

数学で読み解く 生物リズムとカオス

お茶の水女子大学 郡 宏 (こおり ひろし)
永遠の17歳? 小野 槇子 (おの まきこ)

リズムとリズムの
タイミングがあうことを
シンクロ(同期)っていいます。

どうやってリズムはシンクロするの？

意図的？

みんなでそろえようと
がんばっているのか？

つまり、生き物だけができるのか？

どうやってリズムを数式で表す？

その数式でシンクロすることを
証明できる？

手拍子シンクロの数式をつくってみよう



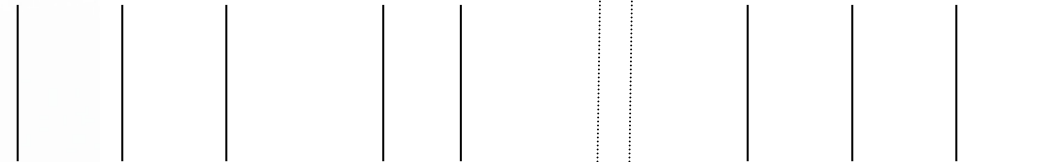
x_1 x_2 x_3 ...



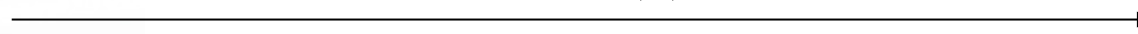
x_n



x_1 x_2 x_3 ...



y_n



時間

x_n Xさんのn回目の手拍子の時刻

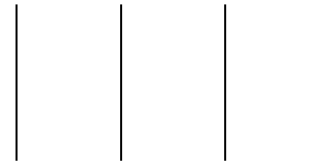
y_n Yさんのn回目の手拍子の時刻

ルール0の数式



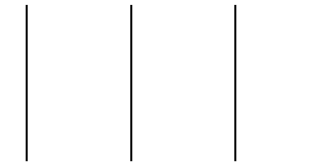
$$x_{n+1} = x_n + 1$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1.0, x_3 = 2.0, \dots$$



$$y_{n+1} = y_n + 1$$

$$y_1 = 0.2, y_2 = 1.2, y_3 = 2.2, \dots$$



最初にずれていたなら、あとはずれっぱなし。。

ぼくらはどうやってシンクロさせている？

- ▶ ルール0

自然な(つまり, こちよい)手拍子の間隔は
2人とも同じだとして, それを1秒だとする

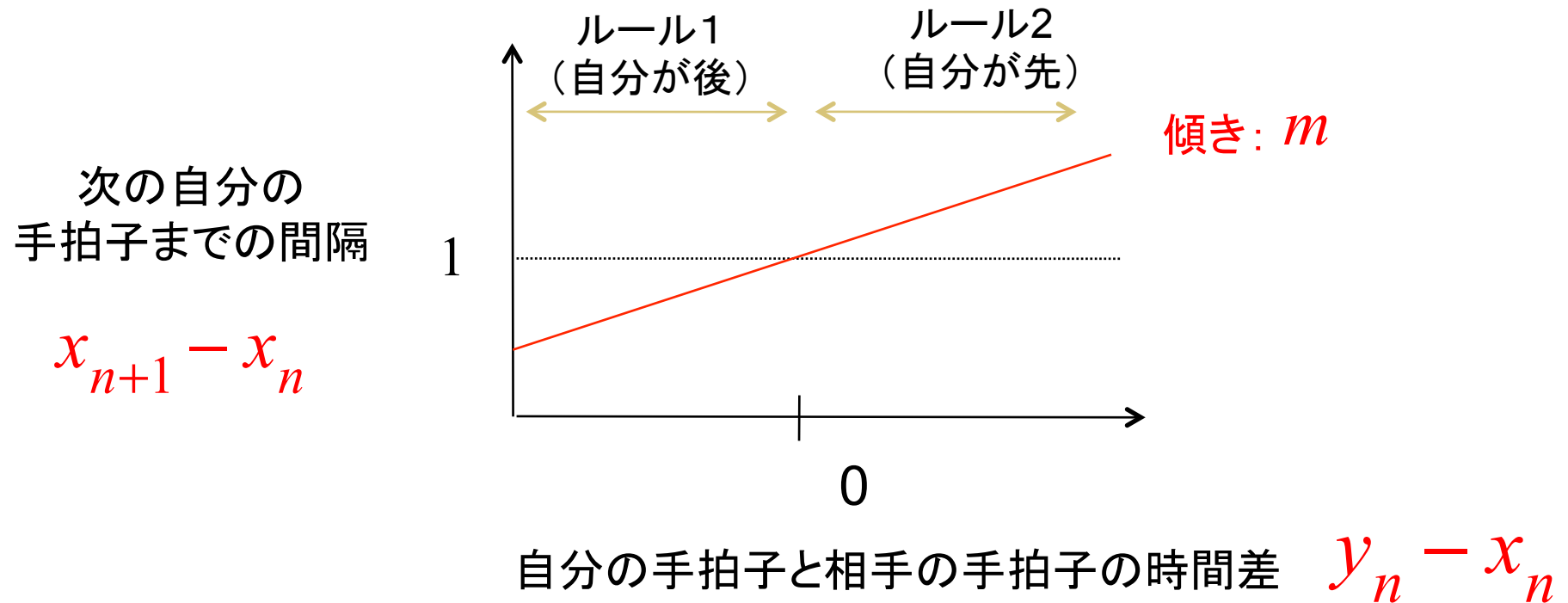
- ▶ ルール1

自分の手拍子が相手より後だったら,
次の手拍子は少し??する
早く

- ▶ ルール2

逆に, 自分の手拍子が相手より先であれば
次の手拍子は少し??する
遅く

XさんとYさんの数式ができた！



$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} - x_n = 1 + m(y_n - x_n) \\ y_{n+1} - y_n = 1 + m(x_n - y_n) \end{array} \right. \quad \text{連立漸化式}$$

この数式でシンクロするの？

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = 1 + m(y_n - x_n) \\ y_{n+1} - y_n = 1 + m(x_n - y_n) \end{cases}$$

$z_n = x_n - y_n$ と置く (二人の手拍子の時間差)

$$\begin{aligned} \text{辺々ひくと} \quad z_{n+1} - z_n &= m(-z_n) - mz_n \\ &= -2mz_n \end{aligned}$$

つまり $z_{n+1} = (1 - 2m)z_n$ を得る.

みたことあるぞ

$$z_{n+1} = (1 - 2m)z_n$$

z_1 からスタート

$$z_2 = (1 - 2m)z_1$$

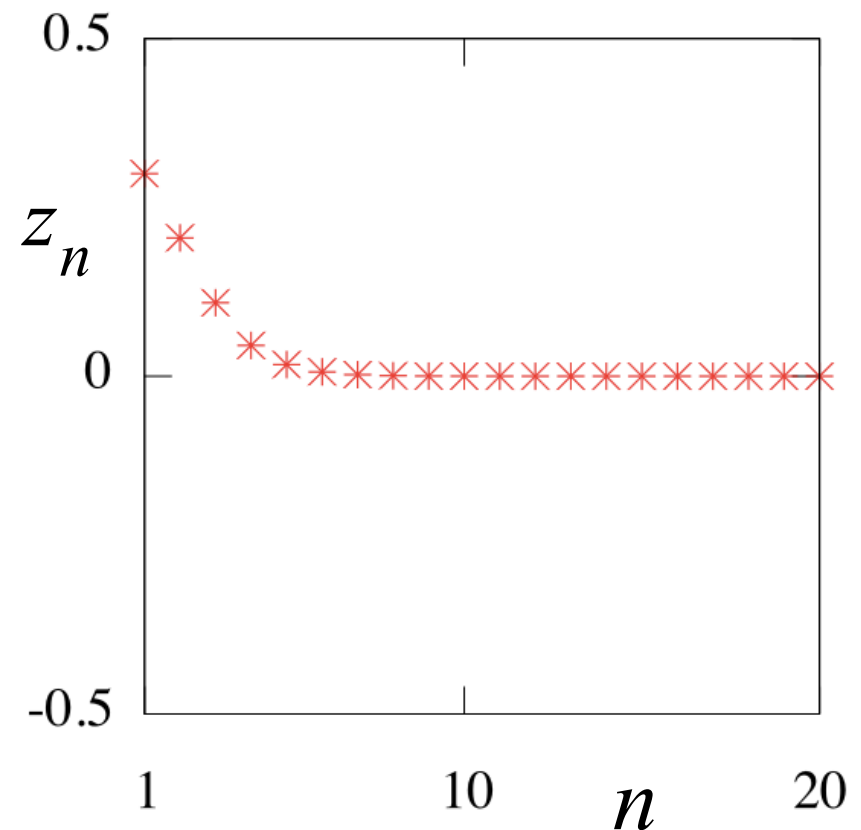
$$z_3 = (1 - 2m)z_2 = (1 - 2m)^2 z_1$$

⋮

$$z_{n+1} = (1 - 2m)^n z_1$$

等比数列！

$$|1 - 2m| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

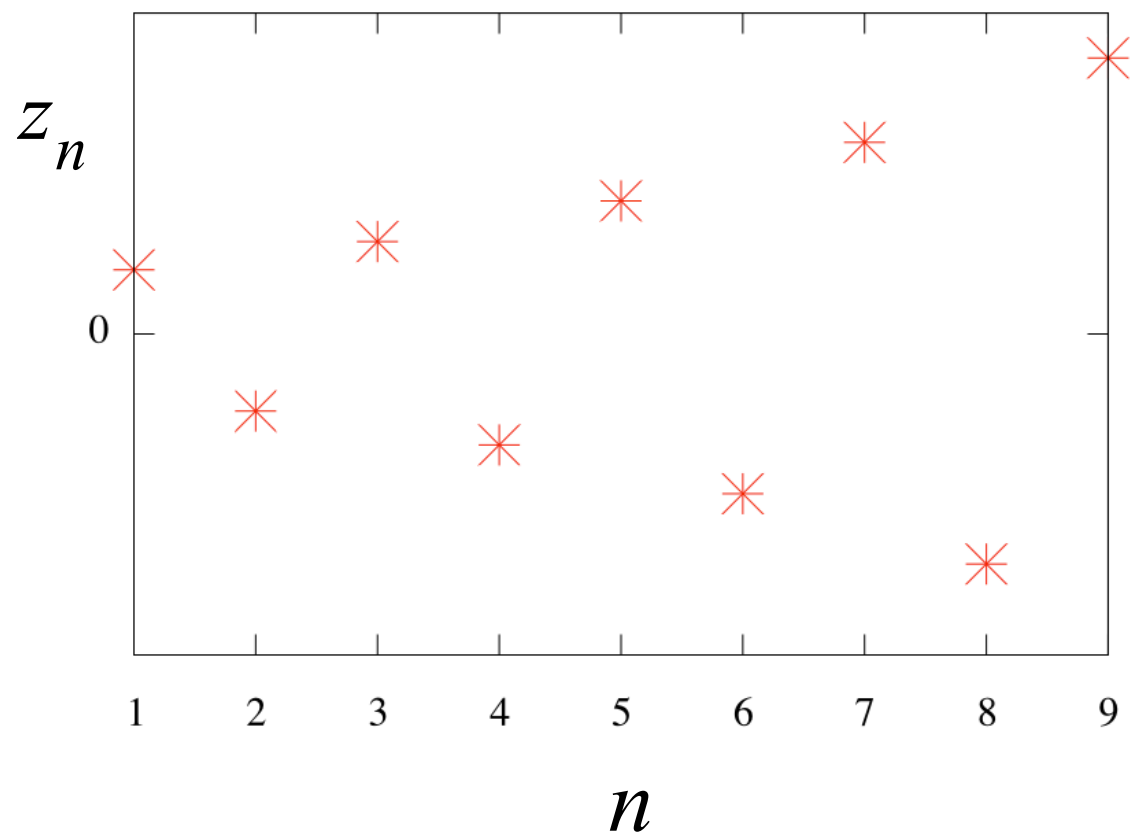


時間がたてば、手拍子がシンクロ！

しかし思いが強すぎると...

$$z_{n+1} = (1 - 2m)^n z_1$$

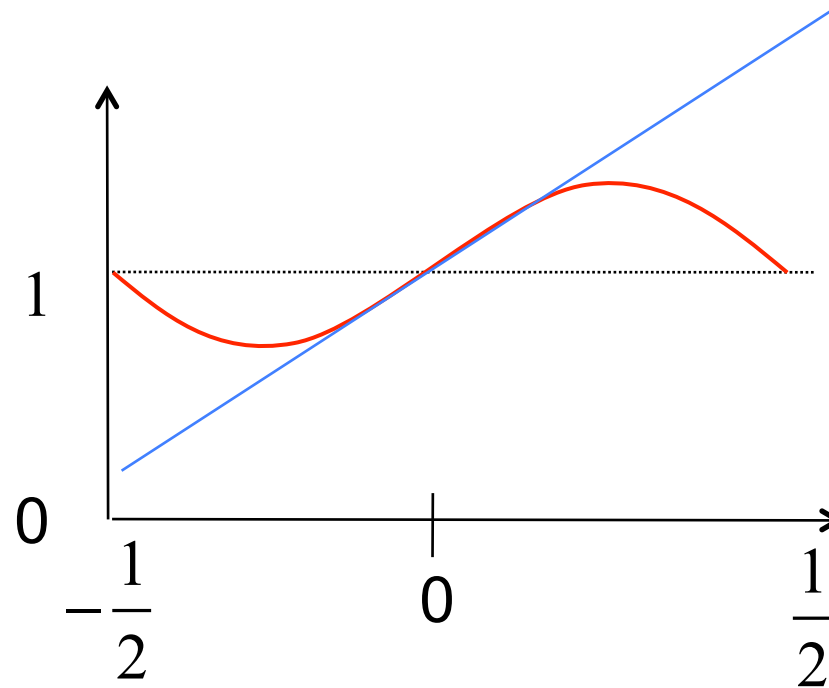
$m > 1$ だと?



すれちがって、どんどん離れて無限大へ
無限大?

ルールを改良してみる

次の自分の
手拍子までの間隔



a

愛の強さ

自分の1手拍子と相手の手拍子との時間差

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(y_n - x_n) \\ y_{n+1} - y_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(x_n - y_n) \end{cases}$$

新しい数式を解いてみよう

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(y_n - x_n) \\ y_{n+1} - y_n = 1 + \frac{a}{2} \sin 2\pi(x_n - y_n) \end{cases}$$

$z_n = x_n - y_n$ と置く (二人の手拍子の時間差)

辺々ひくと

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \frac{a}{2} \sin 2\pi(-z_n) - \frac{a}{2} \sin 2\pi z_n \\ &= -\frac{a}{2} \sin 2\pi z_n - \frac{a}{2} \sin 2\pi z_n \\ &= -a \sin 2\pi z_n \end{aligned} \quad \text{を得る.}$$

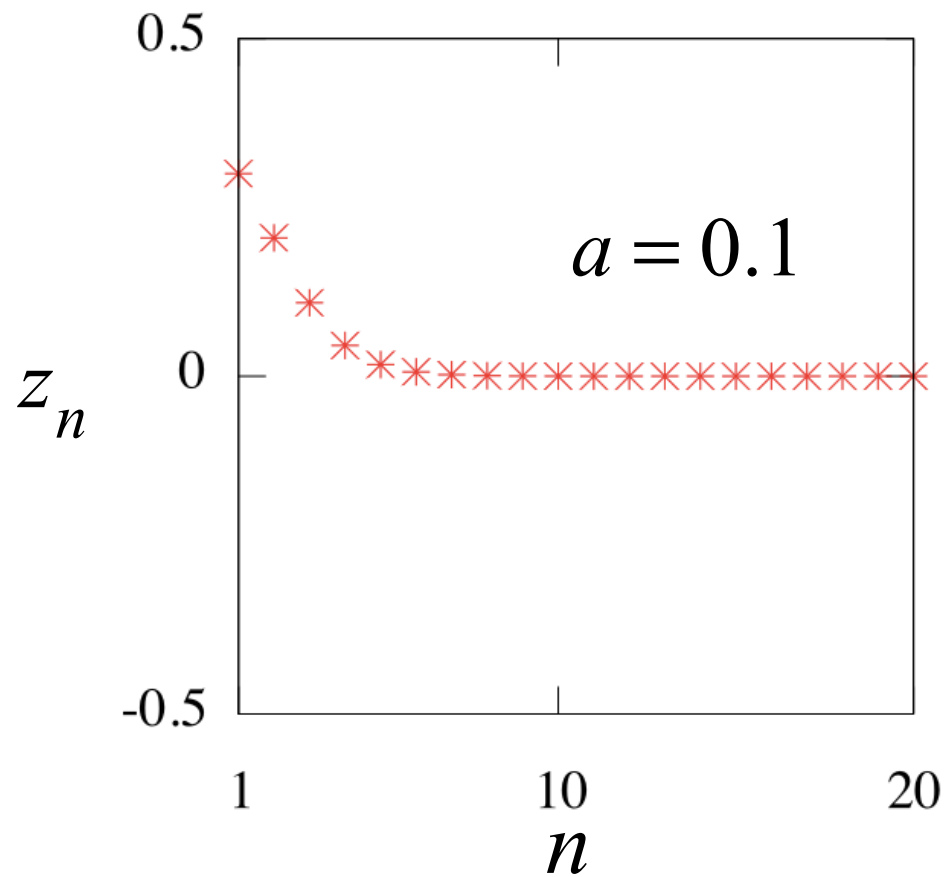
1変数漸化式. 簡単に解けそう??

解けない... (T_T)

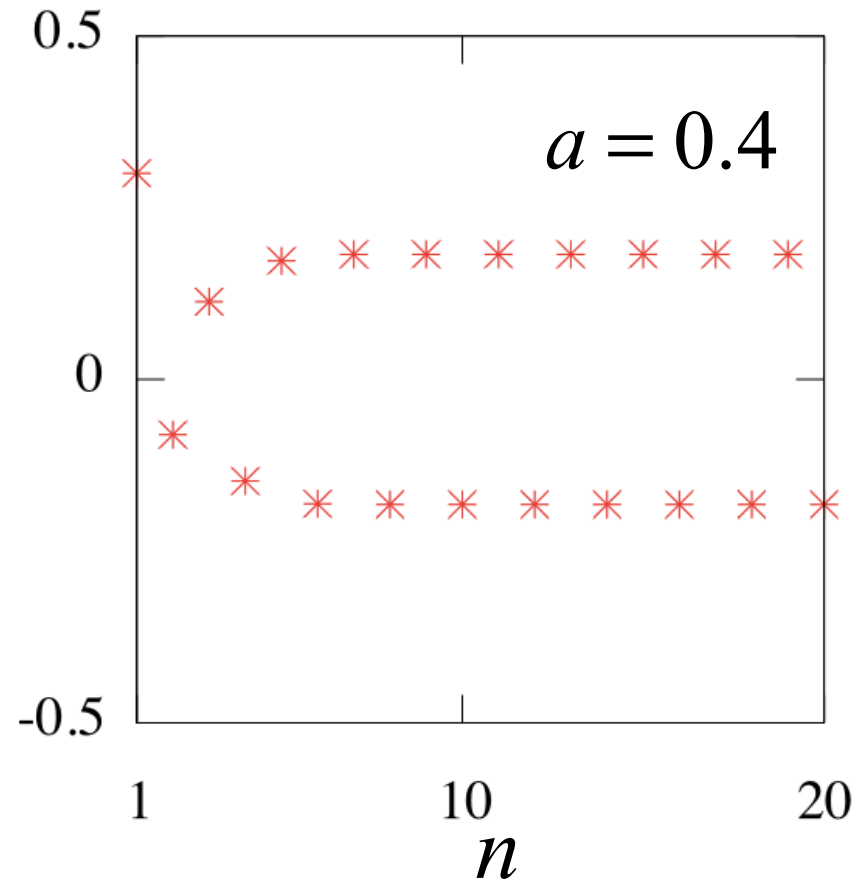
計算機で計算する

$$z_{n+1} = z_n - a \sin 2\pi z_n$$

初期値 $z_1 = 0.3$

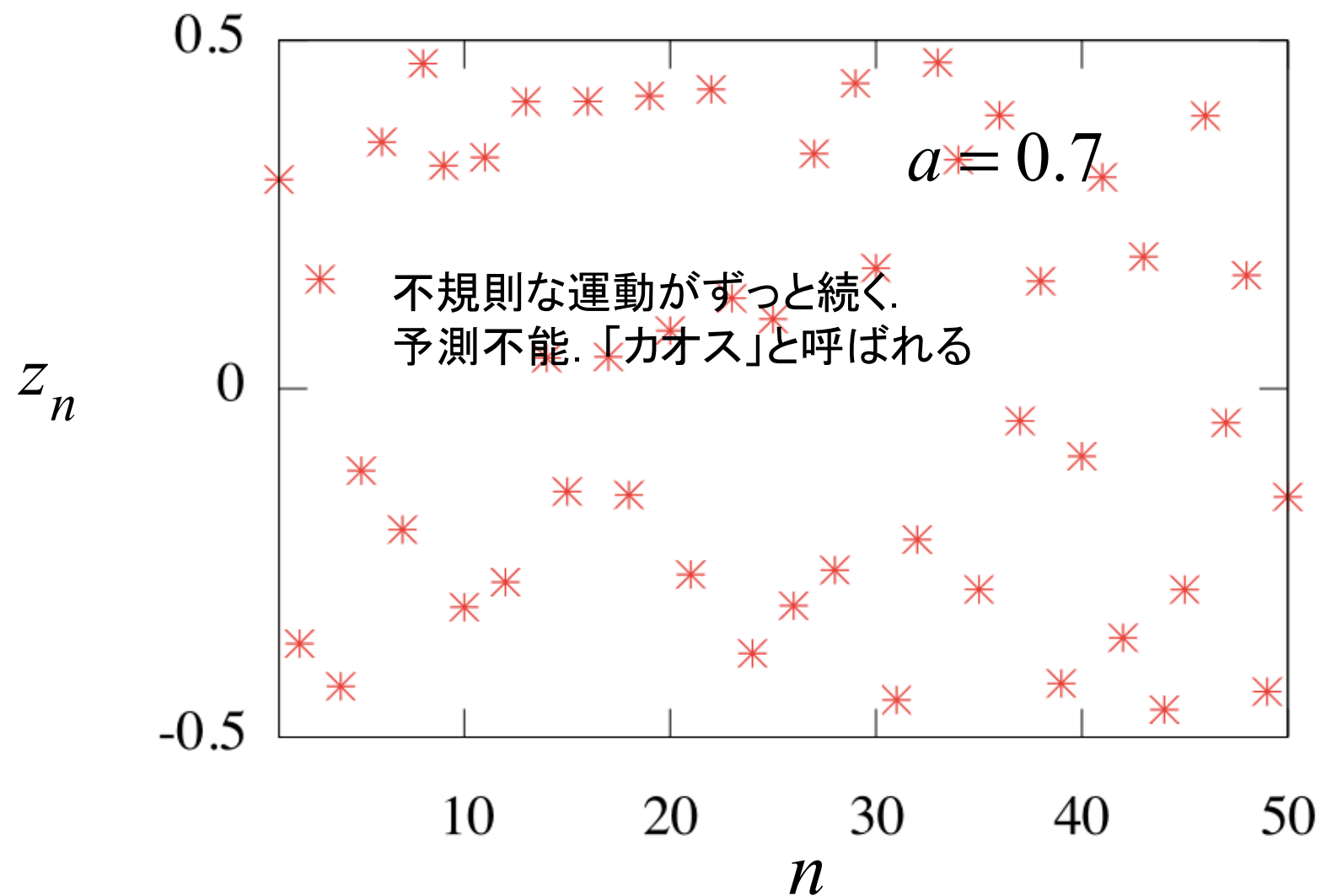


シンクロした

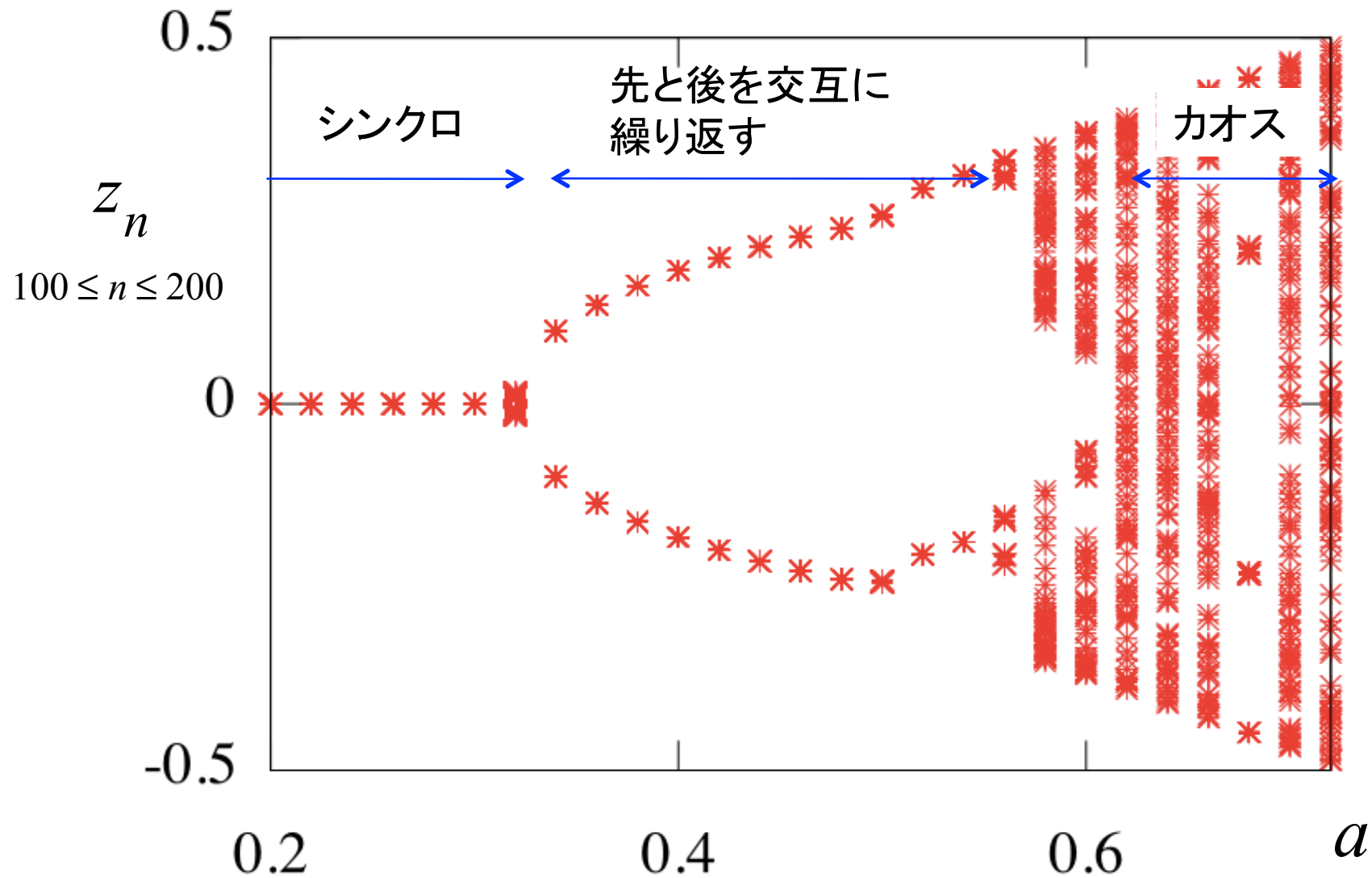


先行したり, おくれたり, 交互に来る

もっと愛が強いと...



いろいろなaの値(愛の強さ)をまとめると



なんで数式で表すのか？ なんでそれを解くのか？

2つ大事なことがある

▶ 予測ができる

- 例えば天気予報は、数式で自然を表して、それをコンピューターで計算して予測している。
- いい数式が作れば、渋滞だって、はたまた病気だって、予測したり直し方がわかったりする。数式で表す技術が、必要とされている！

▶ 理解を目指す

- 不要な事柄を全て削ぎおとす。
- するといろんな物がつながる(手拍子, ホタル, さらにには体内時計も似た数式で表現できる)
- それによって初めて見えることがある。

知りたいことがある.

わかりたいから, 新しい数式を考えたり

数式に手を加えたりする.

そして工夫して解いたり, コンピューターで計算したりして
秘密にせまろうとする.

こういうことを, 数学を使う研究者は

毎日やっている. なんら難しいことじゃない.

ただひたすら積み重ねていく.

“Math is the lie that makes us realize the truth.”
数学は、我々に真実を悟らせるためのウソである

クイズ:

ストロガッツという数学者が、とある有名人の言葉をもじっています。オリジナルのものは、最初の単語が違います。さて、もともとはなんという単語だったのでしょうか？ そしてそれは誰の言葉でしょうか？

宿題

$$z_{n+1} = z_n - a \sin 2\pi z_n$$

これを計算するプログラムをつくりましょう。
いろいろな a の値を試しましょう。
初期値 z_1 の値はたとえば0.3とか
適当な値で大丈夫です。