.1$



$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

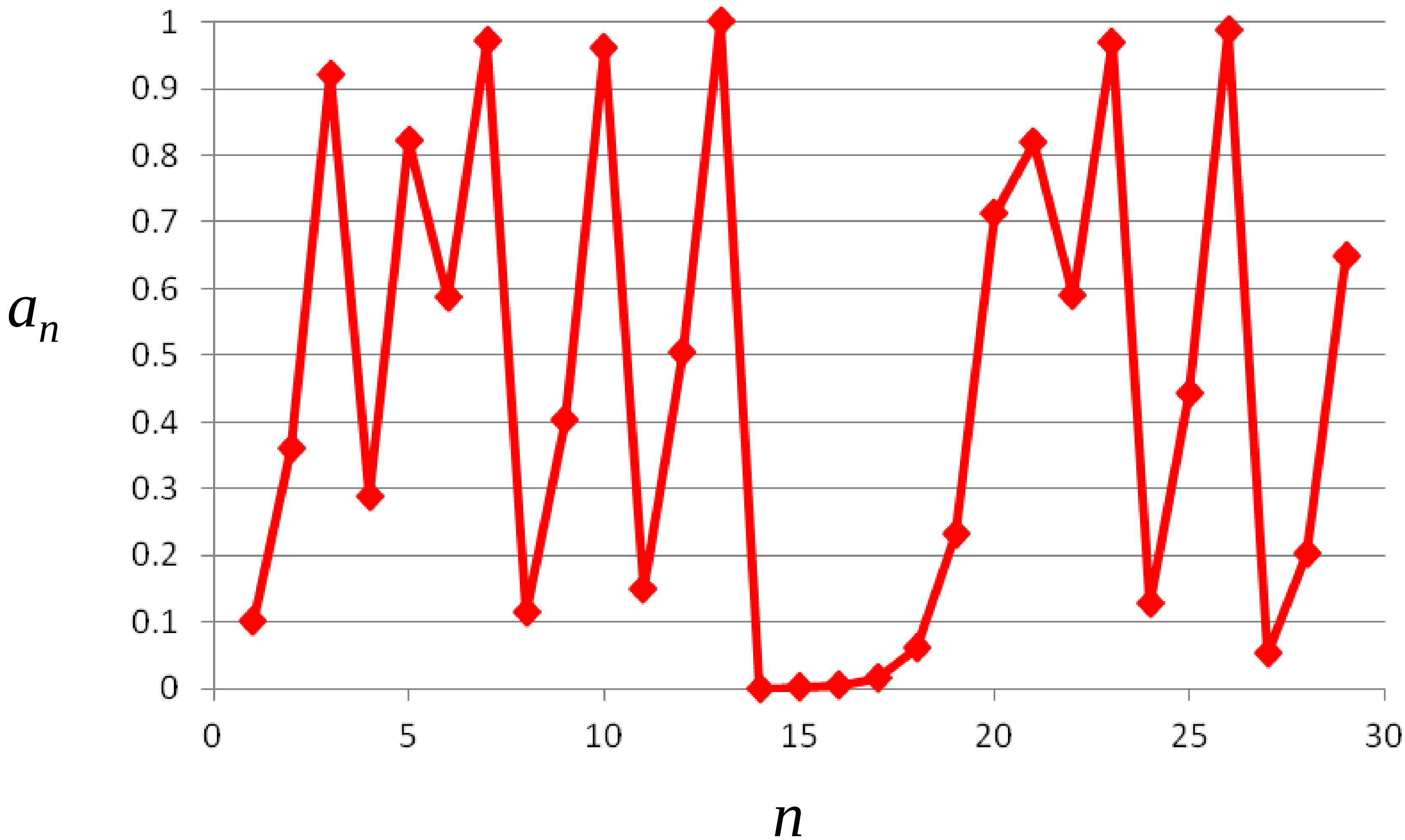
$$k_0 = 3.53 \qquad a_1 = 0.1$$

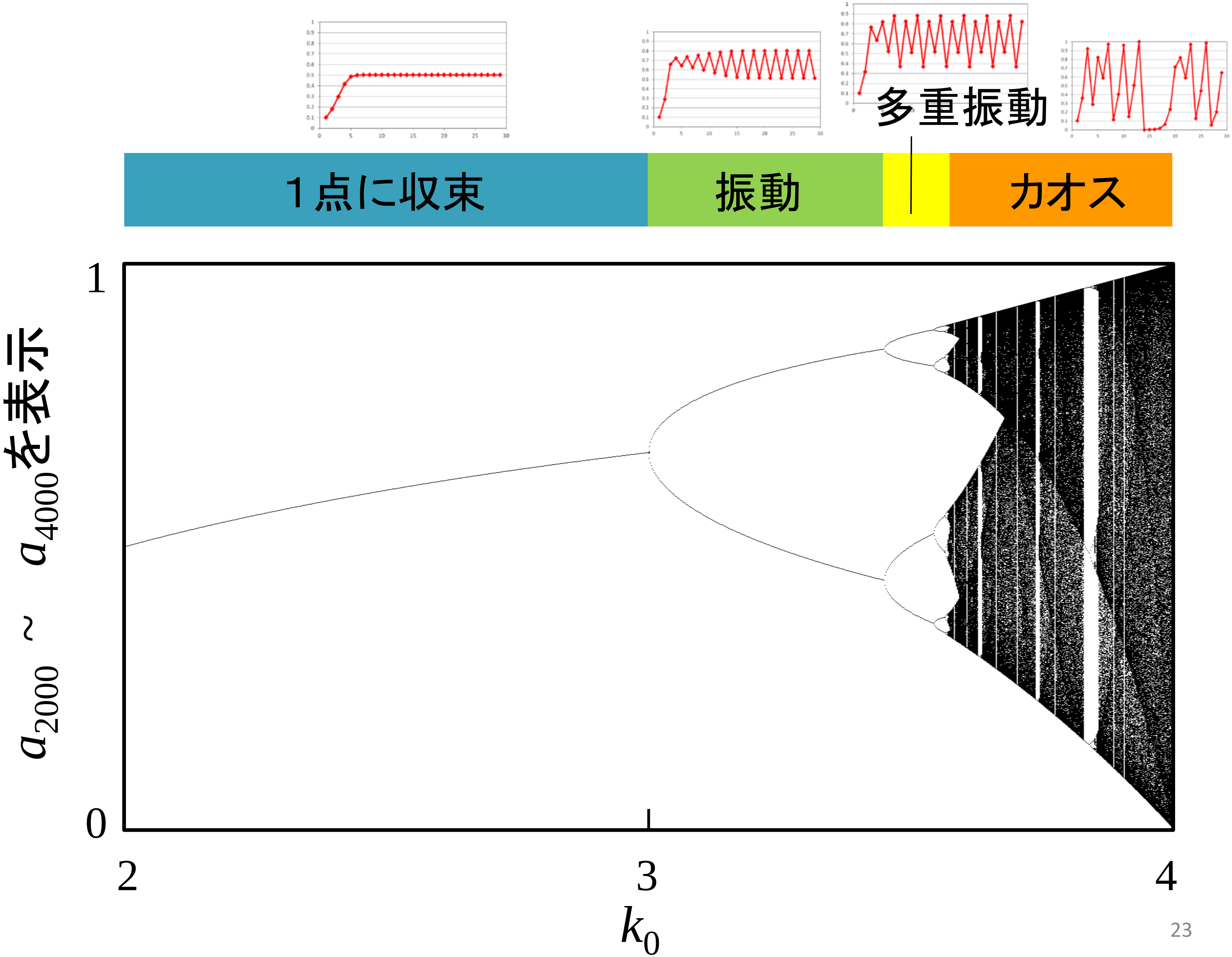


$$a_{n+1} = k_0\,(1 - a_n)\,a_n$$

$k_0 = 4$ $a_1 = 0.1$

"カオス"




多重振動
1点に収束
振動
カオス
a_{2000} ～ a_{4000}を表示
1
0
2
3
4
k_0

化学反応でも見られる振動：BZ反応

時間的に色が変わるような化学反応って見たことありますか?

次の5種類の溶液を混合

1.0 mol/ℓ 臭素酸ナトリウム	3.0 mℓ
3.0 mol/ℓ 硫酸水溶液	2.0 mℓ
1.0 mol/ℓ マロン酸水溶液	2.0 mℓ
1.0 mol/ℓ 臭化ナトリウム水溶液	0.3 mℓ
0.025 mol/ℓ フェロイン水溶液	0.3 mℓ
蒸留水	2.4 mℓ
合　計	10 mℓ

Belousov-Zhabotinsky (BZ)反応の実験

i) 撹拌した系で

酸化状態

還元状態

マグネチックスターラー
（磁石式の撹拌機）で
混ぜ続けています

ii) 静置した系で

BZ反応溶液を目の細かなろ紙（メンブレンフィルター）
にしみこませる

a) 同心円パターン
（Target Pattern）

b) らせんパターン
（Spiral Pattern）

溶液は完全には
混ざり合わず
近くに"しみこんで"
いきます

（4倍速）

3 mm

微分方程式(反応拡散方程式)を使うとパターンも再現できる。

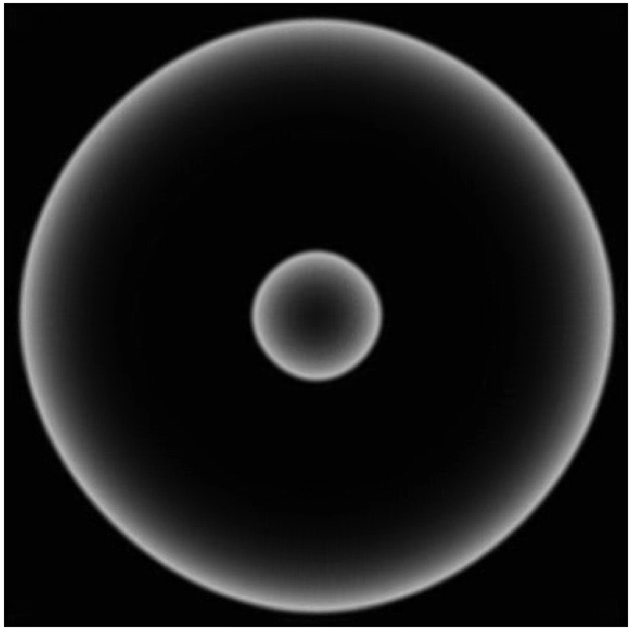
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(U(1-U) - fV\frac{U-q}{U+q} \right) + D_U \nabla^2 U$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = U - V + D_V \nabla^2 V$$

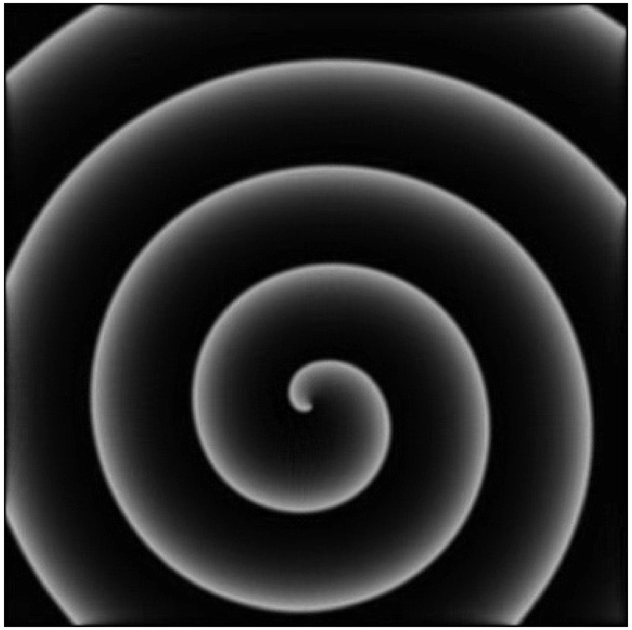
U, V ： 化学物質の濃度（時間と位置の関数）

V 大 $\rightarrow$ 青（白）、 V 小 $\rightarrow$ 赤

同心円パターン

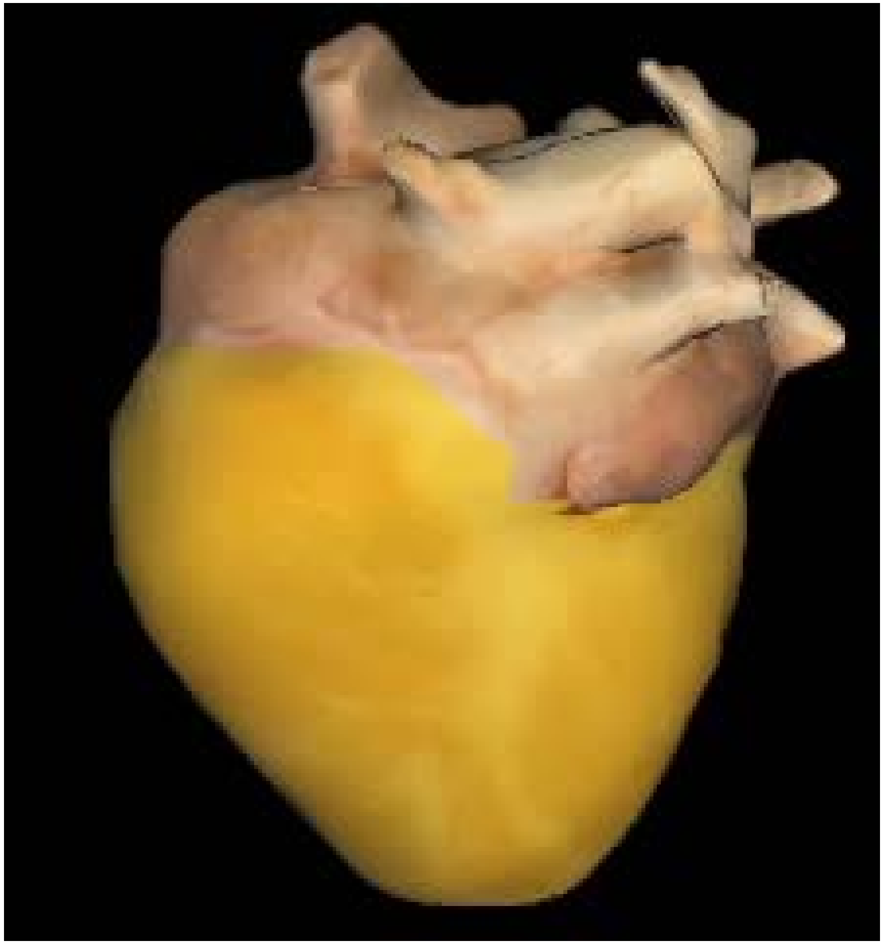


らせんパターン

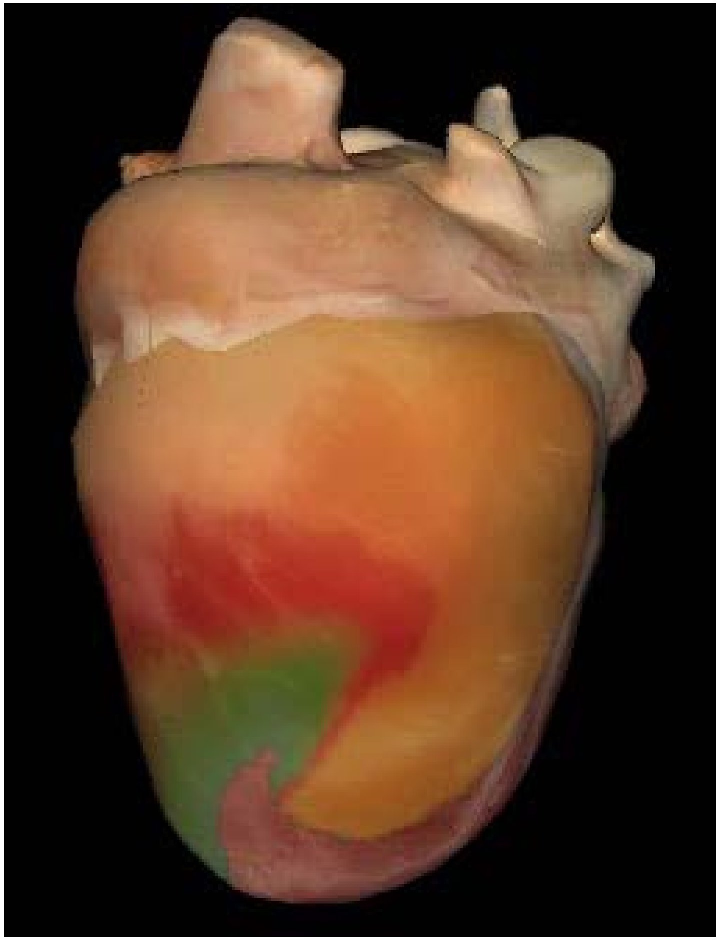


心臓の拍動パターンとBZ反応

正常時

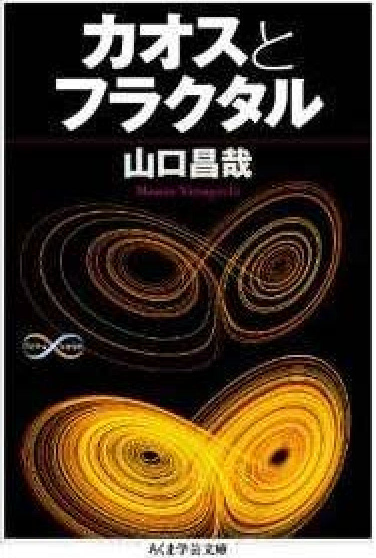


異常時



http://thevirtualheart.org/

より詳しく知りたい人へ



「カオスとフラクタル」
山口昌哉著　（ちくま学芸文庫）

以下の単語でWEBで検索

カオス、 ロジスティック写像、

Belousov-Zhanotinsky反応、 BZ反応

同期現象

身近なところに不思議はいっぱい

不思議なことに数学（数式）を使って
アプローチしてみましょう！